На правах рукописи

Кащеева Ольга Николаевна

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КИРАЛЬНОГО ТИПА

01.01.02 - Дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2007

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского и Волжской государственной академии водного транспорта.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Баландин Александр Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Уткин Геннадий Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор Галкин Владимир Михайлович

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Защита состоится ". . . ." . . . . 2007 г. в . . . . часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950 г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан ". . . ." . . . . 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И. Лукьянов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из наиболее эффективных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в настоящее время является метод обратной задачи рассеяния. Поэтому актуальной остается задача описания систем нелинейных дифференциальных уравнений, к которым применим данный метод. Как известно, необходимым условием применения метода обратной задачи является наличие представления Лакса, т.е. представления изучаемой нелинейной системы в виде условий совместности некоторой вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений. Кроме того, представление Лакса часто оказывается полезным для построения преобразований Бэклунда и бесконечных наборов законов сохранения.[1,2]

В диссертации изучаются системы кирального типа, т.е. специальный класс систем дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Системы такого вида находят применение при описании ряда моделей теории поля, в математической физике, а также в теории гармонических отображений.[3]

Интегрируемая система[4,5] в диссертации понимается как система, допускающая представление Лакса.

Исторически одним из первых интегрируемых примеров рассматриваемого класса, для которого был применен метод обратной задачи, является уравнение sin-Gordon. Представление Лакса для этого уравнения построено в работах Л.А. Тахтаджяна и M.J. Ablowitz'a, D.J. Kaup'a, A.C. Newel'a, H. Segur'a. В качестве других известных примеров интегрируемых систем кирального типа можно указать уравнения n-поля,[6] уравнения главных киральных полей на груп-

---

[1] Sasaki R. Soliton equations and pseudospherical surfaces.// Nucl. Phys. B. – 1979. – V. 154. – P. 343–357.

[2] Демской Д.К., Мешков А.Г. Представление Лакса для триплета скалярных полей.// ТМФ. – 2003. – Т. 134, No. 3. – С. 400–415.

[3] Fordy A.P., Wood J.C. Harmonic maps and integrable systems.// Aspects of Mathematics. – vol. E23, by Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994. – 323 p.

[4] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.:Наука. Главная редакция физ.-мат. лит, 1986. – 528с.

[5] Рейман А.Г., Семенов-тян-Шанский М.А. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход.– Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 352с.

[6] Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints, // Comm. Math. Phys. – 1976. – V. 46, No. 3. – P. 207–221.

пах Ли,[7] которые дали название всему классу систем, и модифицированных киральных полей, а также нелинейные сигма-модели на двумерном пространстве Минковского.

Отметим важные для теории поля системы WZNW (Wess-Zumino-Novikov-Witten), которые являются частным случаем уравнений модифицированных киральных полей, и их различные обобщения.[8]

Интегрируемые редукции систем WZNW изучались в работах J.L. Miramontes'a, O.A. Castro Alvaredo, C.R. Fernandez-Pousa, T.J. Hollowood'a, M.V. Gallas'a.

Среди систем кирального типа значительный интерес также представляет система Лунда–Редже,[9] которая является двукомпонентным интегрируемым обобщением уравнения sin-Gordon.

В 1983 году А.Н. Лезнов и М.В. Савельев[10] предложили конструкцию для построения достаточно большого класса интегрируемых систем, с помощью которой можно каждому локально симметрическому пространству G/H сопоставить представление Лакса некоторой системы кирального типа. В частности, с помощью конструкции Лезнова-Савельева можно получить хорошо известные двумерные цепочки Тода[11] и двумерные неабелевы аффинные модели Тода.[12] Особенно важно для физических приложений, что эти системы в случае полупростой группы H оказываются вариационными, т.е. являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для некоторого функционала. Такие системы и их вариационные редукции активно изучались в последнее время в работах следующих авторов: I. Bakas, J.L. Miramontes, Q.H. Park, H.J. Shin, A. Bilal.

Необходимо отметить, что для изучения интегрируемых систем

[7] Захаров В.Е., Михайлов А.В. Релятивистски–инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, //ЖЭТФ. – 1978. – Т.74, No. 6. – С. 1953–1973

[8] См., например, K. Sfetsos, A.A. Tseytlin. Antisymmetric tensor coupling and conformal invariance in sigma models corresponding to gauged WZNW theories.// Phys.Rev. D. – 1994. – V. 49. – P. 2933–2956. (hep-th/9310159)

[9] Lund F., Regge T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions.// Phys.Rew. D. – 1976. – V. 14, No. 6. – P. 1524–1535.

[10] Leznov A. N., Saveliev M. V. Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems. Monopoles, instantons, dual models, relativistic strings, Lund-Regge model, generalized Toda lattice, etc.// Comm. Math. Phys. – 1983. – V. 89, No. 1. – P. 59–75.

[11] Михайлов А.В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.// Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30, No. 7. – С. 443–448.

[12] См., например, Underwood J. Aspects of Non-Abelian Toda Theories, Imperial/TP/92-93/30. (hep-th/9304156)

используется также симметрийный подход. В работах А.Г. Мешкова и Д.К. Демского[13] этот подход был использован для изучения трехкомпонентных систем кирального типа. С использованием компьютерных вычислений ими найдены все системы с лагранжианами специального вида, допускающие полиномиальные симметрии не выше 5-го порядка. Для большинства таких систем ими также построены представления Лакса.

Целью работы является решение следующих задач:

1. Изучение представлений Лакса систем кирального типа;

2. Исследование дополнительных возможностей конструкции Лезнова-Савельева, позволяющей ассоциировать с симметрическими пространствами интегрируемые системы кирального типа;

3. Построение новых интегрируемых систем кирального типа другими способами.

Методы исследования. Использованы методы теории дифференциальных уравнений и теории алгебр Ли, а также методы дифференциальной геометрии.

Научная новизна и основные результаты. Основные результаты, которые выносятся на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены условия, необходимые для того, чтобы система дифференциальных уравнений кирального типа допускала представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли;

2. Найдена модификация конструкции Лезнова-Савельева, позволяющая ассоциировать с симметрическими пространствами $G/(H_1 \times H_2 \times ... \times H_k)$ новые интегрируемые лагранжевы системы;

3. Построена четырехкомпонентная система, которая является новым интегрируемым обобщением уравнения sin-Gordon.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, связанных с интегрируемыми системами дифференциальных уравнений, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов.

Апробация. Результаты диссертационной работы были

[13] Demskoi D.K., Meshkov A.G. New integrable string-like fields in 1+1 dimensions // Proc. Second Int. Conf. Quantum Field Theory and Gravity, July 28 – August 2, 1997. Tomsk, Russia. Tomsk Pedagogical University, Tomsk. – 1998. – P. 282 – 285. См. также ссылку 2

представлены на Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения"(Казань, 2003, 2005); на Международной конференции БГЛ-4(Бояи-Гаусс-Лобачевский) (Нижний Новгород, 2004); на X междисциплинарной научной конференции "Нелинейный мир"(Нижний Новгород, 2005); на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006); на Международной научной конференции "Современные методы физико-математических наук"(Орел, 2006).

По теме диссертации были сделаны доклады на семинаре по геометрии и топологии кафедры геометрии и высшей алгебры Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ) (рук. проф. Е.И. Яковлев и доц. Н.И. Жукова), на семинаре кафедры математики Волжской государственной академии водного транспорта (рук. проф. В.Н. Белых), на объединенном семинаре кафедры математической физики и кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ (рук. проф. В.И. Сумин и проф. М.В. Долов), на семинаре кафедры математики радиофизического ф-та ННГУ (рук. проф. Г.А. Уткин), на семинаре по дифференциальным уравнениям математической физики в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН (рук. проф. Л.А. Калякин и проф. В.Ю. Новокшенов).

Публикации и вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах.

В совместной статье [1] теоремы 1 и 2 доказаны А.В. Баландиным, теорема 3 доказана Г.В. Потеминым. Автору диссертации принадлежат вычисления законов сохранения, которые включены в параграф 3.1 диссертации.

В совместных статьях [2],[7],[8],[10] научному руководителю А.В. Баландину принадлежит постановка задач и общее руководство работой. Все теоремы и их доказательства получены автором диссертации.

Работы [2],[6],[8] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации материалов диссертаций до 1 января 2007 г.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 73 наименования. Общий объем диссертации составляет 120 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновываются актуальность темы диссертации и ее научная новизна, определяются цели и задачи исследования, приводится краткое содержание диссертации.

В **первой главе** сформулированы условия, необходимые для того, чтобы система кирального типа допускала представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли.

Системами *кирального типа*[14] называются системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$U^{\alpha}_{xy} + G^{\alpha}_{\beta\gamma} U^{\beta}_{x} U^{\gamma}_{y} + Q^{\alpha} = 0, \tag{S}$$

где x, y — независимые переменные; $G^{\alpha}_{\beta\gamma}, Q^{\alpha}$ — гладкие функции от $U^1, ..., U^n$; индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n. Все функции и многообразия в работе предполагаются достаточно гладкими.

Непосредственная проверка показывает, что любая невырожденная замена $V^{\alpha} = V^{\alpha}(U^{\beta})$ в системе (S) приводит к системе того же вида, причем функции $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ изменяются по закону преобразования коэффициентов аффинной связности, а Q^{α} — как координаты векторного поля. Таким образом, можно считать, что система (S) определяет аффинную связность и векторное поле на некотором многообразии V^n с локальной системой координат (U^{α}).

Связность на многообразии V^n, которая в локальной системе координат $(U^1, ..., U^n)$ задается коэффициентами $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$, будем называть связностью, *ассоциированной с системой* (S).

Говорят, что система (S) допускает представление Лакса со значениями в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, если существуют функции A, B со значениями в $\mathfrak{g}$, зависящие от x, y, функций $U^1, ..., U^n$, их частных производных и некоторого параметра λ, такие, что условие

$$A_y - B_x = [B, A] \tag{1}$$

эквивалентно системе (S). Заметим, что (1) есть условие совместности системы линейных уравнений

$$\overline{\phi}_x = A\overline{\phi},$$

[14] Мешков А.Г. К симметрии двумерных скалярных полей кирального типа. – Препр. No. 28. – Томск: Изд-во Томского научного центра СО АН СССР., 1991. – 22с.

$$\overline{\phi}_y = B\overline{\phi}.$$

В диссертации изучаются представления Лакса только со значениями в полупростой алгебре Ли, поскольку именно такие представления оказываются полезными для решения нелинейных дифференциальных уравнений методом обратной задачи.[15]

Во втором параграфе первой главы приводится несколько эквивалентных определений представления Лакса. Чтобы сформулировать полученные результаты, удобно использовать следующее

Определение 1.7 Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $e_1, ..., e_r$ — базис в $\mathfrak{g}$ и $\overline{C}^a_{bc}$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ относительно данного базиса (индексы a, b, c принимают значения от 1 до $r = dim\mathfrak{g}$). Будем говорить, что система (S) допускает *представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли* $\mathfrak{g}$, если существуют функции A^a, B^a, зависящие от x, y, функций $U^1, ..., U^n$, их частных производных и некоторого параметра λ, такие, что подстановка 1-форм

$$\Theta^a = A^a dx + B^a dy \quad (a = \overline{1, r})$$

в уравнения

$$d\Theta^a = -\frac{1}{2}\overline{C}^a_{bc}\Theta^c \wedge \Theta^b$$

приводит к системе, эквивалентной системе (S).

В диссертационной работе ограничимся изучением представлений Лакса, для которых функции A^a и B^a зависят от производных не выше первого порядка. Более того, будем предполагать, что

$$A^a = A^a_\delta U^\delta_x + M^a, \;\; B^a = B^a_\delta U^\delta_y + N^a,$$

где $A^a_\delta, B^a_\delta, M^a, N^a$ — гладкие функции от $U^1, ..., U^n$ и некоторого параметра λ. Это ограничение объясняется тем, что все известные автору представления Лакса имеют такой вид.

Представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ для системы (S) будем называть *расширенным представлением,* если $dim\mathfrak{g} \geq n$ и $rang||A^a_\delta - B^a_\delta|| \geq n$. В работе доказано, что если система допускает представление Лакса со значениями в некоторой полупростой алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ над $\mathbb{R}$, то всегда можно построить расширенное

[15] См., например, Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.:Наука. Главная редакция физ.-мат. лит, 1980 – 320с.

представление Лакса, выбирая в качестве $\mathfrak{g}$ прямое произведение конечного числа экземпляров алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Пусть система (S) допускает представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим

$$S^a_\delta = \frac{1}{2}(A^a_\delta - B^a_\delta).$$

Для любого симметричного полилинейного отображения

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}}_{q} \to \mathbb{R}$$

определим тензорное поле $F_{\delta_1 ... \delta_q}$ на V^n при помощи равенства

$$F_{\delta_1 ... \delta_q} = f(S_{\delta_1}, ..., S_{\delta_q}), \tag{2}$$

где S_{δ_i} — вектор с координатами $S^a_{\delta_i}$ $(i = \overline{1, q})$, индексы δ_i принимают значения от 1 до n. Заметим, что S_{δ_i} $(i = \overline{1, q})$ линейно независимы, если представление Лакса является расширенным.

Основными результатами первой главы являются теорема 1.1 [10] и теорема 1.2 ([7],[10]).

Теорема 1.1 *Пусть система* (S) *допускает представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли* $\mathfrak{g}$.

Тогда тензор, определенный равенством (2)*, удовлетворяет условию*

$$\nabla_{(\beta} F_{\delta_1 ... \delta_q)} = 0, \tag{3}$$

т.е. является тензором Киллинга ранга q*, если отображение* f *Ad-инвариантно. Здесь* $\nabla_\beta F_{\delta_1 ... \delta_q}$ *— ковариантная производная тензора* $F_{\delta_1 ... \delta_q}$ *относительно связности на* V^n*, определенной коэффициентами* $G^\alpha_{\beta\gamma}$.

Заметим, что условие (3) совпадает с условием существования полиномиального интеграла геодезических на пространстве V^n аффинной связности, ассоциированной с системой.

В общем случае тензор, определенный равенством (2), может оказаться вырожденным и даже нулевым. В третьем параграфе первой главы показано, что если алгебра $\mathfrak{g}$ компактна, то, используя расширенное представление Лакса, можно определить положительно определенный тензор Киллинга ранга 2. Кроме того, этот тензор удовлетворяет некоторому дополнительному условию, если существуют коэффициенты Q^α системы (S), отличные от нуля.

Таким образом, получены следующие необходимые условия существования представления Лакса со значениями в компактной алгебре Ли для системы (S):

Теорема 1.2 *Пусть система (S) допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли.*

Тогда на пространстве V^n аффинной связности, ассоциированной с системой, существует поле положительно определенного тензора Киллинга $F_{\alpha\beta}$ ранга 2, удовлетворяющего условию

$$F_{\alpha[\beta,\gamma]}Q^\alpha + F_{\alpha[\beta}Q^\alpha_{,\gamma]} = 0.$$

Здесь и далее запятая в индексах обозначает частную производную по U^γ, т.е. $Q^\alpha_{,\gamma} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial U^\gamma}$.

Во **второй главе** исследуются представления Лакса систем уравнений киральных полей со значениями в пространствах аффинной связности.

Системой уравнений киральных полей со значениями в пространстве аффинной связности V^n называется система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma}U^\beta_x U^\gamma_y = 0,$$

где x, y — независимые переменные, $G^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты аффинной связности пространства V^n в локальной системе координат $U^1, ..., U^n$, индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n.

Хорошо известно, что для ряда пространств аффинной связности уравнения киральных полей являются интегрируемыми системами. Так, например, интегрируемыми являются уравнения киральных полей со значениями в симметрических пространствах, уравнения главных киральных полей и модифицированные уравнения главных киральных полей.[4,7]

Во второй главе показано, что, следуя работе[16], можно получить представление Лакса модифицированных уравнений главных киральных полей, отличное от указанного в работе[4]. В четвертом параграфе второй главы при помощи этого представления Лакса для

[16] Баландин А.В. Представление Лакса уравнений киральных полей.// Вестник ННГУ, сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. – 1998 г. – Т 19, вып. 2. – С. 118–120.

систем модифицированных уравнений главных киральных полей со значениями в группе $SO(3)$ построены бесконечные серии законов сохранения.

В **третьей главе** предложена модификация конструкции Лезнова-Савельева, позволяющая ассоциировать с симметрическими пространствами вида $G/(H_1 \times H_2 \times ... \times H_k)$ новые интегрируемые системы кирального типа. Построены примеры таких систем, ассоциированных с симметрическими пространствами $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$ и $G_2/(SO(3) \times SO(3))$.

Следуя работе[17], будем искать представление Лакса в следующем виде.

Пусть G/H — локально симметрическое пространство, структурные уравнения которого имеют вид

$$d\omega^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma}\theta^{\gamma} \wedge \omega^{\gamma'}, \tag{4}$$

$$d\theta^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} + R^{\alpha}_{\beta'\gamma'}\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}. \tag{5}$$

Здесь индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n, индексы α', β', γ' изменяются от $n + 1$ до r. Положим

$$\omega^{\alpha'} = \lambda M^{\alpha'} dx + \frac{1}{\lambda} N^{\alpha'} dy, \tag{6}$$

$$\theta^{\alpha} = T_{1\beta}^{\alpha} U_x^{\beta} dx + T_{2\beta}^{\alpha} U_y^{\beta} dy, \tag{7}$$

где $M^{\alpha'}, N^{\alpha'}, T_{1\beta}^{\alpha}, T_{2\beta}^{\alpha}$ — гладкие функции от $U^1, ..., U^n$, удовлетворяющие условиям

$$T_{i[\beta,\gamma]}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\mu\nu} T_{i\beta}^{\mu} T_{i\gamma}^{\nu} \ (i = 1, 2), \tag{8}$$

$$det\|T_{1\beta}^{\alpha} - T_{2\beta}^{\alpha}\| \neq 0, \tag{9}$$

$$M^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma} T_{2\delta}^{\gamma} M^{\beta'}, \quad N^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma} T_{1\delta}^{\gamma} N^{\beta'}. \tag{10}$$

Тогда равенства (4)-(7) определяют представление Лакса системы (S), для которой коэффициенты $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и Q^{α} имеют вид

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tilde{P}^{\alpha}_{\delta}[P^{\delta}_{(\beta,\gamma)} + 2C^{\delta}_{\varphi\psi} S^{\varphi}_{\beta} S^{\psi}_{\gamma} - 2C^{\delta}_{\varphi\psi} P^{\varphi}_{(\gamma} S^{\psi}_{\beta)}], \tag{11}$$

[17] Баландин А.В. Представление Лакса обобщенной цепочки Тода.// Вестник ННГУ, сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. – 1999 г. – Т 20, вып. 1. – С. 83–90.

$$Q^\alpha = -\tilde{P}^\alpha_\delta R^\delta_{\beta'\gamma'} N^{\gamma'} M^{\beta'}, \qquad (12)$$

где $S^\alpha_\beta = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\ \alpha} + T_{2\beta}^{\ \alpha})$, $P^\alpha_\beta = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\ \alpha} - T_{2\beta}^{\ \alpha})$ и $\tilde{P}$ — матрица, обратная к P.

При таком подходе для построения интегрируемых систем кирального типа необходимо указать набор функций $T_{i\beta}^{\ \alpha}, M^{\alpha'}, N^{\alpha'}$, удовлетворяющих условиям (8)-(10). Желательно также, чтобы полученная интегрируемая система являлась лагранжевой. Одно из возможных решений этой задачи можно получить, полагая $T_{1\beta}^{\ \alpha} = T^\alpha_\beta$, $T_{2\beta}^{\ \alpha} = 0$ (или $T_{1\beta}^{\ \alpha} = 0$, $T_{2\beta}^{\ \alpha} = T^\alpha_\beta$), где коэффициенты T^α_β определяются базисом левоинвариантных форм $\Phi^\alpha = T^\alpha_\beta dU^\beta$ на группе H, причем $d\Phi^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta$. В этом случае равенства (4)-(7) определяют представление Лакса системы (S), коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ которой являются коэффициентами левой (или правой) плоской канонической связности на группе Ли H, а Q^α имеют вид (12).

Представление Лакса для таких систем в 1983 году было получено А.Н. Лезновым и М.В. Савельевым[9] в инвариантном виде, из которого переходом к локальным координатам можно получить представление Лакса, приведенное выше. А.Н. Лезновым и М.В. Савельевым также показано, что такие системы являются лагранжевыми в случае полупростой группы H.

Во втором параграфе третьей главы для случая, когда $H = H_1 \times ... \times H_p$ — прямое произведение простых групп Ли H_i $(i = \overline{1,p})$, найдены другие решения уравнений (8)-(10) и соответствующие им интегрируемые системы. Этот результат является основным результатом третьей главы и сформулирован в теореме 3.3 ([6],[8],[9]).

Пусть G/H — локально симметрическое пространство, $H = H_1 \times ... \times H_p$, где $H_1, ..., H_p$ — простые группы Ли и (U^α) — локальная система координат на H. Разделим координаты (U^α) на группы $(U^{\alpha_1}, U^{\alpha_2}, ..., U^{\alpha_p})$ в соответствии с разложением группы H и перепишем структурные уравнения симметрического пространства G/H в виде

$$d\omega^{\beta'} = D^{\beta'}_{\gamma'\alpha_i}\theta^{\alpha_i} \wedge \omega^{\gamma'},$$
$$d\theta^{\alpha_i} = C^{\alpha_i}_{\beta_i\gamma_i}\theta^{\gamma_i} \wedge \theta^{\beta_i} + R^{\alpha_i}_{\beta'\gamma'}\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}, \ \ (i = \overline{1,p}).$$

Введем следующие обозначения:

1) $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_\mathfrak{i}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{1} \bigoplus ... \bigoplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ — алгебры Ли групп Ли G, H_i, H соответственно $(i = 1, p)$;
2) $C^{\alpha_i}_{\beta_i\gamma_i}$ — структурные константы группы H_i относительно базиса левоинвариантных дифференциальных форм $\Phi^{\alpha_i} = T^{\alpha_i}_{\beta_i} dU^{\beta_i}$.
3) $h^0_{\alpha_i\beta_i}$ — коэффициенты формы Киллинга $h^0_i(\cdot,\cdot)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}_\mathfrak{i}$, заданные относительно базиса, двойственного к базису Φ^{α_i}.
4)$g^0(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
5) S_i — константы, удовлетворяющие условию

$$h^0_i(\cdot,\cdot) = S_i g^0(\cdot,\cdot)_{|\mathfrak{h}_\mathfrak{i}} \quad (i = \overline{1,p}).$$

Такие константы существуют, если алгебра $\mathfrak{g}$ полупростая.
6) $h_{\alpha_i\beta_i}$ — метрика Киллинга группы H_i относительно локальных координат U^{α_i}, т.е.

$$h_{\alpha_i\beta_i} = h^0_{\gamma_i\delta_i} T^{\gamma_i}_{\alpha_i} T^{\delta_i}_{\beta_i}, \quad (i = \overline{1,p}).$$

7) $\sigma_i = a_{\alpha_i\beta_i} dU^{\alpha_i} \wedge dU^{\beta_i}$ $(i = \overline{1,p})$ — 2-формы, удовлетворяющие условию

$$d\sigma_i = \frac{2}{3} h^0_{\alpha_i\delta_i} C^{\delta_i}_{\beta_i\gamma_i} \Phi^{\alpha_i} \wedge \Phi^{\gamma_i} \wedge \Phi^{\beta_i}.$$

Такие формы существуют, по крайней мере локально, так как 3-формы $\Psi_i = \frac{2}{3} h^0_{\alpha_i\delta_i} C^{\delta_i}_{\beta_i\gamma_i} \Phi^{\alpha_i} \wedge \Phi^{\gamma_i} \wedge \Phi^{\beta_i}$ замкнуты в силу тождества Якоби для структурных констант.

Теорема 3.3 *Пусть G/H — локально симметрическое пространство, G — полупростая группа Ли и $H = H_1 \times ... \times H_p$, где $H_1, ..., H_p$ — простые группы Ли.*

Тогда системы уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжианов

$$L = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{S_i} [h_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i}) + \varepsilon_i a_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i})] U^{\alpha_i}_x U^{\beta_i}_y + 4 g^0_{\beta'\gamma'} M^{\beta'} N^{\gamma'}$$

допускают представление Лакса. Здесь $\varepsilon_i = \pm 1$; функции $M^{\beta'}, N^{\gamma'}$ удовлетворяют условиям

$$M^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1 - \varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} M^{\delta'}, \quad (i = \overline{1,p}),$$

$$N^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1 + \varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} N^{\delta'}, \quad (i = \overline{1,p}).$$

В первом параграфе **четвертой главы** найдено представление Лакса для четырехкомпонентной системы, которая является новым интегрируемым обобщением уравнения sin-Gordon ([2],[4],[8]).

Пусть системы уравнений Эйлера для лагранжианов

$$L_i = g_{\alpha_i\beta_i}(U^{\delta_i})U_x^{\alpha_i}U_y^{\beta_i} + Q_i(U^{\delta_i}) \ \ (i=1,2)$$

допускают представление Лакса со значениями в алгебрах Ли $\mathfrak{h}_i$ групп Ли H_i соответственно. Пусть также существует локально симметрическое пространство $G/(H_1 \times H_2)$. Оказывается, что в ряде случаев, используя представление Лакса для этих систем, можно построить представление Лакса для системы с лагранжианом

$$L = \sum_{i=1}^{2} S_i g_{\alpha_i\beta_i}(U^{\delta_i})U_x^{\alpha_i}U_y^{\beta_i} + Q,$$

где S_i — некоторые константы и $Q = Q(U^{\delta_1}, U^{\delta_2})$ — гладкая функция такая, что система уравнений Эйлера для лагранжиана L не распадается на независимые системы.

Таким способом в диссертационной работе построено представление Лакса для системы

$$\begin{aligned}
V^1_{xy} + \frac{1}{\sin V^2}V^1_y V^2_x + \frac{1}{\sin V^2}V^2_y V^1_x &= 0,\\
V^2_{xy} - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2}V^1_y V^1_x + k\sin V^2 \cos V^4 &= 0,\\
V^3_{xy} + \frac{1}{\sin V^4}V^3_y V^4_x + \frac{1}{\sin V^4}V^4_y V^3_x &= 0,\\
V^4_{xy} - \frac{\sin V^4}{(1+\cos V^4)^2}V^3_y V^3_x + k\cos V^2 \sin V^4 &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где k — произвольная константа. Данную систему можно рассматривать как новое интегрируемое обобщение уравнения sin-Gordon, т.к. подстановка $V^3 = V^4 = 0$ приводит к системе Лунда-Редже. Далее, полагая $V^1 = 0,\ V^2 = V$, получим уравнение sin-Gordon.

Система (13) явлется системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V^1_x V^1_y tg^2\frac{V^2}{2} + V^2_x V^2_y + V^3_x V^3_y tg^2\frac{V^4}{2} + V^4_x V^4_y + 2k\cos V^2 \cos V^4.$$

В первом параграфе четвертой главы показано, что систему (13) можно получить при помощи редукции и преобразования Бэклунда из системы Лезнова-Савельева, ассоциированной с симметрическим пространством $SO(6)/(SO(3)\times SO(3))$.

Во втором параграфе четвертой главы построены новые интегрируемые системы, ассоциированные с симметрическими пространствами вида $SO(p+3)/(SO(p)\times SO(3))$ и $SO(p+2)/(SO(p)\times SO(2))$.

Теорема 4.1 *Пусть* (U^{α_1}) *— локальная система координат на группе* $SO(p), p\geq 3$. *Определим матрицы* $h_{\alpha_1\beta_1}, a_{\alpha_1\beta_1}$ *так же, как в теореме 3.2 для группы* $H_1 = SO(p)$.

Тогда система уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$L = [h_{\alpha_1\beta_1}(U^{\delta_1}) + a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\delta_1})]U^{\alpha_1}_x U^{\beta_1}_y - 2(p-2)[V^1_x V^1_y tg^2\frac{V^2}{2} + V^2_x V^2_y] -$$

$$-4(p-2)m_b n^b \cos V^2$$

допускает представление Лакса. Здесь индексы a, b *принимают значения от 1 до p; индексы* a', b' *изменяются от* $p+1$ *до* $p+3$*;* m^b *— произвольные константы, а функции* $n^b = n^b(U^\delta)$ *удовлетворяют условиям*

$$n^b_{,\beta_1} = H^b_{c\gamma_1} T^{\gamma_1}_{\beta_1} n^c,$$

где коэффициенты $H^b_{c\gamma_1} = -H^c_{b\gamma_1}$ *определяются вложением алгебры Ли* $\mathfrak{so}(p)$ *в* $\mathfrak{gl}(p)$.

Теорема 4.2 *Пусть* (U^{α_1}) *— локальная система координат на группе* $SO(p), p\geq 3,$. *Определим матрицы* $h_{\alpha_1\beta_1}, a_{\alpha_1\beta_1}$ *так же, как в теореме 3.2 для группы* $H_1 = SO(p)$.

Тогда система уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$\begin{aligned} L =& [h_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1}) + a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1})]U^{\alpha_1}_x U^{\beta_1}_y - 2(p-2)k^2 V_x V_y + \\ &+ 4(p-2)M^b_{b'} N^{b'}_b \end{aligned}$$

допускает представление Лакса. Здесь индексы a, b изменяются от 1 до p, индексы a' и b' принимают значения $p+1, p+2$; k — произвольная константа; $M^b_{b'} = -M^{b'}_b$, $N^b_{b'} = -N^{b'}_b$ и

$$M^a_{p+1} = m^a_1 \cos kV + m^a_2 \sin kV, \quad M^a_{p+2} = -m^a_1 \sin kV + m^a_2 \cos kV,$$

где m^a_1, m^a_2 — произвольные константы. Функции $N^a_{a'} = N^a_{a'}(U^{\delta_1})$ являются решениями системы уравнений

$$N^a_{a',\beta_1} = H^a_{b\gamma_1} T^{\gamma_1}_{\beta_1} N^b_{a'},$$

где коэффициенты $H^a_{b\gamma_1} = -H^b_{a\gamma_1}$ определяются вложением алгебры Ли $\mathfrak{so}(p)$ в $\mathfrak{gl}(p)$.

Во втором параграфе четвертой главы построено представление Лакса для системы, соответствующей случаю $p = 3$ в теореме 4.2. Лагранжиан данной системы имеет вид

$$L = \sum_{\alpha_1=1}^{3} U^{\alpha_1}_x U^{\alpha_1}_y + V_x V_y + 2\cos U^3 U^1_y U^2_x + 2l \cos U^3 \cos V.$$

Показано, что эта система допускает редукцию и преобразование Бэклунда, которые приводят к системе уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V^1_x V^1_y tg^2 \frac{V^2}{2} + V^2_x V^2_y + V_x V_y + 2l \cos V^2 \cos V.$$

Для последней системы в диссертационной работе также построено представление Лакса. Заметим, что она совпадает с одной из интегрируемых систем, найденных А.Г. Мешковым и Д.К. Демским.[13]

Основные публикации по теме диссертации

1. Balandin A. V., Pakhareva(Кащеева) O. N., Potyomin G. V. Lax representation of the chiral-type field equations.// Phys. Lett. A. – 2001. – V. 283, No 3-4. – P. 168–176.

2. Баландин А.В., Пахарева(Кащеева) О.Н. Интегрируемые системы кирального типа с приводимыми метриками.// Вестник ННГУ, сер. Математика. – 2004. – Вып. 1(2). – С. 5–17.

3. Пахарева(Кащеева) О.Н. Интегрируемые системы кирального типа с приводимыми метриками.// Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. / Материалы третьей всероссийской молодежной научной школы-конференции (Казань, 1 – 4 декабря 2003 г.) – Казань: Изд-во Казанского математического общества. – 2003. – Т. 21. – С. 180–182.

4. Пахарева(Кащеева) О.Н. Представление Лакса нелинейных сигма-моделей с приводимыми метриками.// Неевклидова геометрия в современной физике и математике – труды международной конференции БГЛ-4 (Бояи-Гаусс-Лобачевский)(Н.Новгород, 7 – 11 сентября 2004 г.) – Н.Новгород-Kiev: ІТФ НАН України, 2004 г. – С. 197–204.

5. Пахарева(Кащеева) О.Н. Уравнения киральных полей со значениями в группах Ли.// Нелинейный Мир. Десятая междисциплинарная научная конференция (Н.Новгород, 27 июня – 2 июля 2005 г.). Тезисы докладов. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2005 г. – С. 106–106.

6. Пахарева(Кащеева) О.Н. Представление Лакса систем кирального типа с приводимыми метриками. //Вестник ННГУ, сер. Математика. – 2005. – Вып. 1(3). – С. 114–122.

7. Баландин А.В., Кащеева О.Н. Необходимые условия существования представления Лакса со значениями в компактных алгебрах Ли.// Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского / Материалы четвертой всероссийской молодежной научной школы-конференции (Казань, 16 – 18 декабря 2005 г.). – Казань: Изд-во Казанского математического общества. – 2005. – Т. 31. – С. 25–27.

8. Balandin A.V., Kashcheeva O.N. Lax representation of WZNW-like systems.//Regular and chaotic dynamics. – 2006. – V. 11, No 4. – P. 435–453.

9. Кащеева О.Н. Интегрируемые системы типа WZNW.// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10 – 15 июля 2006 г.). Тезисы докладов.– Владимир. – 2006 г. – С. 117–119.

10. Баландин А.В., Кащеева О.Н. Необходимые условия интегрируемости систем кирального типа.// Труды Международной научной конференции "Современные методы физико-математических наук"(Орел, 9 – 14 октября 2006 г.). – Орел. – 2006 г. – С. 12–16.