На правах рукописи

Кондратьева Юлия Владимировна

ДВУМЕРНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор М. В. Долов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор И.С. Емельянова,
	кандидат физико-математических наук, доцент Р.Г. Рахманкулов
Ведущая организация:	Мордовский государственный университет им.Н.П. Огарева

Защита диссертации состоится «28» июня 2007 г. в 14 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 при Нижегородском государственном университете им.Н.И.Лобачевского в конференц-зале ННГУ по адресу: 603600, г. Н.Новгород, пр-т Гагарина, 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан «23» мая 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.166.06
кандидат физико-математических наук,
доцент В. И. Лукьянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Системам дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями посвящены многочисленные исследования. Изучению таких систем большое внимание уделялось в трудах А. Пуанкаре, А. Дюлака, Г. Дарбу и других математиков.

Одной из основных проблем для двумерных вещественных полиномиальных динамических систем является вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов. Среди работ, связанных с изучением этой проблемы, следует отметить исследования А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, Н.Н. Баутина, Н.Ф. Отрокова, Л.А. Черкаса, Е.М. Ландиса и И.Г. Петровского, А.Д. Морозова, К.С. Сибирского, S. Shi, L. Chen и M. Wang, H. Zoladek, Ю.С. Ильяшенко, R. Bamon, J. Ecalle и других авторов.

В настоящее время, несмотря на значительные усилия, проблема оценки числа предельных циклов полиномиальных дифференциальных систем далека от завершения даже для малых значений степеней нелинейностей.

В середине двадцатого века Н.П. Еругиным поставлена задача, о выделении множества двумерных систем с заданным программным движением. Эта задача послужила толчком к весьма обширным исследованиям систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую специального вида или со специальным аналитическим свойством. При этом значительное внимание уделялось изучению важного класса полиномиальных динамических систем, допускающих те или иные инвариантные алгебраические кривые. Этому направлению посвящены работы Н.Н. Баутина, А.С. Галлиулина, В.Н. Горбузова, М.В. Долова, Т.А. Дружковой, Р.М. Евдокименко, В.В. Косарева, И.С. Куклеса, Р.А. Любимовой, В.П. Николайчика, М.Н. Попа, К.С. Сибирского, В.Ф. Филипцова, М.Г. Худай-Веренова, Л.А. Черкаса, А.И. Яблонского, J. Llibre, J. Chavarriga, C. Christopfer и многих других математиков.

Знание частных решений, как правило, позволяет изучить топологическую структуру в целом. В 1878 году Г.Дарбу показал, что если у системы с полиномиальными правыми частями существует определенное число алгебраических инвариантных кривых, то система имеет первый интеграл специального вида.

М.В. Долов установил, что у интегрируемых по Дарбу систем предельные циклы - алгебраические; полиномы, определяющие циклы, - вещественные и входят в аналитическое выражение интеграла Дарбу; циклы структурно устойчивы; состояния равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения у таких систем могут быть только центрами. С помощью этих результатов построен контрпример к гипотезе К.С. Сибирского о всюду плотности множества систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями с первыми интегралами Дарбу в множестве полиномиальных динамических систем с простым состоянием покоя типа центр в смысле Пуанкаре. Решена проблема Н.П. Еругина о существовании систем с полиномиальными правыми частями, имеющих среди фазовых траекторий предельные циклы и состояния покоя центр, а также изучены некоторые вопросы теории бифуркаций.

Н.Н. Баутин в 1980г. сформулировал теорему, устанавливающую связь между первой и второй частями 16-й проблемы Д.Гильберта, в частности, указал класс полиномиальных векторных полей степени n, имеющих предельными циклами овалы М-кривой степени n (алгебраической кривой порядка n с максимальным числом овалов).

М.В. Долов доказал существование полиномиальных векторных полей, предельными циклами которых являются только овалы двух М-кривых.

В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес задача о максимальном числе предельных циклов в виде эллипсов и окружностей для полиномиального векторного поля степени n.

Для n=2 в работе Цинь Юань-Сюня даны необходимые и достаточные условия существования предельного цикла в виде эллиптической кривой второго порядка. Такие поля, кроме этого предельного цикла, не имеют других изолированных замкнутых траекторий, отличных от состояний покоя.

Для n=3 Хуан Чи-Юй, Фан Чу-Бао и Цянь Синь-Чень с точностью до обратимого линейного преобразования указали необходимые и достаточные условия существования двух квадратичных алгебраических предельных циклов. При этом установлено отсутствие других периодических решений. Кроме того, показано, что окружность и эллипс не могут быть одновременно предельными циклами векторного поля степени n=3.

М.В. Долов для систем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}, \tag{1}$$

где P и Q - полиномы, $\max(degP, degQ) = n$, при $P(x,y) \equiv y$ указал оценку сверху для числа траекторий, которые могут быть замкнутыми кривыми второго порядка, и для систем с наибольшим числом предельных циклов в виде эллипсов изучил вопрос о существовании других периодических решений. При этом случай $P(x,y) \not\equiv y$ не рассматривался.

Таким образом, исследование полиномиальных динамических систем, среди траекторий которых содержатся инвариантные алгебраические кривые, является актуальным.

Цель работы. Целью диссертации является исследование задачи существования и оценки числа предельных циклов полиномиальных векторных полей на плоскости с инвариантными кривыми заданного класса. При этом значительное внимание уделяется случаям, когда система дифференциальных уравнений допускает либо линейные частные интегралы, либо имеет предельными циклами кривые второго порядка.

Методика исследования. В работе используются методы качественной и аналитической теорий обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теории канонических первых интегралов.

Научная новизна. Для двумерных автономных систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями получены следующие новые результаты:

указан класс интегрируемых по Дарбу векторных полей степени n, имеющих предельными циклами овалы алгебраической кривой степени n-1;

найдены условия существования векторных полей четвертой степени с тремя предельными циклами в виде окружностей с попарно различными центрами, лежащими на одной прямой;

указаны достаточные условия, когда центры окружностей, являющихся предельными циклами, принадлежат одной прямой;

теорема о максимальном числе предельных циклов в виде окружностей с центрами на одной прямой;

теорема об отсутствии других предельных циклов в виде окружностей, при наличии среди фазовых кривых системы максимального числа предельных циклов в виде окружностей с центрами на одной прямой;

указаны достаточные условия центра в смысле Пуанкаре и условия отсутствия предельных циклов у систем с линейными частными интегралами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит, в основном, теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в научно-исследовательской работе по качественной теории дифференциальных уравнений, в учебных курсах и при изучении конкретных динамических систем.

Апробация и публикации. Научные результаты исследований апробированы: на Международной научной конференции аспирантов и студентов "Ломоносов 2001"в Московском государственном университете; на Международной конференции "Еругинские чтения 7"(Гродно, 2001г.); на Международной конференции "Еругинские чтения 8"(Брест, 2002г.); на V Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"(Саранск, 2002г.); на VI Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Саранск, 2004г.); на IX Белорусской Международной математической конференции (Гродно, 2004г.); на VII Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Саранск, 2006г.); на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006г.); на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского государственного университета им.Н.И. Лобачевского, научн. руков. проф. А.Д. Морозов.

Основные результаты опубликованы в работах [1]- [11], указанных в конце автореферата. В опубликованных совместно с научным руководителем работах М.В. Долову принадлежат постановка задачи, идеи доказательств основных результатов и общее руководство.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на 7 разделов, и списка литературы. Объем диссертации составляет 117 страниц (набранные в макропакете LaTeX в формате машинописного текста). Библиография включает 105 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель работы и излагаются основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассматриваются вещественные системы дифференциальных уравнений (1), допускающие различные неприводимые инвариантные алгебраические кривые.

В **разделе 1.1** содержится обзор результатов, касающихся оценки числа и степени инвариантных алгебраических кривых, являющихся предельными циклами.

Здесь, в частности, отмечается результат А.И. Яблонского[1] о существовании квадратичных векторных полей с предельным циклом в виде овала кривой четвертого порядка.

Выделен класс интегрируемых по Дарбу систем дифференциальных уравнений [6]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (P_1^2+Q_1^2)\dfrac{\partial H}{\partial y} + 2H\left(\alpha(P_1\dfrac{\partial P_1}{\partial y} + Q_1\dfrac{\partial Q_1}{\partial y}) + \beta(Q_1\dfrac{\partial P_1}{\partial y} - P_1\dfrac{\partial Q_1}{\partial y})\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -(P_1^2+Q_1^2)\dfrac{\partial H}{\partial x} - 2H\left(\alpha(P_1\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + Q_1\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}) + \beta(Q_1\dfrac{\partial P_1}{\partial x} - P_1\dfrac{\partial Q_1}{\partial x})\right) \end{cases}, \qquad (2)$$

где $H = 0$ - алгебраическая кривая, $degH = n-1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, P_1 и Q_1 - вещественные линейные функции x, y такие, что прямые $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ пересекаются внутри овала кривой $H = 0$. Система (2) имеет первый интеграл Дарбу $\Gamma(x,y) \equiv H(P_1 + iQ_1)^{\alpha+i\beta}(P_1 - iQ_1)^{\alpha-i\beta} = C$, при этом овалы кривой $H = 0$, в окрестности которых функция $\Gamma(x,y)$ многозначна, являются предельными циклами системы (2) и у системы (2) нет других предельных циклов, отличных от овалов кривой $H = 0$.

Система (2), как и отмеченный выше результат А.И. Яблонского, является контрпримером к гипотезе Винкеля "для данной алгебраической кривой $f = 0$ степени $m \geq 4$ не существует полиномиального векторного поля степени менее чем 2m-1, допускающего инвариантную кривую

[1] Яблонский А.И. *О предельных циклах одного дифференциального уравнения.* //Дифференц. Уравнения, 1966. Т.2, № 3. С.335-344.

$f = 0$ и имеющего предельными циклами только овалы кривой $f = 0$"[2].

В **разделе 1.2** вводятся основные понятия и указывается вид системы (1), имеющей частные неприводимые алгебраические интегралы.

В **разделе 1.3** рассматриваются системы (1), допускающие $k \geqslant 3$ различных инвариантных кривых

$$\Phi_j \equiv (x-a_j)^2 + y^2 - r_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, .., k, \qquad (l_j)$$

и изучаются свойства многочленов $M_j(x, y)$, удовлетворяющих тождеству

$$P(x,y)\frac{\partial \Phi_j(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \Phi_j(x,y)}{\partial y} \equiv \Phi_j(x,y)M_j(x,y). \qquad (3)$$

Лемма 1.3.1. *Если система (1) допускает $k \geqslant 2$ различных инвариантных кривых вида $\Phi_j \equiv (x-a_j)^2+y^2-r_j^2 = 0$, $j = \overline{1,k}$, то однородные полиномы $M_j^{(n-1)}$ степени $n-1$, содержащиеся в многочленах $M_j(x,y)$, которые удовлетворяют тождеству (3), таковы, что*

$$M_1^{(n-1)} \equiv M_2^{(n-1)} \equiv \ldots \equiv M_k^{(n-1)} \equiv M^{(n-1)}.$$

Лемма 1.3.4. [6]. *Если среди траекторий системы (1) содержится $k > n/2$ непересекающихся кривых $\Phi_j \equiv (x-a_j)^2 + y^2 - r_j^2 = 0$, $j = 1, 2, .., k$, то полином M_j, соответствующий многочлену Φ_j и удовлетворяющий тождеству (3), делится на y, то есть $M_j = y\mu_j$.*

Во **второй главе** изучаются системы (1) при $n \geq 4$ с инвариантными кривыми l_j.

В **разделе 2.1** при $n = 4$ исследуется вопрос существования систем (1) с тремя предельными циклами в виде окружностей, имеющих различные центры, лежащие на одной прямой. Здесь вводится в рассмотрение множество A_4^3 - множество систем (1) при n=4 с тремя непересекающимися инвариантными кривыми $\Phi_j \equiv (x-a_j)^2 + y^2 - r_j^2 = 0$, $j = 1, 2, 3$, где величины a_1, a_2, a_3 попарно различны.

[2]Winkel R. *A transfer principle in the real plane from nonsingular algebraic curves to polynomial vector fields.* //Geometriae Dedicata, 2000. Vol.79(1). P.101-108.

Доказано, что если система (1) принадлежит A_4^3, то полиномы μ_j в лемме 1.3.4 имеют вид

$$\mu_j = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + A_j x + B_j y + \mu_j^0, j = 1, 2, 3,$$

где A, B, C, A_j, B_j, $\mu_j^0 \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&(a_2 - a_3)\mu_1^0 + (a_3 - a_1)\mu_2^0 + (a_1 - a_2)\mu_3^0 = \nu \\
&(a_2 - a_3)\alpha_1 + (a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3 = \nu_1 \\
&(a_2 - a_3)a_1\mu_1^0 + (a_3 - a_1)a_2\mu_2^0 + (a_1 - a_2)a_3\mu_3^0 = \nu_2 \\
&\alpha_j = a_j^2 - r_j^2 = \Phi_j(0, 0).
\end{aligned}$$

Основные результаты раздела 2.1 содержатся в следующих теоремах

Теорема 2.1.1. [3]. *При $\nu = 0$ и $\nu_1 \neq 0$ система (1) из A_4^3 допускает первый интеграл Дарбу*

$$\Gamma(x, y) \equiv \Phi_1^{a_2 - a_3} \Phi_2^{a_3 - a_1} \Phi_3^{a_1 - a_2} = C$$

и не имеет предельных циклов.

Теорема 2.1.2. [4]. *Пусть система (1) принадлежит A_4^3, $A = -\nu/\nu_1$ причем $\nu\nu_1 \neq 0$ и при этом $B = 0$, $\nu_2 \neq \nu a_j$ для $j = 1, 2, 3$. Тогда состояния покоя системы (1) лежат на оси $y = 0$ и у (1) нет изолированных замкнутых траекторий.*

Теорема 2.1.3. [3]. *Пусть система (1) принадлежит A_4^3, $A = -\nu/\nu_1$ причем $\nu\nu_1 \neq 0$ и $B \neq 0$. Тогда при $\nu_2 = \nu a_j$ и $|2\nu(a_j - a_s)/B\nu_1| > \max\limits_{j \neq s}(r_j)$, $j = 1, 2, 3$, точки пересечения окружности $\Phi_j = 0$ с осью $y = 0$ суть состояния покоя для системы (1), две другие окружности $\Phi_s = 0, s \neq j$ будут структурно устойчивыми предельными циклами для (1).*

Теорема 2.1.4. [3]. *Пусть система (1) принадлежит A_4^3, $A = -\nu/\nu_1$ и при этом $\nu B\nu_1 \neq 0$ и $|2(\nu_2 - \nu a_j)/B\nu_1| > \max(r_1, r_2, r_3)$. Тогда: 1)окружности $\Phi_j = 0$, $j = 1, 2, 3$ будут предельными циклами системы (1); 2) все состояния покоя системы (1) лежат на прямой*

$y = 0$*; 3) в полуплоскостях* $y > 0$, $y < 0$ *у (1) нет замкнутых траекторий.*

Построен пример системы при $n = 4$, имеющей три инвариантных непересекающихся кривых $\Phi_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.1.4.

Теорема 2.1.4 и пример указывают на ошибочность утверждения о том, что "если система (1) при четном n имеет $A(n) \geqslant (n+2)/2$ инвариантных непересекающихся окружностей $(x - a_j)^2 + y^2 - r_j^2 = 0$, $j = 1, 2, \ldots, A(n)$, где хотя бы три величины a_j попарно различны, то эти окружности не могут быть предельными циклами системы (1)"[3].

В **разделе 2.2** изучается случай $\max(degP, degQ) = n \geq 3$, когда среди фазовых кривых системы (1) содержатся два семейства непересекающихся, концентрических окружностей с различными центрами.

Теорема 2.2.3. [6]. *Если среди траекторий системы (1) содержатся непересекающиеся окружности*

$$\Phi_j \equiv (x - a_1)^2 + y^2 - r_j^2 = 0, \quad j = \overline{1, k},$$
$$\varphi_\nu \equiv (x - a_2)^2 + y^2 - \rho_\nu^2 = 0, \quad \nu = \overline{1, k},$$

где $a_1 \neq a_2$, *то при* $n = 2k$ *кривые* $\Phi_j = 0$ *и* $\varphi_\nu = 0$ *не могут быть предельными циклами для (1).*

Доказано, что если выполнены условия теоремы 2.2.3, то система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = (\alpha\Phi - \beta\varphi)y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = (x - a_1)\beta\varphi - (x - a_2)\alpha\Phi \end{cases}, \qquad (4)$$

где α, β - полиномы степени не более $n - 2k$, $\Phi = \Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_k$, $\varphi = \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k$.

Теорема 2.2.4. [6]. *Пусть при* $n = 2k+1$*: 1)* $a_1 = 0, a_2 = a \neq 0$ *и величины* r_j, ρ_ν *такие, что окружности* $\Phi_j = 0$ *и* $\varphi_\nu = 0$ *не пересекаются для* $j, \nu = \overline{1, k}$*; 2) прямые* $\alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \beta_0 = 0$ *и* $\alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_0 = 0$ *не имеют общих точек с* $\Phi_j = 0$ *и* $\varphi_\nu = 0$ *соответственно при* $j, \nu = \overline{1, k}$*;*

[3] Sadovskaia N., Ramirez R. *On 16-th Gilbert problem.*// Тез. докл. межд. конф. по дифф. ур-ям и дин. системам, Суздаль, август 21-26, 2000, Владимир,2000. С.69-72.

3) $a\alpha_{01}(\alpha_0 - \beta_0) \neq 0$. Тогда: а) состояния покоя системы (4), в которой $\alpha = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_0$, $\beta = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \beta_0$, $\Phi = \Phi_1\Phi_2 \cdots \Phi_k$, $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_k$, лежат на оси $y = 0$, при этом общие точки $y = 0$ с $\Phi_j = 0$ и $\varphi_\nu = 0$ отличны от состояний покоя; в) окружности $\Phi_j = 0$ и $\varphi_\nu = 0$ $j, \nu = \overline{1,k}$ будут предельными циклами системы (4) и у (4) нет других предельных циклов в виде окружности.

Теорема 2.2.5. [6]. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.3 и при $n = 2k + 2$, $n > 4$: 1) $a_1 = 0$, $a_2 = a \neq 0$, величины r_j, ρ_ν таковы, что окружности $\Phi_j = 0$ и $\varphi_\nu = 0$ не пересекаются для $j, \nu = \overline{1,k}$; 2) полиномы $\Phi = \Phi_1\Phi_2 \cdots \Phi_k$, $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_k$, $\alpha \equiv \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_0$, $\beta \equiv \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \beta_{10}x + \beta_{01}y + \beta_0$ и $\omega(x, y) = (\alpha_{11}(\alpha_{10} - \beta_{10}) + \alpha_{20}(\beta_{01} - \alpha_{01}))x^2 + \alpha_{02}(\beta_{01} - \alpha_{01})y^2 + \quad +(\alpha_{10}\beta_{01} - \alpha_{01}\beta_{10} + \alpha_{11}(\alpha_0 - \beta_0))x + \alpha_0\beta_{01} - \beta_0\alpha_{01}$ такие, что $\Phi(x, y) = 0$ не имеет общих точек с кривыми $\beta(x, \pm y) = 0$ и $\omega(x, y) = 0$, а $\varphi(x, y) = 0$ не пересекается с $\alpha(x, \pm y) = 0$ и $\omega(x, y) = 0$. Тогда окружности $\Phi_j = 0$ и $\varphi_\nu = 0$ $j, \nu = \overline{1,k}$ будут предельными циклами системы (4).*

Доказано существование систем (1), допускающих предельными циклами два семейства концентрических окружностей, причем число таких предельных циклов при нечетном n равно $n - 1$ и при этом в каждое семейство входит $(n-1)/2$ окружностей, а при четном n число таких предельных циклов равно $n - 2$ и в каждом семействе содержится $(n - 2)/2$ окружностей.

Основные утверждения, касающиеся максимального числа предельных циклов в виде окружностей с центрами на одной прямой, содержат следующие теоремы.

Теорема 2.2.6. [6]. *Максимальное число предельных циклов, допускаемых системой (1), в виде окружностей с центрами на одной прямой, равно $n - 1$, при этом в семейство концентрических кривых с одним центром входит не более $(n - 1)/2$ окружностей при нечетном n и не более $n/2$ при четном n.*

Заметим, что для реализации теорем 2.2.4, 2.2.5 и 2.2.6 необходимо, чтобы $P(x,y) \not\equiv y$. В случае $P(x,y) \equiv y$ при $Q(x,y) \not\equiv -x$ в работе М.В. Долова[4] показано, что замкнутых кривых второго порядка среди решений системы (1) может быть не более n/2 при n четном и не более (n-1)/2 при нечетном n.

Теорема 2.2.7. [6]. *Если среди траекторий системы (1) имеется семейство L предельных циклов, содержащее $n/2$ концентрических окружностей, то центры окружностей, являющихся предельными циклами, лежат на одной прямой.*

Теорема 2.2.8. [6]. *Если среди фазовых кривых системы (1) содержится $(n-1)$ предельных циклов в виде окружностей с центрами на одной прямой, то у системы (1) нет других предельных циклов в виде окружностей.*

Следствие 2.2.1.*Пусть фазовые кривые системы (1) содержат два семейства L и L_1, $L \cap L_1 = \emptyset$ предельных циклов в виде концентрических окружностей (имеющих для L и L_1 соответственно различные центры), при этом для нечетного n в каждое семейство входит по $(n-1)/2$ окружностей, а при четном n в одном семействе $n/2$, а в другом $(n-2)/2$ окружностей. Тогда у (1) нет других предельных циклов в виде окружностей.*

В **третьей главе** рассматриваются системы (1) с линейными частными интегралами.

В **разделе 3.1** исследуется проблема центра и предельных циклов систем (1), допускающих линейные частные интегралы, среди которых хотя бы один содержит состояние покоя с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения и равной нулю первой фокусной величиной q_3.

Обозначим E_a множество систем (1) с первым интегралом Дарбу $\Gamma(x,y) = C$, где

$$\Gamma(x,y) = \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k}, \tag{5}$$

[4]Долов М.В. *О предельных циклах одного класса дифференциальных уравнений* //Дифференц. Уравнения, 1969. Т.5, № 7. С.1330-1334.

здесь $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ - попарно взаимно простые полиномы, неприводимые над полем комплексных чисел, величины $\beta_j \neq 0$ в общем случае комплексные. А через M_a обозначим совокупность систем (1) с интегрирующим множителем вида (5). Систему (1) из E_a назовем интегрируемой по Дарбу.

Заметим, что $E_a \subset M_a$ и система (1) принадлежит M_a, если (1) допускает $n(n+1)/2$ попарно различных нераспадающихся алгебраических инвариантных кривых [5,6,7], либо выполнены условия [8]:

1) *при* $n \geq 3$ *для системы (1) точка* (x_0, y_0)*- состояние покоя с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения;*

2)*первая фокусная величина* q_3*, соответствующая* (x_0, y_0)*, равна нулю;*

3) система (1) имеет $N = (n^2+n-4)/2$ частных линейных интегралов $\Phi_j = c_j + a_j x + b_j y = 0$, $\Phi_j(x_0, y_0) \neq 0$, $j = \overline{1, N}$.

В отличие от работы А.С. Шубэ [8], в разделе 3.1 рассматриваются системы (1), удовлетворяющие условиям 1) и 2) при наличии линейных частных интегралов $\Phi_j(x, y) = 0$, среди которых есть такие, что $\Phi_j(x_0, y_0) = 0$.

Основной результат раздела 3.1 содержится в теореме 3.1.1.

Теорема 3.1.1. [11]. *Если вещественная система (1) удовлетворяет условиям 1)-2) и при этом имеет* $N = (n^2 + n - 2)/2$ *линейных частных интегралов* $\Phi_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, N}$, *среди которых хотя бы одно* $\Phi_j(x_0, y_0) = 0$, *то: a) система (1) принадлежит* M_a*; b)* (x_0, y_0)*- центр в смысле Пуанкаре, если* $(1) \in E_a$*, либо* $(1) \in M_a \backslash E_a$*, причем интегрирующий множитель (5) аналитический в* (x_0, y_0)*; c) система (1) из* E_a *не имеет предельных циклов.*

---

[5]Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* //Минск, изд-во БГУ, 1982. 207с.

[6]Долов М.В. *Канонические интегралы и предельные циклы.* Диссертация д.ф.-м.н., Горький, 1983.

[7]Darboux G. *Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre.* //Bull.des.Sc.math., 1878. Vol.2(2). P.60-96,123-144,151-200.

[8]Шубэ А.С. *Линейные частные интегралы и проблема центра* //Изв.АН Респ. Молдова, Матем, 1993. Т.2, №1. С.91-95.

В **разделе 3.2** рассматривается система вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \sum_{s+\nu=2}^{3} a_{s\nu} x^s y^\nu \equiv P \\ \frac{dy}{dt} &= x + \sum_{s+\nu=2}^{3} b_{s\nu} x^s y^\nu \equiv Q, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a_{s\nu}$, $b_{s\nu}$ - вещественные числа.

Согласно результатам А.С. Шубэ [8], состояние покоя(0,0) системы (6) будет центром в смысле Пуанкаре, если первая фокусная величина $q_3 = 0$ и (6) допускает 4 различных частных линейных интеграла $\Phi_j(x, y) = 0$, свободные члены которых отличны от нуля. Это ограничение существенно используется в доказательстве в работе [8], причем случай, когда $(0, 0) \in \bigcup\limits_{i=1}^{4} \{\Phi_j(x, y) = 0\}$ не рассматривается.

Обозначим через $A_3^{(4)}$ множество систем (6) с 4 различными инвариантными множествами

$$\begin{aligned} &\Phi_1 \equiv x + iy = 0, \qquad \Phi_2 \equiv x - iy = 0, \\ &\Phi_j \equiv 1 + a_j x + b_j y = 0, \qquad 3 \le j \le 4. \end{aligned}$$

Основной результат раздела 3.2 содержит

Теорема 3.2.1. [11]. *Пусть система (6) принадлежит* $A_3^{(4)}$ *и при этом первая фокусная величина* $q_3(0, 0) = 0$*. Тогда система (6) интегрируема по Дарбу; (0,0)- центр в смысле Пуанкаре и у системы (6) нет предельных циклов.*

В 2004 г. автор стал призером конкурса для аспирантов на стипендию им. академика Г.А. Разуваева на 2004-2005 учебный год.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору М.В. Долову за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

[1] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** О предельных циклах эллиптического типа двумерных автономных систем //"Современные исследования в математике и механике", Труды 23 конф. молодых ученых мех.-мат. ф-та МГУ, Москва 9-14 апреля, 2001. С.277-281.

[2] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.**О предельных циклах динамических систем с нелинейностями четвертого порядка //Тезисы докладов Международной математической конференции "Еругинские чтения VII", Гродно, 2001.

[3] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** О предельных циклах эллиптического типа двумерных автономных систем //Дифференц. Уравнения, 2002. Т.38, № 10. С.1303-1309.

[4] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** О предельных циклах динамических систем с нелинейностями четвертого порядка //Труды СВМО, 2002. Т.3-4, № 1. С.61-67.

[5] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** К вопросу о числе предельных циклов полиномиальных двумерных динамических систем //Тезисы докладов Международной математической конференции "Еругинские чтения VIII", Брест, 2002.

[6] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** Инвариантные алгебраические кривые полиномиальных динамических систем //Дифференц. Уравнения, 2003. Т.39, № 8. С.238-243.

[7] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** Инвариантные алгебраические кривые и интегрируемость по Дарбу полиномиальных векторных полей //Труды СВМО, 2003. Т.5, № 1. С.68-70.

[8] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** К вопросу об алгебраической интегрируемости полиномиальных векторных полей //Труды СВМО, 2004. Т.6, № 1. С.40-50.

[9] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** Линейные частные интегралы и интегрируемость по Дарбу //Тезисы докладов IX Белорусской Международной математической конференции, Гродно, 2004.

[10] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** Интегрируемость по Дарбу систем с линейными частными интегралами //Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнеиям и динамическим системам, Владимир, 2006. С.92-93.

[11] **Долов М.В., Павлюк Ю.В.** Линейные частные интегралы и интегрируемость по Дарбу //Труды СВМО, 2006. Т.8, № 1. С.69-81.