На правах рукописи

Бондарь Елена Александровна

Нестационарные методы регуляризации задачи связанного псевдообращения

(специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Н.Новгород –2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Нижегородского государственного педагогического университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Р.А. Шафиев.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор И.П. Рязанцева,
	доктор физико-математических наук, доцент М.И. Сумин.
Ведущая организация:	Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Защита состоится 27 декабря 2007 года в 14 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 2, конференц-зал ННГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ННГУ http://www.unn.ru.

Автореферат разослан "26"ноября 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И. Лукьянов

Общая характеристика работы

Актуальность представляемой диссертации. Рассмотрена задача связанного псевдообращения: в множестве X_A – точек минимума

$$\|Ax-y\|^2 \to \min \quad \text{на} \quad X_1 = \left\{ x\in X : \|Bx-z\|^2 = \min_{u\in X} \|Bu-z\|^2 \right\}, \qquad (1)$$

найти элемент x_*, наименее отклоняющийся от заданного элемента $x_0 \in X$ (при $x_0=0$ искомый элемент обозначается x^*). Здесь $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$ – заданные линейные непрерывные операторы, X, Y, Z – гильбертовы пространства и $y \in Y$, $z \in Z$ – заданные элементы.

Впервые в математической литературе эта задача (при $x_0=0$) появилась в 1970 году независимо в двух статьях: японских математиков N. Minamide и K. Nakamura и отечественных математиков В.А. Морозова и Н.Н. Кирсановой. В работе японских математиков к этой абстрактной модели сведена содержательная задача из области оптимального управления, что вместе с найденными в дальнейшем другими приложениями указывает на необходимость изучения задачи (1).

Актуальность изучения задачи (1) связана еще с тем, что в ее постановку (при $B=0$, $z=0$) входит классическая задача псевдообращения уравнения

$$Ax = y, \qquad (2)$$

теории и методам решения которой посвящены известные монографии А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина, В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы, М.М. Лаврентьева, Ф.П. Васильева, Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова, А.Б. Бакушинского и А.В. Гончарского, В.В. Васина и А.Л. Агеева и многих других.

В работе В.А. Морозова и Н.Н. Кирсановой построен первый однопараметрический вариационный метод регуляризации решения задачи (1). Однако, при этом на операторы A и B накладывается условие дополнительности, которое сильно упрощает задачу связанного псевдообращения, например, в этом случае множество X_A – одноэлементно. Условие дополнительности операторов фигурирует и в работах последователей В.А. Морозова (В.И. Мелешко, С. Джумаев, Б. Алиев, L. Elden, C.W. Groetsch и другие).

Освободиться от этого условия позволяет предложенный Р.А. Шафиевым двупараметрический метод регуляризации задачи (1), вариационный вариант которого исследовали его ученики М.Я. Кугель и И.Ю. Ястребова, при условии обобщенной дополнительности операторов A и B. Дальнейшее ослабление условий на операторы A и B оказалось возможным в рамках других регуляризирующих алгоритмов, в частности, итерационных методов регуляризации, предложенных и исследованных Е.В. Архаровым.

В настоящее время получили развитие непрерывные методы регуляризации некорректных задач, позволяющие сводить исходную проблему к проблеме решения начальных задач для дифференциальных уравнений, тем самым подключая к решению некорректных задач мощный современный аппарат численного решения дифференциальных уравнений. Поэтому проблема распространения непрерывных методов на случай решения задачи связанного псевдообращения, несомненно, представляет интерес.

Цель работы: построить нестационарные методы регуляризации задачи связанного псевдообращения и исследовать их сходимость и устойчивость относительно возмущений входных данных задачи.

Методика исследования использует аппарат теории псевдообращения, теории дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, а также общие результаты функционального анализа и теории возмущений.

Научная новизна исследования заключается в следующих основных результатах диссертации:

- предложен способ построения нестационарных методов решения задачи связанного псевдообращения ограниченных операторов в гильбертовых пространствах, базирующийся на операторном методе регуляризации аппроксимирующей задачи.

- построен метод установления и доказана стабилизация решений однопараметрического семейства задач Коши для дифференциальных уравнений первого порядка к решению задачи связанного псевдообращения как при точных, так и при возмущенных входных данных. Найдена оценка погрешности метода установления, и на основе принципа минимума мажорантных оценок решена проблема априорного выбора параметров регуляризации.

- построен непрерывный метод регуляризации первого порядка и установлена стабилизация решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка к нормальному решению задачи связанного псевдообращения при точных и возмущенных входных данных.

– построен регуляризованный метод тяжелого шарика, представляющий собой задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Найдены условия на коэффициенты дифференциального уравнения, при которых решение возмущенной задачи Коши стабилизируется к нормальному решению задачи связанного псевдообращения. Указана система функций, удовлетворяющих этим условиям.

– найдены задачи оптимального управления, к решению которых применены построенные методы регуляризации.

Научная и практическая ценность. Основные результаты предложенной работы являются новыми и вносят вклад в теорию методов решения некорректных задач. Работа носит как теоретический, так и практический характер и ее результаты могут быть использованы при решении экстремальных задач и разного рода интегральных уравнений, к которым, как известно, сводится достаточно широкий круг практических задач.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались:

– на научных семинарах кафедры математического анализа Нижегородского государственного педагогического университета (2002–2007 г.г.);

– на научных конференциях Нижегородского государственного педагогического университета (2002–2007 г.г.);

– на научном семинаре кафедры высшей математики и теоретической механики Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии (руководитель – проф. В.З. Гринес) (2006 г.).

– на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (г. Екатеринбург, 2004 г.);

– на научном семинаре НИВЦ Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (руководитель – проф. В.А. Морозов) (2007 г.);

– на научном семинаре "Математическая теория оптимального управления" Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (руководители – проф. В.И. Сумин, проф. М.И. Сумин) (2007 г.);

– на научном семинаре кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета (руководитель – проф. И.П. Рязанцева) (2007 г.).

Основные результаты отражены в 5 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах [4, 5], выполненных в соавторстве с Р.А. Шафиевым, личным вкладом диссертанта являются формулировки и доказательства теорем. Р.А. Шафиеву принадлежат постановки задач и общее руководство. Все утверждения, леммы и теоремы, приведенные в диссертациии и опубликованные в совместных статьях [1, 2, 3], сформулированы и доказаны Е.А. Бондарь. И.Ю. Ястребова осуществляла консультации по вопросам, связанным с теорией псевдообратных операторов и теорией некорректных задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 56 наименований. Материал диссертации изложен на 113 страницах.

Содержание работы

Во введении дается краткий обзор литературы по теме диссертации, обосновывается актуальность выбранной проблематики и приводится аннотация работы.

Первая глава состоит из трех параграфов. В п.1.1 вводится определение псевдообратного оператора к оператору $U\colon X \to G$, который обозначается U^+, приводятся нужные для дальнейшего его свойства и связь с нормальным псевдорешением уравнения (2).

Важную роль в работе играет составной оператор $\Gamma = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} : X \to G = Z \times Y$, ядро которого $N(\Gamma) = N(A) \cap N(B)$. Ортопроекторы на ядра $N(B)$ и $N(\Gamma)$ обозначаются без индексов:

$$P_{N(B)} = P, \qquad P_{N(\Gamma)} = Q.$$

В диссертации задача связанного псевдообращения называется основной задачей, а искомые элементы $x_*,\ x^*$ – решением и нормальным решением основной задачи. В п.1.2 устанавливаются условия разрешимости основной задачи, вид и свойства решений. Так, нормальное решение имеет вид

$$x^* = B^+z + (AP)^+(y - AB^+z),$$

и является единственным решением, лежащим в $N(\Gamma)^\perp$; решение основной задачи

$$x_* = x^* + Qx_0$$

и характеризуется включением $x_* - x_0 \in N(\Gamma)^\perp$. Показано, что точки множества X_A и только они удовлетворяют двум вариационным уравнениям Эйлера

$$B^*(Bx - z) = 0, \qquad PA^*(Ax - y) = 0. \tag{3}$$

Как известно, в случае задачи псевдообращения (2) вариационное уравнение Эйлера

$$A^*(Ax - y) = 0 \tag{4}$$

используется для построения нестационарных методов регуляризации.

Так как ортопроектор P в (3) фактически неизвестен, то эта система уравнений оказалась неподходящей для построения методов регуляризации основной задачи. Поэтому в п.1.3 приводится вывод однопараметрического семейства уравнений

$$\Gamma_r^*(\Gamma_r x - g_r) = 0, \quad r > 0, \tag{5}$$

где

$$\Gamma_r = \begin{bmatrix} \sqrt{r}B \\ A \end{bmatrix} : X \to G, \qquad g_r = \begin{bmatrix} \sqrt{r}z \\ y \end{bmatrix} \in G,$$

и показывается, что множество решений этого семейства $\{\Gamma_r^+ g_r + N(\Gamma)\}$ обладает аппроксимирующим свойством по отношению к множеству X_A. Задача нахождения множества решений семейства (5) называется аппроксимирующей задачей и это семейство вместо (3) кладется в основу построения метода установления для решения основной задачи.

Для построения непрерывных методов регуляризации используется регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова решения аппроксимирующей задачи:

$$\alpha x + \Gamma_r^*(\Gamma_r x - g_r) = 0, \qquad \alpha,\ r > 0. \tag{6}$$

В п.1.3 исследуется метод регуляризации (6) в предположении, что основная задача разрешима и выполнены условия

$$A^*(Ax^* - y) \in R(B^*) \oplus N(B), \tag{7}$$

$$x^* \in R(\Gamma^*). \tag{8}$$

Вообще, условия (7) и (8) требуются для получения оценки погрешности метода, однако, и для установления сходимости освободиться от условия (7) не удалось.

В диссертации построены три нестационарных метода решения основной задачи.

Исходя из семейства уравнений (5), построен метод установления или метод задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_r(t)}{dt} + \Gamma_r^*\Gamma_r x_r(t) = \Gamma_r^* g_r, \quad 0 \le t < +\infty, \quad r > 0, \\ x_r(0) = x_0. \end{cases} \tag{9}$$

Параметрами регуляризации в этом методе являются r и t.

Для построения двух других методов используется семейство уравнений (6), записанное в нестационарном виде

$$\alpha(t)x(t) + \Gamma_{r(t)}^*(\Gamma_{r(t)}x - g_{r(t)}) = 0, \tag{10}$$

где роль параметров регуляризации выполняют положительные функции $\alpha(t),\ r(t)$, определенные при $t \ge t_0 \ge 0$.

Непрерывный метод регуляризации первого порядка

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t) + \Gamma_{r(t)}^*(\Gamma_{r(t)}u(t) - g_{r(t)}) = 0, \\ u(t_0) = u_0, \quad t \ge t_0, \quad u_0 \in X, \end{cases} \tag{11}$$

получен применением метода Я.И. Альбера к семейству уравнений (10), а непрерывный метод регуляризации второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \mu\frac{du(t)}{dt} + \beta(t)\Big[\alpha(t)u(t) + \Gamma_{r(t)}^*(\Gamma_{r(t)}u(t) - g_{r(t)})\Big] = 0, \\ u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_0', \quad t \ge t_0, \end{cases} \tag{12}$$

где $\mu > 0$, а $\beta(t)$ – положительная функция, определенная при $t \geq t_0$, а u_0, u_0' – произвольные элементы, – применением к (10) метода тяжелого шарика.

В каждом из методов (9), (11), (12) нормальное решение (а в методе (9) просто решение) основной задачи ищется как предел решения соответствующей задачи Коши при стремлении аргумента к бесконечности.

Различие же методов (11), (12) и метода (9) прежде всего в том, что в первом случае мы имеем дело с одним дифференциальным уравнением, а во втором – с семейством дифференциальных уравнений, зависящим от параметра r. Поэтому в методе (9) регуляризованные решения основной задачи находятся при различных фиксированных значениях r, каждый раз путем полного решения задачи Коши, а в методах (11) и (12) вопрос сводится к нахождению решения соответствующей задачи Коши для достаточно большого значения аргумента t. Ясно, что для этого можно воспользоваться хорошо разработанным аппаратом численного интегрирования дифференциальных уравнений. Кроме того, конечноразностные аппроксимации непрерывных методов (11), (12) приводят к другим итерационным методам, чем те, которые получаются в случае метода (9). Кстати, рассмотренные Е.В. Архаровым итерационные методы можно получить как конечноразностные аппроксимации метода (9).

Заметим также, что метод (9) ни при каких условиях не переходит в однопараметрический, а в методах (11) и (12) можно положить $\alpha(t) \equiv 0$, если операторы A и B дополнительные, как у В.А. Морозова.

Что касается методов (11) и (12), то А.С. Антипин указывает на преимущество методов второго порядка по сравнению с методами первого порядка, например, они дают более широкую свободу при выборе методов численного интегрирования соответствующих задач Коши.

Таким образом, исследование каждого из построенных нестационарных методов решения основной задачи представляет интерес.

Метод установления исследован во второй главе. В этом случае решение задачи Коши (9) выписывается в явном виде

$$x_r(t) = e^{-t\Gamma_r^*\Gamma_r}x_0 + \int\limits_0^t e^{-(t-s)\Gamma_r^*\Gamma_r}\Gamma_r^* g_r ds,$$

и непосредственными оценками устанавливается сходимость и устойчивость метода. В п.2.1 устанавливаются необходимые для исследования соотношения и доказывается сходимость метода.

Основные результаты содержатся в п.2.2. Приведем теорему об устойчивости регуляризованных решений. Для этого предполагается, что входные данные задачи известны приближенно с известными уровнями погрешности:

$$\|A_l - A\| \le l, \quad \|B_h - B\| \le h, \quad \|y_\tau - y\| \le \tau, \quad \|z_\delta - z\| \le \delta, \tag{13}$$

и возмущенное регуляризованное решение обозначается $\tilde{x}_r(t)$.

Теорема 2.3 [2, 3]. Пусть основная задача разрешима и выполнено условие (7). Если параметры регуляризации $t = t(\eta, \sigma)$, $r = r(\eta, \sigma)$, где $\eta = \eta(h, \delta)$, $\sigma = \sigma(l, \tau)$, выбирать так, что

$$t \to +\infty, \quad r \to +\infty, \quad \frac{t}{r} \to 0, \quad rt(\delta^2 + h) \to 0, \quad t(\tau^2 + l) \to 0$$

при $\eta \to 0$, $\sigma \to 0$, то

$$\tilde{x}_r(t) \to x_* \text{ при } \eta \to 0, \quad \sigma \to 0,$$

где x_* – ближайшее к x_0 решение основной задачи. Если выполнено еще условие (8), то для $\|\tilde{x}_r(t) - x_*\|$ получена мажорантная оценка.

Пользуясь этой оценкой установлено, что при следующем априорном выборе параметров регуляризации $r = (\tau + l)^{-\frac{4}{3}}$, $t = (\tau + l)^{-\frac{2}{3}}$ справедлива асимптотическая оценка погрешности

$$\overline{\lim_{\tau, l \to 0}} \frac{\|\tilde{x}_r(t) - x_*\|}{(\tau + l)^{\frac{1}{3}}} \le const, \tag{14}$$

при этом предполагается, что $\delta + h = K(\tau + l)^{7/3}$, т.е. оператор B_h и z_δ вычислены с большей точностью.

Заметим, что уравнение (5) в частном случае задачи псевдообращения $(B = 0, z = 0)$ переходит в уравнение (4), поэтому методы регуляризации основной задачи, построенные по уравнению (5), в случае $B = 0, z = 0$ в точности переходят в соответствующие методы регуляризации задачи псевдообращения.

Это обстоятельство дает возможность в некоторой степени определить уровень полученных результатов. Для этого в диссертации приводятся следствия для данного частного случая. Сравнение показывает, что они соответствуют известным ранее результатам. Например, асимптотическая оценка (14) для частного случая оказывается не улучшаемой по порядку. Т.о., исследования в диссертации хотя и носят общий характер для частного случая оказываются не хуже известных.

В п.2.3 на операторы A и B накладываются условия обобщенной дополнительности:

$$\exists\,\gamma > 0: \qquad \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \geq \gamma^2 \|x\|^2, \qquad \forall x \in (N(A) \cap N(B))^{\perp}. \quad (15)$$

Так как в этом случае $R(\Gamma^*) = N(\Gamma)^{\perp}$, то условие (8) выполнено. Предполагая, что возмущенные операторы A_l и B_h удовлетворяют (13) и принадлежат классу устойчивого вычисления псевдообратного Γ^+ (этот класс возмущений описан в теореме 1.10 и замечании 1.11 главы I) в теореме 3.6 устанавливается оценка $\|\tilde{x}_r(t) - x_*\|$. Приведем здесь вывод из полученной оценки:

Следствие 3.7. Если основная задача разрешима и выполнено условие (7), то имеет место сходимость

$$\tilde{x}_r(t) \to x_*$$

$$\text{при} \quad r, t \to \infty \quad \tau, l, \delta, h \to 0, \quad \sqrt{r}\delta + rh \to 0.$$

Непрерывные методы регуляризации основной задачи рассмотрены в третьей и четвертой главах. Исследование этих методов использует дифференциальные неравенства первого и второго порядков, которые приводятся в п.3.1. В этом же параграфе установлены теоремы существования, единственности и продолжимости на полуось $[t_0, +\infty)$ решений задач Коши для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (11) и (12), принадлежащих соответственно классам $C^1[t_0, +\infty)$ и $C^2[t_0, +\infty)$.

В п.3.2 находятся условия на параметрические функции, обеспечивающие стабилизацию решения точной и возмущенной задачи Коши (11) к нормальному решению основной задачи. В возмущенном случае предполагается, что семейства $\{A(t)\}$, $\{B(t)\}$ ограниченных операторов аппроксимируют операторы A, B и

$$\begin{array}{ll} \|A(t) - A\| \leq l(t), & \|B(t) - B\| \leq h(t), \\ \|y(t) - y\| \leq \nu(t), & \|z(t) - z\| \leq \delta(t), \end{array} \qquad (16)$$

где $l(t), h(t), \nu(t), \delta(t)$ – неотрицательные функции, определенные и непрерывные при $t \geq t_0$.

Приведем схему доказательства основной в этом пункте теоремы 2.4. об устойчивости непрерывного метода регуляризации первого порядка.

Обозначая через $\upsilon(t),\ u(t)$ – решения возмущенной и точной задачи Коши (11), через $x_{r\alpha}(t)$ – решение уравнения (10), полная погрешность $\|\upsilon(t)-x^*\|$ представляется в виде

$$\|\upsilon(t)-x^*\| \leq \|x^*-x_{r\alpha}(t)\| + \|x_{r\alpha}(t)-u(t)\| + \|u(t)-\upsilon(t)\|.$$

Исследование первого слагаемого практически проведено в первой главе диссертации. Что касается второго и третьего слагаемых, то для каждого из них составляется скалярное дифференциальное неравенство.

Устанавливается, что $\|x_{r\alpha}(t) - u(t)\|$ удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$\frac{d\|x_{r\alpha}(t)-u(t)\|}{dt} + \alpha(t)\|x_{r\alpha}(t)-u(t)\| \leq c\Big(\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} + \frac{|r'(t)|}{\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)r(t)}}\Big),$$

с начальным условием $\|x_{r\alpha}(t_0)-u(t_0)\| = \|x_{r\alpha}(t_0)-u_0\|$,
а $\|u(t)-\upsilon(t)\|$ - дифференциальному неравенству того же вида

$$\frac{d\|u(t)-\upsilon(t)\|}{dt} + \alpha(t)\|u(t)-\upsilon(t)\| \leq c\Big(r(t)(h(t)+\delta(t)) + l(t) + \nu(t)\Big)$$

с начальным условием - $\|u(t_0)-\upsilon(t_0)\| = 0$.

Стремление к нулю при $t\to\infty$ решений этих неравенств обеспечивают условия

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\alpha(t)dt = +\infty, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha(t)}\Big(\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} + \frac{|r'(t)|}{\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)r(t)}}\Big)\to 0,\\ \frac{1}{\alpha(t)}\Big(r(t)(h(t)+\delta(t)) + l(t) + \nu(t)\Big)\to 0.\end{gathered} \tag{18}$$

К этим соотношениям прибавляются условия, при которых $\|x^*-x_{r\alpha}(t)\|\to 0$, а именно:

$$\alpha(t)\to 0, \quad r(t)\to\infty, \quad \frac{1}{\alpha(t)r(t)}\to 0, \tag{19}$$

а также условия разрешимости основной задачи и включения (7), (8).

Совокупность этих условий обеспечивает устойчивость непрерывного метода регуляризации первого порядка. В диссертации приводится система функций $\alpha(t), r(t), h(t), \delta(t), l(t), \nu(t)$, удовлетворяющих условиям (17) - (19):

$$t_0 > 0, \quad \alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}, \quad r(t) = t^r, \quad h(t) = \delta(t) = \frac{1}{t^h}, \quad l(t) = \nu(t) = \frac{1}{t^l},$$

где положительные числа $\alpha,\ r,\ h,\ l$ удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha < \frac{1}{3}, \quad r = -2\alpha + 1, \quad h > \alpha + r = 1 - \alpha, \quad l > \alpha.$$

В п.3.3 непрерывный метод регуляризации первого порядка исследуется при условии обобщенной дополнительности операторов A и B, что позволяет ослабить условия (17) - (19) на параметрические функции. Приведем один легко формулируемый результат

Теорема 3.8 [4]. Пусть основная задача разрешима, операторы A и B – дополнительные, т.е. неравенство (15) имеет место $\forall\ x \in X$, семейства $\{A(t)\},\ \{B(t)\}$ возмущенных операторов удовлетворяют условию аппроксимации (16).

Если выполняются условия

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{|r'(t)|}{\sqrt{r(t)}} = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} r(t)(h(t) + \delta(t)) = 0, \tag{20}$$

то решение возмущенной задачи Коши (11), где $\alpha(t) \equiv 0$, при любом u_0 стабилизируется к нормальному решению основной задачи.

Условиям (20) удовлетворяют функции $r(t) = t^r$, и $h(t) = \delta(t) = 1/t^h$, если $0 < r < 2$ и $h > r$.

В главе IV исследуется непрерывный метод регуляризации второго порядка. Исследование использует технику, предложенную Ф.П.Васильевым: коэффициенты дифференциального уравнения в (12) замораживаются в точке $t = \tau$ и при $\tau \geq t_0$ рассматривается вспомогательное семейство задач Коши.

Существование и единственность при $\forall\ \tau$ решения $u(t,\tau)$ этого вспомогательного семейства следует из соответствующей теоремы п.3.1.

В п.4.1 найдены условия на коэффициенты $\alpha(t), r(t), \beta(t)$ и уровни возмущений $l(t), h(t), \nu(t), \delta(t)$ при которых $\|u(\tau,\tau) - x_{r\alpha}(\tau)\| \to 0$ и

$\|v(\tau) - u(\tau,\tau)\| \to 0$ при $\tau \to +\infty$ ($v(t)$ – решение возмущенной задачи Коши (12)), тем самым обеспечивая устойчивость непрерывного метода второго порядка.

Эти условия несколько более сложные, чем условия (17)-(19), найденные в случае метода первого порядка, поэтому здесь не приводятся.

Отметим, что в диссертации приводится система функций, на которых эти условия реализуются.

В п.4.2 тот же метод исследован в предположение обобщенной дополнительности операторов A и B. Приведем следующий результат.

Теорема 2.5 [5]. Пусть основная задача разрешима и выполнены условия аппроксимации (16). Тогда, если операторы A и B дополнительные, а функции $r(t)$, $\beta(t)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} r^2(t)\beta(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \Big\{\beta^2(s) + \bar{r}^2(s)\Big\}\varphi(s,t)ds = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \Big\{|\bar{r}(s) - \bar{r}(t)| + |\beta(s) - \beta(t)|\Big\}\varphi(s,t)ds = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \Big\{\bar{r}(s)[h(s) + \delta(s)] + \beta(s)[l(s) + \nu(s)]\Big\}\varphi(s,t)ds = 0,$$

где $\bar{r}(t) = r(t)\beta(t)$, $\varphi(s,t) = \exp[2\gamma^2\mu^{-1}\beta(t)(s-t)]$, то решение возмущенной задачи Коши (12), где $\alpha(t) \equiv 0$, при $t \to +\infty$ стабилизируется к нормальному решению основной задачи.

Условиям приведенной теоремы удовлетворяет система функций: $t_0 > 0$, $r(t) = t^r$, $\beta(t) = 1/t^\beta$, $h(t) = \delta(t) = 1/t^h$, $l(t) = \nu(t) = 1/t^l$, где $r,\ \beta,\ h\ ,\ l\ > 0$, $\beta < 1$, $2r < \beta$, $h > r$.

В главе V задана линейная динамическая управляемая система:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = W(t)x(t) + V(t)u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{21}$$

где $x(t)$ - ν-мерная вектор-функция состояния, $u(t)$ - μ-мерная вектор-функция управления, $W(t),\ V(t)$ - матричные функции порядка $\nu \times \nu$ и $\nu \times \mu$ соответственно, интегрируемые с квадратом на $[t_0,\ t_1]$, и заданы $\varphi(t)$ - ν-мерная вектор-функция наблюдения и следующие функционалы платы (критерии качества):

$$J_1(u) = \Big(x(t_1) - \varphi(t_1),\ x(t_1) - \varphi(t_1)\Big),$$

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(x(t) - \varphi(t),\ Q(t)(x(t) - \varphi(t))\Big)dt,$$

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(u(t),\ R(t)u(t)\Big)dt,$$

где $Q(t)$ - симметрическая положительная матричная функция порядка $\nu \times \nu$, $R(t)$ - симметрическая положительно определенная матричная функция порядка $\mu \times \mu$, обе интегрируемые и ограниченные на $[t_0,\ t_1]$.

Допустимые управления образуют вещественное гильбертово пространство H вектор-функций из $L_2\Big([t_0,\ t_1];\ \mathbb{R}^\mu\Big)$ с другим, чем в L_2 скалярным произведением

$$\langle u,\ v\rangle = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(u(t),\ R(t)v(t)\Big)_{\mathbb{R}^\mu} dt.$$

Рассмотрены следующие задачи:

Задача I: найти оптимальное управление $u^* \in H$, удовлетворяющее условиям:

$$J_1(u^*) \leq J_1(u) \quad \forall\ u \in H;$$
$$J(u^*) + J_2(u^*) \leq J(u) + J_2(u) \quad \forall\ u \in \Big\{J_1(u) = J_1(u^*)\Big\};$$

Задача II: найти (оптимальное) управление $u^* \in H$, удовлетворяющее условиям:

$$J_1(u^*) \leq J_1(u) \quad \forall\ u \in H;$$
$$J_2(u^*) \leq J_2(u) \quad \forall\ u \in \Big\{J_1(u) = J_1(u^*)\Big\};$$

$$J(u^*) \le J(u) \quad \forall\ u \in \Big\{ J_i(u) = J_i(u^*), \quad i = 1, 2 \Big\}.$$

Отметим, что задача I поставлена в работе N.Minamide и K.Nakamura.

С помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t,s)$ системы (21) задачи I и II приводятся к основной задаче, нормальным решением которой является оптимальное управление.

В диссертации к вычислению оптимального управления применены метод установления и непрерывный метод первого порядка.

Например, в случае метода установления задача Коши (9) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \xi} u_r(t,\xi) + \beta u_r(t,\xi) + \\
+ r R^{-1}(t) V^*(t) \Phi^*(t_1,t) \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s) V(s) u_r(s,\xi) ds + \\
+ R^{-1}(t) V^*(t) \int\limits_{t}^{t_1} \Phi^*(s,t) Q(s) \Big(\int\limits_{t_0}^{s} \Phi(s,\tau) V(\tau) u_r(\tau,\xi) d\tau \Big) ds = \\
= r R^{-1}(t) V^*(t) \Phi^*(t_1,t) (\varphi(t_1) - \Phi(t_1,t_0) x_0) + \\
+ R^{-1}(t) V^*(t) \int\limits_{t}^{t_1} \Phi^*(s,t) Q(s) (\varphi(s) - \Phi(s,t_0) x_0) ds \\
u_r(t,0) = 0, \qquad 0 \le \xi < +\infty, \quad r > 0, \quad t_0 \le t \le t_1.
\end{gathered} \tag{22}$$

где $\beta = 1$ в случае задачи I и $\beta = 0$ в случае задачи II.

Теорема 2.1. Решение $u_r(t,\xi)$ задачи Коши (22) при $\xi \to +\infty,\ r \to +\infty$ стабилизируется к оптимальному управлению $u^* = u^*(t)$ задачи I в норме пространства H:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \| R^{1/2}(t) \Big(u_r(t,\xi) - u^*(t) \Big) \|^2_{\mathbb{R}^\mu} dt \to 0 \ \text{ при } \ \xi \to +\infty,\ r \to +\infty.$$

В случае задачи II существование оптимального управления $u^* = u^*(t)$ предполагается и стабилизация решения $u_r(t,\xi)$ задачи Коши (22) к $u^*(t)$ по норме пространства H имеет место при $\xi \to +\infty,\ r \to +\infty,\ \xi / r \to 0$.

Рассмотрен иллюстративный пример.

В заключении диссертации сформулированы основные результаты, которые приведены в пункте "Научная новизна исследования".

Работы, опубликованные по теме диссертации

1. Бондарь Е.А., Ястребова И.Ю. Метод установления для задачи связанного псевдообращения // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. В.1(26). С. 55-63.

2. Бондарь Е.А., Ястребова И.Ю. Непрерывный метод регуляризации решения задачи связанного псевдообращения //Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф., Екатеринбург, 2-6 февр. 2004 года. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. С. 20.

3. Бондарь Е.А., Ястребова И.Ю. Метод установления для задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Известия Челябинского научного центра. – е. 2005. В.1(27). С. 1-6.

4. Бондарь Е.А., Шафиев Р.А. Непрерывный метод решения задачи связанного псевдообращения // Вестник ННГУ. Математика. 2006. В.1(4). С. 4-14.

5. Бондарь Е.А., Шафиев Р.А. Непрерывный метод регуляризации второго порядка // Тезисы Всероссийской научной конференции "Математика. Механика. Информатика". Челябинск. 2006. С. 19.