На правах рукописи

КАНАКОВ Олег Игоревич

СТРУКТУРЫ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ

01.04.03 – радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2007

Работа выполнена на кафедре
теории колебаний и автоматического регулирования
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Научный руководитель:

Шалфеев В.Д. – д.ф.-м.н., проф.

Официальные оппоненты:

Потапов А.И. – д.ф.-м.н., проф.
Пономаренко В.П. – д.ф.-м.н., проф.

Ведущая организация:

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

Защита состоится «___» ________________ 2007 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского (603950, Н. Новгород, ГСП-20, пр. Гагарина, 23, корп.__, ауд.____)

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «___»____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета **В.В. Черепенников**
к.ф.-м.н., доц.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Объектом исследования в данной работе являются решетки связанных элементов, каждый из которых описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Известен широкий круг динамических режимов и эффектов, которые могут проявляться в решеточных системах: структурообразование, автоволны, синхронизация колебаний, хаос. Данная работа посвящена исследованию различных режимов динамики, которые характеризуются пространственной локализацией, то есть, отсутствием распространения возмущения по решетке в виде волны. А именно, рассматриваются локализованные периодические колебательные решения в решетках нелинейных консервативных осцилляторов; периодические решения, локализованные в пространстве мод решеточных систем; стационарные структуры в решетках диссипативных бистабильных элементов.

Интерес к нелинейным решеточным моделям обусловлен большим разнообразием реальных систем, описываемых этими моделями. В качестве примера таких систем можно привести кристаллические решетки, антиферромагнитные материалы, биологические ткани, а также многие искусственные системы, имеющие решеточную структуру: решетки связанных волноводов, микромеханических осцилляторов, джозефсоновских контактов, специальные электронные схемы, энергосети.

Кроме того, такие модели представляют интерес с точки зрения фундаментальных проблем статистической физики — проблем описания процессов переноса энергии и установления теплового равновесия в системах из большого числа частиц на микроскопическом уровне исходя непосредственно из уравнений движения.

В рамках проблемы переноса энергии в решеточных системах представляют интерес долгоживущие колебательные возбуждения, локализованные в пространстве — *дискретные бризеры*, впервые обнаруженные в численных экспериментах (А.А. Овчинников, A.J. Sievers, S. Takeno, K. Kisoda). Позже было получено строгое доказательство существования периодических (а значит, имеющих бесконечное время жизни) локализованных решений (R.S. MacKay, S. Aubry). Дискретные бризеры характеризуются экспоненциальным спаданием амплитуды колебаний с удалением от центральной частицы, совершающей колебания с максимальной амплитудой.

В отличие от известных ранее бризеров в системах с непрерывной пространственной координатой (в частности, в уравнении синус-Гордона), которые теряют локализацию при малом изменении уравнений движения, дискретные бризеры существуют в гамильтоновых решеточных системах весьма общего вида. В этом смысле дискретные бризеры не являются «редкими» математическими объектами.

Однако, множество дискретных бризеров как точных периодических решений в фазовом пространстве решеточной системы имеет меру нуль, что означает нулевую вероятность реализации такого точного периодического решения в физической системе. Поэтому говорят также о дискретных бризерах в «физическом смысле» как о решениях, характеризующихся пространственной локализацией энергии, имеющей, в отличие от точных периодических решений, большое, но конечное время жизни.

Одним из возможных физических механизмов генерации таких локализованных возбуждений является модуляционная неустойчивость бегущей волны (M. Peyrard и др.). Действие этого механизма было подтверждено в эксперименте с одномерными антиферромагнетиками (M. Sato, A.J. Sievers).

В то же время, в литературе отсутствует систематическое исследование данного механизма. В частности, остаются открытыми вопросы о влиянии энергии исходной волны на процесс генерации дискретных бризеров, об эволюции систем на больших временах после формирования дискретных бризеров, о действии модуляционной неустойчивости в решетках размерности выше единицы. В диссертации эти вопросы исследуются на примере одномерных и двумерных решеток линейно-связанных нелинейных осцилляторов (дискретный аналог модели Клейна-Гордона).

В системах с периодическим потенциалом, где каждая координата определена по модулю 2π и имеет смысл фазы, помимо колебательных дискретных бризеров, возможны также локализованные вращательные решения — *ротобризеры*. Системы такого типа исследуются, например, при моделировании динамики ансамблей связанных джозефсоновских контактов, круговых маятников, электрогенераторов включенных в общую энергосеть.

В ротобризерном решении одна из фаз неограниченно нарастает со временем (элемент совершает вращение), а остальные колеблются с амплитудами, спадающими при удалении от вращающегося элемента. Такие решения были впервые численно получены заданием специальных начальных условий (на одном из элементов задается начальная скорость достаточно большой величины), а также при моделировании системы в равновесии с термостатом (S. Takeno, M. Peyrard). Известно строгое доказательство существования таких решений (J.L. Marin, S. Aubry).

Вопрос о генерации ротобризеров из бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости остается открытым. Кроме того, представляет значительный интерес (в том числе, с точки зрения приложений) вопрос о возможности управления этим процессом с помощью внешнего воздействия. Эти вопросы исследуются в диссертации на примере одномерных консервативных и диссипативных цепочек с косинусоидальными потенциалами парциального осциллятора и взаимодействия (модель Такено-Пейрара).

Проблеме моделирования процесса установления режима равнораспределения энергии по степеням свободы системы непосредственно на основе уравнений движения был посвящен первый в истории численный эксперимент на решеточной модели — работа Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама (ФПУ). В работе ФПУ был продемонстрирован эффект *локализации энергии* в пространстве мод нелинейной системы, а также квазирегулярный характер динамики системы (*возвращаемость траектории* в окрестность начальных условий на временах, существенно меньших ожидаемого масштаба времени возвращения Пуанкаре). Эти результаты составляют основу классической проблемы ФПУ.

Со времени опубликования работы ФПУ были получены теоретические результаты, которые позволили качественно и количественно объяснить многие аспекты проблемы ФПУ.

В работе N.J. Zabusky и M.D. Kruskal в рамках непрерывного приближения (уравнение Кортевега – де Фриса) было получено решение в виде набора солитонов, что дало оценку времени возвращений, хорошо согласующуюся с результатом численного расчета ФПУ. Однако, факт локализации энергии в низших модах принимается как постулат при переходе к непрерывному пределу, а значит, в рамках данного приближения не объясняется.

Ф.М. Израилев и Б.В. Чириков указали на связь равнораспределения энергии с явлением динамического хаоса и обнаружили характерное значение энергии системы, от соотношения с которым зависит скорость процесса равнораспределения энергии (*«порог равнораспределения»*), а также получили первую аналитическую оценку этого порога. Позже были предложены другие аналитические и численные оценки характерных значений энергии, в том числе, *порог «слабого хаоса»* – хаотического режима, в котором, однако, сохраняется локализация энергии в пространстве мод на больших временах (J. De Luca, A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman).

Вышеперечисленные работы по проблеме ФПУ посвящены исследованию сложных непериодических и хаотических решений. В силу сложности этих режимов, в частности, наличия экспоненциально больших временных масштабов[1] (A. Giorgilli, L. Galgani L. Berchialla, S. Paleari), проблема локализации энергии в пространстве мод решеточных систем до настоящего времени полностью не решена (см., например, специальный выпуск "The Fermi-Pasta-Ulam problem – The first fifty years" журнала *CHAOS*, 2005, vol. 15, No. 1).

В то же время, как показывает практика исследования дискретных бризеров и локализации энергии в нелинейных решетках, свойства *сложных режимов*, характеризующихся локализацией энергии на *больших* временах, могут в значительной степени быть поняты и описаны с помощью исследования имеющихся в фазовом пространстве *периодических орбит*, которые характеризуются локализацией энергии на *бесконечных* временах. При этом периодические решения допускают практически исчерпывающее исследование с помощью существующих методов нелинейной динамики (в частности, метода секущей Пуанкаре, асимптотических методов).

Оказывается, аналогичный подход может быть применен к исследованию проблемы локализации энергии в пространстве нормальных мод. Как следует из теоремы, доказанной А.М. Ляпуновым, в окрестности состояния равновесия системы ФПУ из N *частиц для достаточно малых энергий существуют* N *периодических орбит, в линейном пределе переходящих в одномодовые решения. В силу аналогии с дискретными бризерами (периодичность во времени, экспонен-*

[1] например, порядка ~exp($\varepsilon_{th}/\varepsilon$), где ε – средняя плотность энергии, ε_{th} – порог равнораспределения

циальная локализация), такие орбиты были названы q-*бризерами (Иванченко М.В., Канаков О.И., Флах С.). Следует ожидать, что свойства этих орбит позволяют охарактеризовать также и поведение других (в том числе, сложных) решений в их окрестности. Однако, свойства таких орбит в модели ФПУ в литературе не исследовались. В то же время, свойства ляпуновских орбит в нелинейных решеточных системах представляют и самостоятельный интерес как важные характеристики нелинейной динамики этих систем, вне непосредственного контекста проблемы ФПУ.*

С точки зрения возможных приложений (синхронизация и аварии в энергосетях, задачи параллельной обработки изображений), представляет интерес проблема управления образованием структур в решеточных системах. Один из частных случаев этой проблемы (задача управления образованием ротобризеров) упоминался выше.

Проблема управления структурообразованием может также быть рассмотрена на упрощенной модели в виде решетки связанных бистабильных элементов с двухъямным потенциалом и диссипацией. Исследование таких систем в литературе в основном ограничивалось рассмотрением случая кусочно-заданной нелинейности определенного вида (L.O. Chua, J.A. Nossek и др.). В частности, известен метод, позволяющий найти все устойчивые состояния равновесия такой системы, а также спроектировать систему, имеющую заданные состояния равновесия. Результаты же для систем с нелинейностью общего вида ограничиваются рассмотрением случая линейной диффузионной связи (В.И. Некоркин, В.Б. Казанцев и др.).

Таким образом, актуальна проблема исследования возможностей управления структурообразованием в обобщенной модели решетки бистабильных элементов с двухъямным потенциалом.

Исходя из приведенного обзора актуальных проблем теории структурообразования и локализации энергии в решеточных системах, были сформулированы цели настоящей работы.

<u>Цели диссертационной работы:</u>

- Исследование механизма локализации энергии и генерации дискретных бризеров и ротобризеров из бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости в решетках осцилляторов с точки зрения проблемы реализуемости дискретных бризеров в физических процессах

- Отыскание q-бризеров и исследование их свойств с точки зрения проблемы локализации энергии в пространстве нормальных мод нелинейных решеточных систем
- Исследование возможности управления процессом образования структур в моделях решеток бистабильных элементов, интерпретация результатов с точки зрения задач обработки изображений

Научная новизна

Проведено систематическое исследование явления генерации локализованных возбуждений (дискретных бризеров) в дискретных нелинейных системах из слабозашумленной бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости на примере дискретного аналога уравнения Клейна-Гордона в одномерном и двумерном случаях. Двумерный случай рассмотрен впервые. В одномерном случае исследован характер зависимости процесса генерации дискретных бризеров от величины средней энергии в системе. Исследована эволюция системы на временах, существенно (на 2 порядка) превышающих имеющиеся в литературе результаты.

Исследован процесс генерации ротобризеров вследствие модуляционной неустойчивости в одномерной модели Такено-Пейрара без диссипации, а также с диссипацией и с внешним моментом. Продемонстрирована возможность управления этим процессом за счет неоднородного распределения величины внешнего момента. Построена конструктивная математическая схема построения q-бризеров – периодических локализованных решений в пространстве нормальных мод – методом непрерывного продолжения одномодового решения линейной системы на ненулевые значения параметра нелинейности. На основе этой схемы разработан численный метод отыскания q-бризеров в нелинейных решеточных системах. Этот метод применен к исследованию свойств q-бризеров на примере модели β-ФПУ.

Проведен асимптотический анализ свойств локализации q-бризеров в пространстве нормальных мод и их устойчивости на примере модели β-ФПУ. Исследованы свойства симметрии q-бризеров, в частности, показана инвариантность локализационных свойств q-бризеров по отношению к масштабированию размера системы.

Рассмотрена задача управления образованием стационарных структур в решетках бистабильных элементов с недиффузионными связями. Для систем без инерционности получена аналитическая оценка расположения аттракторов и их областей притяжения для двух способов задания нелинейности: (i) неидентичные нелинейности общего вида с ограничением на максимальное отклонение от заданной кусочно-линейной функции; (ii) нелинейность со спадающими ветвями – типичная характеристика частотного дискриминатора.

Для двух частных типов нелинейности (кусочно-линейная функция и функция со спадающими ветвями) в системе, ориентированной на задачу выделения контуров, численно исследован эффект формирования шахматного паттерна как мешающего фактора. Рассмотрены случаи систем без инерционности и с инерционностью.

<u>Положения, выносимые на защиту</u>

1. Модуляционная неустойчивость бегущей волны представляет собой универсальный механизм генерации локализованных возбуждений в нелинейных решеточных системах, что подтверждается проведенными исследованиями процессов генерации дискретных бризеров в одномерных и двумерных дискретных моделях Клейна-Гордона, а также ротобризеров в консервативных и диссипативных моделях Такено-Пейрара.
2. Ляпуновские периодические орбиты нелинейных решеточных систем – q-бризеры, в отличие от сложных непериодических и хаотических решений, допускают практически исчерпывающее исследование, которое проведено в данной работе на примере модели β-ФПУ. Свойства этих орбит позволяют охарактеризовать также и поведение других (в том числе, сложных) решений в их окрестности. А именно, в работе воспроизведены с единых позиций основные качественные и количественные результаты, связанные с проблемой ФПУ (явление локализации в пространстве мод, пороги слабого хаоса и равнораспределения).
3. Установлено, что в решетках нелинейно связанных бистабильных элементов с различными типами нелинейности возможно целенаправленное формирование структур, в частности применительно к задачам обработки изображений. Теоретической основой для такого управления служит проведенный анализ

поглощающих областей в фазовом пространстве системы. Неточность воспроизведения заданной структуры зависит от параметров системы. Проведенные численные исследования позволяют сформулировать рекомендации по минимизации этой неточности на примере решеточной системы, ориентированной на задачу выделения контуров.

Методы исследования и достоверность научных результатов.

При исследовании использовались качественные и асимптотические методы теории колебаний, а также численное моделирование. Достоверность результатов подтверждается согласием результатов аналитических и численных расчетов, а также непротиворечивостью с известными в литературе результатами.

Научная и практическая значимость

Полученные в диссертации результаты представляют интерес с точки зрения фундаментальных проблем переноса и локализации энергии, а также структурообразования в нелинейных решеточных системах. Кроме того, развитая в работе теория может иметь практическое значение для задач, связанных с динамикой решеточных систем: синхронизации и предотвращения аварий в энергосетях, параллельной обработки изображений с помощью специальных решеточных схем, создания микро- и наномеханических систем.

Личный вклад автора. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в выборе направлений исследований и постановке основных задач и обсуждении результатов. Все представленные результаты получены лично автором.

Апробация работы и публикации.

Результаты исследований были представлены на международном семинаре NDMLET06 “Nonlinear Dynamics of Acoustic Modes in Finite Lattices: Localization, Equipartition, Transport” («Нелинейная динамика акустических мод в конечных решетках: локализация, равнораспределение, транспорт») 6 – 8 декабря 2006 г., Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme, Дрезден, Германия, 13-й Международной конференции IEEE по нелинейной динамике электронных систем

“NDES-2005” (г. Потсдам, Германия), конференциях молодых ученых «Нелинейные волновые процессы» в рамках научных школ «Нелинейные волны – 2002, 2004, 2006» (г. Н.Новгород), 12-й Европейской конференции по обработке сигналов “EUSIPCO-2004” (г. Вена), международных симпозиумах “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics” (г. Н. Новгород, 2003, 2005 гг.), международной конференции “Progress in nonlinear science” (г. Н. Новгород, 2001 г.), 2-м и 3-м Международных научно-практических семинарах «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» (г. Н.Новгород, 2002, 2003 гг.), 5-й, 6-й, 7-й и 8-й Научных конференциях по радиофизике (г.Н. Новгород, 2001, 2002, 2003, 2004, гг.), научных школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2000, 2002, 2003» (г. Саратов).

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, а также Института физики сложных систем Общества Макса Планка (г. Дрезден, Германия).

По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, в том числе 5 статей в рецензируемых физических журналах, рекомендованных ВАК, 1 статья в международном физическом журнале, 11 публикаций в сборниках трудов конференций, 1 тезисы доклада.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы. Диссертация содержит 129 страниц текста (включая оглавление и 23 рисунка) и список литературы из 93 наименований на 11 страницах. Общий объем работы 140 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, раскрыта научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Приводятся сведения об апробации результатов.

В **первой главе** рассматривается проблема генерации локализованных возбуждений в решетках связанных нелинейных осцилляторов из гармонической волны вследствие модуляционной неустойчивости.

Во вводной части (**раздел 1.1**) дается определение дискретного бризера и излагаются основные сведения о дискретных бризерах как точных решениях в дискретных нелинейных системах. Приводятся условия существования дискретных бризеров. Указывается на принципиальные отличия дискретных бризеров от бризеров в непрерывных моделях, в частности, в уравнении синус-Гордона. Вводится в рассмотрение дискретное уравнение Клейна-Гордона

$$\ddot{x}_n = -V'(x_n) + \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}),$$

где x_n – координата n-й частицы, $V(x)=x^2/2+\alpha x^3/3+\beta x^4/4$ – потенциальная функция, κ – параметр связи. С помощью простейшего одночастичного приближения оцениваются основные характеристики (частотно-энергетическая зависимость, показатель пространственной локализации) дискретных бризеров в такой модели.

В **разделе 1.2** описываются проведенные численные эксперименты по генерации дискретных бризеров и ротобризеров вследствие модуляционной неустойчивости гармонической волны. Численные эксперименты проводятся в одномерной и двумерной решетках Клейна-Гордона с периодическими граничными условиями. Начальные условия задаются в виде слабозашумленной бегущей гармонической волны, волновое число которой $k=3\pi/4$ выбирается в соответствии с условием модуляционной неустойчивости, а частота – в соответствии с линейным дисперсионным соотношением и с учетом первой поправки к частоте волны по амплитуде. Аддитивная случайная добавка задается в виде равномерно распределенных некоррелированных возмущений по всем координатам и скоростям.

В одномерном случае воспроизводится известный сценарий генерации дискретных бризеров. Затем проводится исследование зависимости этого процесса от средней плотности энергии в системе, а также моделирование эволюции системы после формирования дискретных бризеров на больших временах для большого количества реализаций случайной добавки в начальных условиях. Показано, что с уменьшением средней плотности энергии сценарий формирования дискретных бризеров сохраняет силу, однако время формирования дискретного бризера быстро нарастает. Максимальное время жизни дискретного бризера, сформировавшегося вследствие модуляционной неустойчивости бегущей волны, оценить не удалось, поскольку оно превышает вычислительно достижимые времена.

По аналогии с дискретными бризерами, исследуется процесс генерации ротобризеров в модели Такено-Пейрара

$$\ddot{x}_n + \lambda\dot{x}_n = -\sin(x_n) + \kappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})) + \gamma_n.$$

Рассматриваются случаи: консервативный (λ=0, γ_n=0), диссипативный пространственно-однородный ($\lambda\neq0$, $\gamma_n=\gamma\neq0$), а также диссипативный пространственно-неоднородный (на выбранных элементах задается значение γ_n, большее чем в остальных элементах). Продемонстрировано возникновение ротобризеров со случайным (в консервативной модели) и определенным (в диссипативной модели) направлением вращения. Показана возможность целенаправленного формирования ротобризеров в диссипативной модели с неоднородным внешним воздействием.

Во **<u>второй главе</u>** исследуются свойства q-бризеров – ляпуновских периодических орбит, локализованных в пространстве нормальных мод нелинейных решеточных систем – на примере модели β-ФПУ. Результаты интерпретируются с точки зрения проблемы ФПУ о перераспределении энергии между модами.

Во вводной части (**раздел 2.1**) приводятся уравнения движения для модели β-ФПУ в прямом пространстве

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3]$$

и в пространстве нормальных мод

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = \frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{i,j,m=1}^{N} C_{qijm} Q_i Q_j Q_m ,$$

излагается суть проблемы ФПУ и вводится понятие q-бризера. Приводится конструктивная схема построения q-бризера методом непрерывного продолжения одномодового решения линейной системы, указываются условия применимости этой схемы.

В **разделе 2.2** обсуждаются свойства симметрии q-бризеров, вытекающие из свойств симметрии уравнений движения. Показано, что q-бризерные решения обратимы во времени при соответствующем выборе начала отсчета времени, а также при определенных условиях сохраняют симметрию пространственной четности или нечетности, имеющуюся у продолжаемой линейной моды. Приведены условия инвариантности решений относительно масштабирования числа частиц в системе для различных типов граничных условий.

В **разделе 2.3** приводится структура семейства численных методов отыскания q-бризеров на основе метода непрерывного продолжения, описанного в разделе 2.1. Выбирается продолжаемое одномодовое решение линейной системы. Задается секущая Пуанкаре, пересекающая траекторию продолжаемого решения без касания. Параметр нелинейности увеличивается шагами выбранной величины. На каждом шаге периодическая орбита отыскивается как неподвижная точка отображения Пуанкаре, при этом в качестве начального приближения задается результат, полученный на предыдущем шаге по нелинейности. Поиск неподвижной точки внутри секущей Пуанкаре ограничивается подмногообразием, заданным условием постоянства энергии и условиями симметрии, полученными в разделе 2.2. Такое ограничение обеспечивает единственность решения и сокращает число неизвестных при поиске.

В **разделе 2.4** исследуются свойства локализации q-бризеров в пространстве мод системы Ферми-Паста-Улама с помощью асимптотического разложения по малому параметру нелинейности. Для q-бризеров в окрестности высокочастотного и низкочастотного краев линейного спектра показан экспоненциальный характер спадания энергии нормальных мод в q-бризере при удалении от главной (продолжаемой) моды:

$$E_{(2n+1)q_0} \approx \lambda^n E_{q_0}, \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 {q_0}^2},$$

где q_0 – номер главной моды.

Показано согласие асимптотических результатов с численными, полученными с помощью метода, описанного в разделе 2.3 (см. Рис. 1). Получена оценка характерной энергии делокализации q-бризера, которая согласуется с точностью до постоянного множителя с имеющейся в литературе оценкой порога равнораспределения в модели β-ФПУ (Д.Л. Шепелянский).

В **разделе 2.5** q-бризеры исследуются на устойчивость в линейном приближении в пределе малой нелинейности и большого числа частиц. Линеаризация уравнений движения в окрестности орбиты приводит к многомерному уравнению Матье-Хилла для малых отклонений от решения. Оценивается значение параметра нелинейности, соответствующее точке входа в ближайшую зону первичного параметрического резонанса. Получено приближенное выражение для мультипликаторов Флоке, отвечающих за потерю усточивости, вблизи края зоны резонанса

$$|\mu_{j_1,j_2}| = 1 \pm \frac{\pi^3}{4(N+1)^2}\sqrt{R-1+O(1/N^2)}, \qquad R = \frac{6\beta E(N+1)}{\pi^2}.$$

Значение точки бифуркации $R=1+O(1/N^2)$ согласуется с известной в литературе оценкой порога слабого хаоса $R\approx 1$ в модели β-ФПУ (J. De Luca, A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman). Кроме того, найденное выражение хорошо согласуется (см. Рис. 2) с результатом численного расчета мультипликаторов орбиты (Иванченко М.В.).

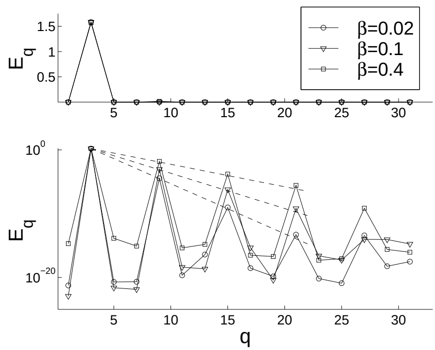

Рис. 1 Профили q-бризеров в пространстве мод β-ФПУ модели: символы и сплошные линии – численный расчет, пунктирные линии – асимптотическая оценка. Линейный (сверху) и логарифмический (снизу) масштабы.

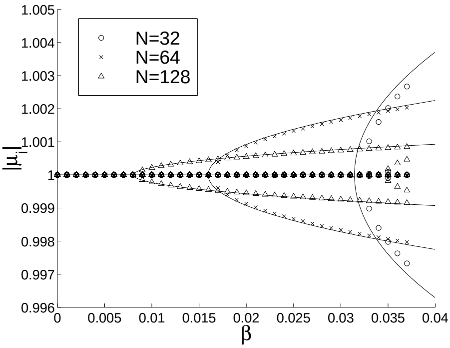

Рис. 2 Модули мультипликаторов q-бризеров для разных размеров системы в зависимости от параметра нелинейности: символы – численный расчет (Иванченко М.В.), линии – асимптотическая оценка.

В **разделе 2.6**, исходя из обсуждавшегося в разделе 2.2 свойства инвариантности q-бризерных решений относительно масштабирования числа частиц, вводятся масштабно-инвариантные интенсивные величины: волновые числа и средние плотности энергии, а также масштабно-инвариантная характеристика локализации q-бризера, выражаемая через интенсивные величины – показатель экспоненты локализации средней плотности энергии в пространстве волновых чисел.

Численно (с помощью метода, описанного в разделе 2.3), а также аналитически (с использованием результата асимптотического расчета, раздел 2.4) исследована зависимость этого параметра от волнового числа главной моды q-бризера для различных значений средней плотности энергии и различных размеров системы. Показано, что при заданной средней плотности энергии численно найденные значения параметра локализации ложатся на единую кривую независимо от размера системы, что подтверждает масштабную инвариантность (см. Рис. 3).

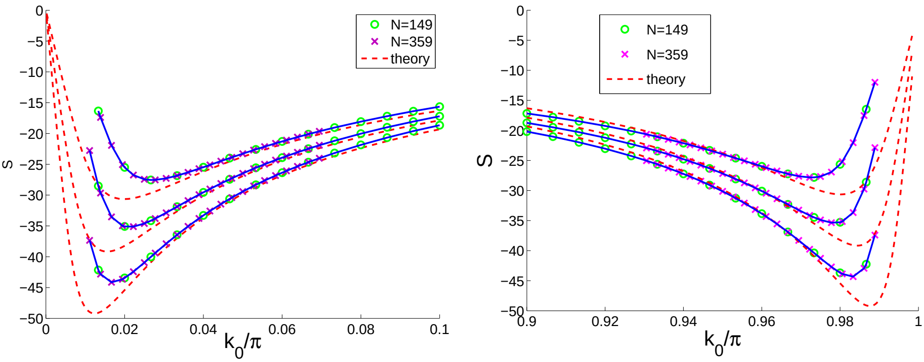

Рис. 3 Показатель локализации q-бризера как функция волнового числа главной моды в β-ФПУ модели для двух размеров системы и трех значений средней плотности энергии $6{,}08\cdot10^{-4}$, $9{,}60\cdot10^{-4}$, $1{,}57\cdot10^{-3}$ (снизу вверх). Символы и соединительные прямые линии – численный расчет, штриховые линии – асимптотическая ценка. Слева – низкочастотный край спектра, справа – высокочастотный.

Эта кривая имеет минимум, соответствующий наиболее сильной локализации q-бризера в пространстве волновых чисел. Абсцисса минимума (оптимальное с точки зрения локализации значение волнового числа главной моды q-бризера) с увеличением средней плотности энергии удаляется от края линейного спектра, а локализация соответствующего q-бризера ухудшается.

В **третьей главе** рассматривается проблема управления структурообразованием в решетках связанных осцилляторов с двухъямным потенциалом.

Во вводной части (**раздел 3.1**) приводятся уравнения движения решетки бистабильных элементов

$$\mu\ddot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \gamma_{ij} + \sum_{kl}\delta_{kl}\Phi_{i+k,\,j+l}(x_{i+k,\,j+l})\,,$$

излагаются известные результаты об устойчивых состояниях равновесия в таких системах для случая кусочно-заданной нелинейности

$$\Phi_{ij}(x)=F(x)=(|x+1|-|x-1|)/2,$$

описываются принципы применения таких систем к решению задач обработки изображений.

В **разделе 3.2** качественными методами (путем построения поглощающих областей в фазовом пространстве) исследуется образование структур в системе без инерционности (μ=0) для двух способов задания нелинейности:

(а) неидентичные нелинейности общего вида с ограничением на максимальное отклонение от заданной кусочно-линейной функции

$$\Phi_{ij}(x)=F(x)+\varphi_{ij}(x), \qquad |\varphi_{ij}(x)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad 1<|x|<R$$

(б) нелинейность со спадающими ветвями – типичная характеристика частотного дискриминатора

$$\Phi_{ij}(x)=G(x)=2x/(1+x^2)$$

В **разделе 3.3** численно исследуются процессы структурообразования для двух частных типов нелинейности (кусочно-линейная функция $F(x)$ и функция со спадающими ветвями $G(x)$) в решеточной системе, ориентированной на задачу выделения контуров. Введен в рассмотрение параметр точности воспроизведения заданной структуры – отношение числа неправильно воспроизведенных элементов изображения к полному количеству элементов – и исследована зависимость этой величины от параметров системы. Рассмотрен случай системы без инерционности (μ=0), а также проанализировано влияние инерционности ($\mu\neq$0).

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Основные результаты диссертационной работы

1. Численно изучен процесс формирования дискретных бризеров в решетках связанных нелинейных осцилляторов в зависимости от энергии начальной волны. Впервые рассмотрен двумерный слу-

чай. В одномерном случае изучена эволюция системы на временах, существенно превышающих масштабы, рассмотренные в литературе.

2. Продемонстрировано возникновение ротобризеров вследствие модуляционной неустойчивости со случайным (в консервативной модели Такено-Пейрара) и определенным (в диссипативной модели) направлением вращения. Показана возможность целенаправленного формирования ротобризеров в диссипативной модели с неоднородным внешним воздействием.
3. Построена конструктивная математическая схема построения q-бризеров – периодических локализованных решений в пространстве нормальных мод – методом непрерывного продолжения одномодового решения. На основе этой схемы разработан численный метод отыскания q-бризеров в нелинейных решеточных системах.
4. Исследованы свойства симметрии q-бризеров, в частности, инвариантность свойств q-бризеров по отношению к масштабированию размера системы.
5. Проведен асимптотический анализ локализации и устойчивости q-бризеров в модели β-ФПУ. Получены оценки порога устойчивости и характерной энергии делокализации q-бризера, которые хорошо согласуются с имеющимися в литературе оценками порогов слабого хаоса и равнораспределения, соответственно.
6. Проведено численное отыскание q-бризеров в модели β-ФПУ, продемонстрировано согласие с аналитическими результатами. Проведено численное исследование свойств локализации q-бризеров в терминах масштабно-инвариантных интенсивных параметров: волновых чисел и средних плотностей энергии.
7. Получена аналитическая оценка расположения аттракторов и их областей притяжения в решетках бистабильных элементов первого порядка с недиффузионными связями для двух способов задания нелинейности: (i) неидентичные нелинейности общего вида с ограничением на максимальное отклонение от заданной кусочно-линейной функции; (ii) нелинейность со спадающими ветвями – типичная характеристика частотного дискриминатора.
8. Для двух частных типов нелинейности (кусочно-линейная функция и функция со спадающими ветвями) в системе, ориентированной на задачу выделения контуров, численно исследован эффект

формирования шахматного паттерна как мешающего фактора. Результат обобщен на систему с инерционностью (парциальный элемент второго порядка).

<u>Список публикаций по теме диссертации</u>

9. M.V. Ivanchenko, O.I. Kanakov, V.D. Shalfeev, S. Flach, Discrete Breathers in Transient Processes and Thermal Equilibrium //Physica D, 2004, vol. 198, pp. 120-135.
10. S. Flach, M.V. Ivanchenko, O.I. Kanakov, q-Breathers and the Fermi-Pasta-Ulam problem //Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, pp.064102-1 – 064102-4.
11. Канаков О.И., Шалфеев В.Д. Формирование стационарных структур в решетках бистабильных элементов с двумя типами нелинейности. //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2005, т.13, №3, с. 77-89.
12. Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I. q-Breathers in Fermi-Pasta-Ulam chains: Existence, localization, and stability //Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, p. 036618.
13. Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Mishagin K.G., and Flach S. q-Breathers in Finite Two- and Three-Dimensional Nonlinear Acoustic Lattices //Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 97, p. 025505.
14. Kanakov O.I., Shalfeev V.D., Forti G.L. Stationary Patterns in CNN-like Ensembles with Modified Cell Output Functions //Int. J. Bifurcation and Chaos, 2006, vol.16, No.7, pp.2207 – 2220.
15. Иванченко М.В., Канаков О.И., Мишагин К.Г. Анализ стационарных режимов в цепочке однонаправленно связанных генераторов с управлением по частоте. Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2000. Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2000.
16. Канаков О.И., Шалфеев В.Д. Структурообразование в цепочке потоково связанных бистабильных элементов. Материалы международной межвузовской конференции Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ, 20-24 марта, Саратов, Россия, Изд-во ГосУНЦ "Колледж", Саратов, 2001.
17. Канаков О.И., Шалфеев В.Д. О стационарных структурах в цепочках взаимосвязанных частотно-управляемых генераторов. Труды (пятой) научной конференции по радиофизике, посвященной 100-

летию со дня рождения А.А. Андронова. 7 мая 2001 г. /Ред. А.В.Якимов. - Н.Новгород, 2001.
18. O.I. Kanakov and V.D. Shalfeev. Example of image processing in a chain of bistable elements. Proceedings of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov, Nizhny Novgorod, Russia, July 2-6, 2001. Nizhny Novgorod, Institute of Applied Physics RAS, 2002. vol. 3, p.182
19. Канаков О.И., Шалфеев В.Д. Применение решетки бистабильных элементов с неидентичными характеристиками к задачам обработки изображений. Труды (шестой) научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Греховой 7 мая 2002 г. /Ред. А.В.Якимов. - Н.Новгород, ТАЛАМ, 2002.
20. Канаков О.И., Шалфеев В.Д. Устойчивые режимы в решетке бистабильных элементов первого порядка со случайно-неидентичными нелинейностями. Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2002. Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002.
21. Иванченко М.В., Канаков О.И., Мишагин К.Г. Моделирование динамики решеточных ансамблей. Труды (седьмой) научной конференции по радиофизике, посвященной 90-летию со дня рождения В.С. Троицкого 7 мая 2003 г. /Ред. А.В.Якимов. - Н.Новгород, ТАЛАМ, 2003.
22. O.I. Kanakov, V.D. Shalfeev. The Influence of the Type of Nonlinearity of the Basic Element on Pattern Formation in a Homogeneous CNN. Proceedings of the International Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2003). Nizhny Novgorod, Institute of Applied Physics RAS, 2003.
23. O.I. Kanakov, V.D. Shalfeev, Persistence of Edge-Detecting Properties of a CNN to Variations of the Cell Output Function, Proc. XII. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2004), September 6-10, 2004, Vienna, Austria. Vienna University of Technology, Vienna, 2004.
24. Иванченко М.В., Канаков О.И., Шалфеев В.Д. Модуляционная неустойчивость в решетках нелинейных консервативных осцилляторов. Труды (восьмой) научной конференции по радиофизике, посвященной 80-летию со дня рождения Б.Н. Гершмана 7 мая 2004 г. /Ред. А.В.Якимов. – Н.Новгород, ТАЛАМ, 2004.

25. S. Flach, M. Ivanchenko, and O.I. Kanakov. Periodic solutions to the Fermi-Pasta-Ulam system: continuation of single-mode orbits of a linear chain. Proc. Int. Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2005). NWP-1 Nonlinear dynamics: theory and applications. Nizhny Novgorod, Institute of Applied Physics RAS, 2005.
26. Канаков О.И., Иванченко М.В., Флах С. Q-бризеры в двумерных и трехмерных системах Ферми-Паста-Улама. Нелинейные волновые процессы, конференция молодых ученых, Нижний Новгород, 1 – 7 марта 2006 г., тез. докл. – Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2006. С.77-78.

Оглавление диссертации