

На правах рукописи



Федоров Александр Евгеньевич

**ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ**

Специальность: 01.02.06 –
динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2007

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор Г.Г. Денисов
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник В.В. Новиков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Дерендяев
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.М. Урман

Ведущая организация: Нижегородский филиал Института
машиноведения им. А.А. Благодрава РАН

Защита состоится “27” декабря 2007 г. в 13⁰⁰ час. на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр-т Гагарина, 23, корп. 6

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан “27” ноября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук,
доцент



Б.В. Трухин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Современные высокие требования к характеристикам оборудования, таким как: точность измерений, продолжительность и стабильность работы, энергопотребление, малое трение (или его отсутствие) можно удовлетворить внедрением в конструкцию элементов, использующих безопорное вывешивание тел (левитацию). Использование левитации позволяет конструировать высокоскоростные поезда, сверхточные гироскопы, ультрацентрифуги для разделения веществ, изолированные от внешних воздействий антенны для приема гравитационных волн и так далее.

Левитация заряженного тела в электростатическом поле или ферромагнитного тела в магнитном поле обычно обеспечивается за счет сложных систем управления на основе обратной связи. Другая, обнаруженная относительно недавно возможность обеспечения пассивной стабилизации изначально неустойчивого подвеса связана с дополнительным введением в систему сил определенной структуры (гироскопических, диссипативных, циркуляционных). Исследование такого подхода к стабилизации тел, вывешенных в силовых полях, представляется весьма актуальным.

Цели работы:

- Обоснование способа осуществления левитации тела с электрическим зарядом в электростатическом поле за счет выбора структуры сил.
- Развитие модели, описывающей динамику тела с электрическим зарядом в электростатическом поле. Аналитическое исследование влияния гироскопических, диссипативных и циркуляционных сил на устойчивость движения.
- Численное исследование нелинейных моделей с целью выяснения зависимости области притяжения равновесного состояния от параметров системы и от конфигурации электростатического поля.

- Исследование динамики двух свободных гравитирующих тел, несущих электрические заряды.

Методика исследований основана на применении аналитических и численных методов для исследований условий устойчивости рассматриваемых систем. Исследования проводились с использованием метода D-разбиений, прямым методом Ляпунова, с помощью критериев Сильвестра и Рауса-Гурвица. Также применялось численное интегрирование задач Коши методами Эйлера и Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для численного исследования многомерных областей устойчивости в пространстве параметров системы применялся метод дихотомии и другие итерационные алгоритмы.

Научная новизна работы.

Впервые показана возможность стабилизации тела несущего точечный заряд в электростатическом поле только за счет механических сил. Гироскопическая стабилизация ранее исследовалась только на системах с постоянными магнитами. Была получена ограниченная область в пространстве параметров линеаризованной системы, соответствующая консервативной устойчивости.

Известно, что диссипация разрушает консервативную устойчивость. В работе показано, что совместное влияние на вешиваемое в силовом поле тело диссипативных и циркуляционных сил упрочняет устойчивость до асимптотической.

Численно исследованы способы максимизации области притяжения равновесного состояния системы. Нигде ранее, насколько автору известно, такая задача для рассматриваемых систем (в том числе и для построенных на постоянных магнитах) не решалась.

Показана возможность стабилизации двух свободных гравитирующих тел, несущих электрические заряды только за счет собственного вращения. Указано, что полученные результаты обобщают теорему Кельвина о достаточных

условиях гироскопической стабилизации систем с четной степенью неустойчивости на случай вырожденной матрицы гироскопических сил.

Достоверность подтверждается сравнением результатов, полученных разными методами; сравнением полученных условий устойчивости с результатами численного эксперимента.

Динамика реализованных на практике с использованием постоянных магнитов систем, описываемых в первом приближении предлагаемой моделью, также подтверждает достоверность полученных результатов.

Практическая ценность.

Выделено небольшое число параметров системы, изменяя которые, можно добиться устойчивости тела с электрическим зарядом в электростатическом поле либо постоянного магнита в магнитном поле (в линейном приближении динамика обеих систем описывается одними и теми же уравнениями). Это позволяет выработать рекомендации инженерам по конструированию прибора.

В связи с тем, что в системах с трением консервативная устойчивость недостижима, необходимо, чтобы при работе устройства устойчивость была асимптотической. Такая возможность появляется, если вместе с силами диссипации на вешенное тело действуют циркуляционные силы, которые можно реализовать, например, поместив вешиваемое тело во вращающийся цилиндрический кожух.

Разработана методика расчета области притяжения равновесного состояния системы, позволяющая рассчитать эту область для любого устройства (любого набора параметров). Указаны способы повышения стабильности работы устройства, в частности, за счет изменения конфигурации электростатического поля.

Защищаемые положения работы.

- Обоснование принципа достижения устойчивости тела с зарядом в электростатическом поле.
- Развитие модели, описывающей динамику тела, несущего электрический заряд, в электростатическом поле, а также результаты аналитического и численного исследований условий устойчивости.
- Результаты численного исследования способов максимизации области притяжения равновесного состояния системы.
- Результаты численного исследования динамики двух свободных гравитирующих тел, несущих электрические заряды.

Апробация работы.

Основные результаты работы представлялись на следующих конференциях и семинарах:

Пятой молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения 2006” (Казань, 2006), Четвертой всероссийской конференции “Необратимые процессы в природе и технике” (Москва, 2007), семинаре по Теоретической Физике в ИПФРАН (Нижний Новгород, 2007), 11 Нижегородской сессии молодых ученых “Математические науки” (“Красный плес”, 2006), семинаре Климова, Журавлева в Институте проблем механики РАН (Москва, 2005), Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН “Фундаментальные проблемы машиноведения: Новые технологии и материалы” (Нижний Новгород, 2006), Второй всероссийской научной конференции “Волновая динамика машин и конструкций” (Нижний Новгород, 2007), итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса “Модели, методы и программные средства” “Математическое моделирование и оптимизация” (Нижний Новгород, 2007).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в [1-6]. В работах, выполненных в соавторстве, научным руководителям принадлежит постановка задачи, выбор методов исследований, обсуждение результатов.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 100 страницах, содержит 73 рисунка. Список литературы состоит из 77 наименований.

Во введении представлена историческая справка по проблеме левитации тел. Обоснована актуальность и практическая значимость работы. Дан обзор наиболее интересных и близких к выбранной тематике работ отечественных и зарубежных авторов.

Под термином “левитация” понимают состояние, при котором твердое тело “парит” в силовом поле подвеса без какого-либо механического контакта с окружающими телами. В первой половине XX века был впервые реализован магнитный подвес ферромагнитных тел. В 1945 г. В.К. Аркадьев осуществил устойчивую левитацию свободного тела с диамагнетиком.

Одно из главных преимуществ использования бесконтактного подвеса в научном и промышленном приборостроении – это малое трение (или даже его отсутствие) в узлах прибора, что сокращает энергетические затраты на преодоление сопротивления, понижает уровень шума, повышает чувствительность датчиков в измерительных приборах, делает возможным достижение высоких скоростей движения вывешенных в силовом поле тел. Это позволяет конструировать высокоскоростные поезда, сверхточные гироскопы, ультрацентрифуги для получения сверхчистых веществ, антенны для приема гравитационных волн, термоядерные реакторы. Список можно продолжить. Не все области применения левитации изучены, но там, где безопорное парение

уже используется, сделан значительный шаг вперед, дан новый импульс развитию целых отраслей промышленности.

В настоящее время известны следующие категории неконтактных подвесов: электростатические, электромагнитные, криогенные, а также комбинированные. Вопросы, обсуждаемые в данной работе, относятся не только к электростатическим подвесам, но и позволяют лучше понять динамику подвесов других типов.

Одно из главных препятствий, возникающих перед разработчиками электростатических или электромагнитных подвесов, сформулировано в теореме Ирншоу, согласно которой любая статическая конфигурация тел, взаимодействующих друг с другом с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, неустойчива.

В работах Ю.Г. Мартыненко показано, что систему зарядов можно стабилизировать введением магнитного поля с достаточно большим значением магнитной индукции. Система в этом случае становится эквивалентной волчку Лагранжа, который стабилизируется благодаря присутствию в системе гироскопических сил. Стабилизация достигается при достаточно большой скорости собственного вращения. Область устойчивости по параметру гироскопических сил оказывается ограниченной снизу. Этот результат объясняется теоремой Кельвина о достаточных условиях гироскопической стабилизации.

В данной работе исследуется возможность стабилизации системы зарядов только механическими силами, без введения магнитного поля.

Исследование левитации постоянного магнита в поле другого магнита проведено в работах И.В. Веселитского, В.С. Воронкова, Г.Г. Денисова, Р.В. Линькова и др. В положении равновесия центры масс обоих магнитов располагаются на одной вертикали так, что вес верхнего подвижного магнита компенсируется силой отталкивания со стороны нижнего. При этом положение равновесия, как и в случае с зарядами, не будет устойчивым. Линеаризованные уравнения возмущенного движения подвижного магнита представляют собой

систему шести уравнений, два из которых отделяются. Показано, что область устойчивости ограничена по всем параметрам системы.

В первой главе дается постановка задачи о движении тела, несущего электрический заряд, в электростатическом поле неподвижного одноименного точечного заряда, и исследуются условия устойчивости такой системы.

В вывешиваемом теле положение заряда не совпадает с центром масс. Такой случай моделируется твердым осесимметричным телом и жестко связанным с ним точечным зарядом, отстоящим от центра масс на расстояние a (рис. 1). Тело вывешивается в поле другого неподвижного точечного заряда того же знака и приводится во вращение вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω .

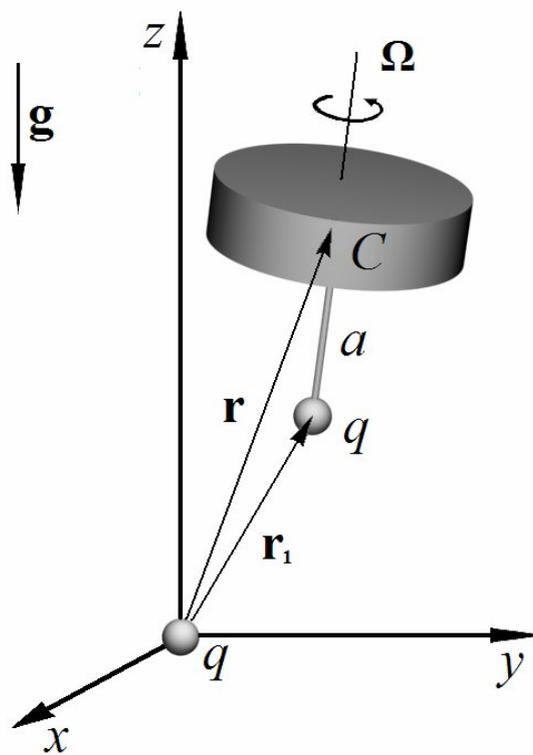


Рис. 1

Равновесному состоянию системы, в котором сила тяжести компенсируется силой Кулона, отвечает вращение с постоянной угловой скоростью Ω с центром масс (точка C на рис. 1) в точке $X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = const$ и углами наклона оси вывешиваемого тела $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$. В безразмерных переменных связанные линеаризованные уравнения движения будут следующими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x - \delta \alpha, \\ \ddot{y} &= y - \delta \beta, \\ \ddot{\alpha} &= -\delta x - H\dot{\beta} + \chi \alpha, \\ \ddot{\beta} &= -\delta y + H\dot{\alpha} + \chi \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь δ - расстояние от заряда до центра масс, χ - коэффициент возвращающего момента, H - параметр гироскопических сил, прямо пропорциональный угловой скорости собственного вращения.

Гирскопические силы, обусловленные собственным вращением тела, присутствуют лишь в двух уравнениях движения. Матрица гирскопических сил вырождена, и теорема Кельвина о достаточных условиях гирскопической стабилизации консервативных систем с четной степенью неустойчивости в этом случае неприменима.

Уравнение частот будет следующим:

$$p^4 - Hp^3 + (1 + \chi)p^2 - Hp - \delta^2 + \chi = 0. \quad (2)$$

Зависимость $H(p)$, полученная из (2), запишется следующим образом

$$H = \frac{p^4 + (1 + \chi)p^2 + \chi - \delta^2}{p(p^2 + 1)}.$$

График зависимости $H(p)$ при условии $\delta > 0$, $\chi > \delta^2$, $H > 0$ (это соответствует положению центра масс волчка над зарядом) имеет вид, показанный на рис. 2. При значениях H

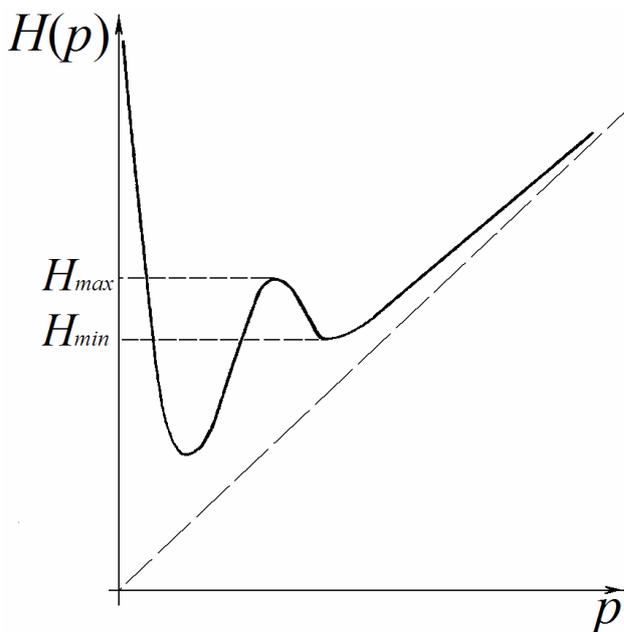


Рис. 2

из интервала $[H_{\min}, H_{\max}]$ все корни уравнения (2) будут действительными, то есть система будет консервативно устойчивой. Здесь, в отличие от волчка Лагранжа, область, отвечающая

стабилизации системы, оказывается ограниченной и снизу, и сверху. Проведенное рассмотрение обобщает теорему Кельвина о достаточных условиях гирскопической стабилизации на случай вырожденной матрицы гирскопических сил.

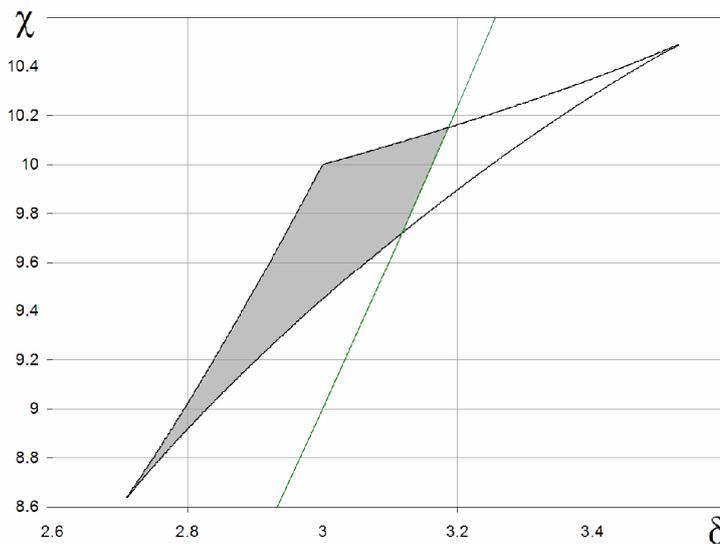


Рис. 3

На рис. 3 в качестве примера

приведена область устойчивости в пространстве параметров δ , χ при фиксированном $H=6$, для случая $\chi > \delta^2$. При значениях параметров из этой области, уравнение частот (2) имеет четыре действительных корня.

В случае $\delta < 0$, $\chi < \delta^2$, $H > 0$ зависимость $H(p)$ может иметь вид, показанный на рис. 4. При значениях H из интервала $[H_{\min}, H_{\max}]$ характеристическое уравнение имеет четыре действительных корня, один из которых отрицателен. Положение центра масс в состоянии равновесия будет ниже заряда. Технически такое устройство можно сконструировать с помощью полого конуса, внутри которого будет находиться неподвижный заряд, а в вершине - подвижный.

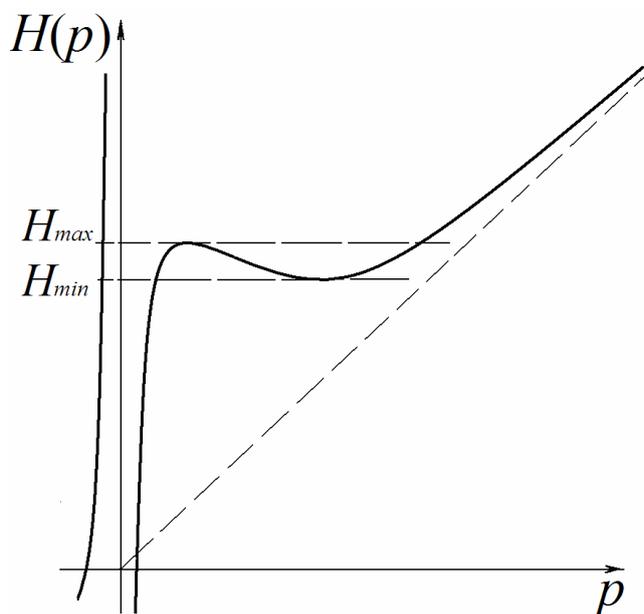


Рис. 4

На плоскости $\delta\chi$ область, внутри которой уравнение частот (2) имеет четыре корня, будет симметрична относительно прямой $\delta = 0$. Разница в том, что для рассматриваемого случая область устойчивости будет ниже параболы $\chi = \delta^2$. Фиксированному $H=6$ соответствует область, показанная на рис. 5.

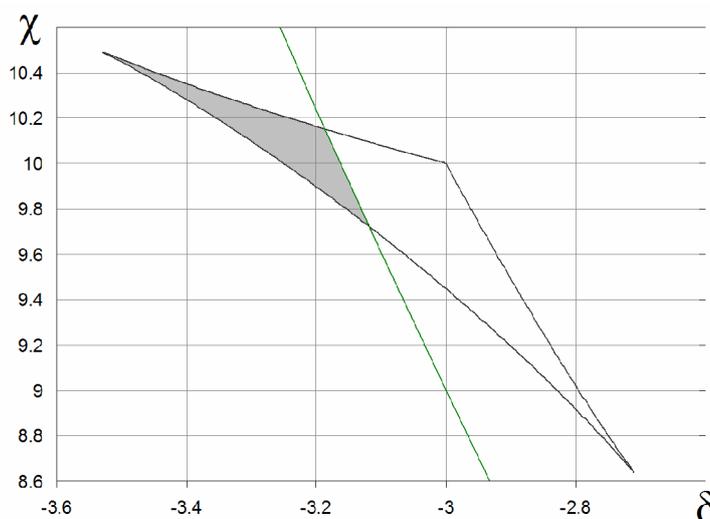


Рис. 5

Другим подходом к исследованию области устойчивости является прямой метода Ляпунова. В качестве

функции Ляпунова рассмотрена линейная связка интегралов.

$$V = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3 + V_4.$$

Интегралы системы найдены методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} E = V_1 &= (-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - \chi x_5^2 + x_6^2 - \chi x_7^2 + x_8^2) / 2 + \delta x_1 x_5 + \delta x_3 x_7, \\ K_z = V_2 &= x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_6 x_7 - x_5 x_8 + H(x_5^2 + x_7^2) / 2, \\ V_3 &= x_1 x_8 - x_2 x_7 + x_4 x_5 - x_3 x_6 - \frac{H}{2\delta} (x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 - x_8^2) + \frac{1-\chi}{\delta} (x_5 x_8 - x_6 x_7), \\ V_4 &= x_2 x_6 + x_4 x_8 + \frac{1-\chi}{2\delta} (x_6^2 + x_8^2) - H(x_4 x_5 - x_2 x_7 + \frac{1}{\delta} x_5 x_8 - \frac{1}{\delta} x_6 x_7) + \\ &+ (x_1^2 + x_3^2) \delta / 2 + \frac{1}{2\delta} (H^2 + \delta^2 + \chi^2 - \chi)(x_5^2 + x_7^2) - \chi(x_1 x_5 + x_3 x_7). \end{aligned}$$

Здесь $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = \alpha$, $x_6 = \dot{\alpha}$, $x_7 = \beta$, $x_8 = \dot{\beta}$. Первые два интеграла отвечают закону сохранения энергии и проекции момента количества движения тела на ось z .

Критерий Сильвестра дает условия положительной определенности функции Ляпунова V .

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, & b_1(\delta - b_1) - b_2^2 &> 0, \\ q_2 &> 0, & q_1 q_2 - q_3^2 &> 0, \\ q_1 &= a_{55} - \frac{a_{27}^2}{b_1} - \frac{(b_1 a_{15} - b_2 a_{27})^2}{b_1(a_{11} b_1 - b_2^2)}, \\ q_2 &= a_{66} - \frac{1}{b_1} - \frac{(b_1 b_3 + b_2)^2}{b_1(a_{11} b_1 - b_2^2)}, \\ q_3 &= -a_{58} - \frac{1}{b_1} a_{27} + \frac{b_1 a_{15} - b_2 a_{27}}{a_{11} b_1 - b_2^2} \left(b_3 + \frac{b_2}{b_1} \right). \end{aligned}$$

Согласно первым двум неравенствам, необходимо, чтобы значения коэффициентов b_1 и b_2 лежали в круге радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке $b_1 = \frac{\delta}{2}$, $b_2 = 0$. Для фиксированных b_1 и b_2 из круга ищутся такие значения b_3 , при которых функция V является положительно определенной, то есть выполняются оставшиеся два неравенства ($q_2 > 0$, $q_1 q_2 - q_3^2 > 0$). Из всех полученных таким образом значений b_3 выбирается то, которому соответствует наибольший интервал по параметру гироскопических сил H .

На рис. 6 показана зависимость интервала устойчивости по параметру гироскопических сил H от коэффициента b_3 при фиксированных δ и χ ($\delta=3$, $\chi=10$). Видно, что значениям b_3 , взятым на интервале $[0.6; 2.5]$, соответствует максимальный интервал по H . Это означает, что при построении функции

Ляпунова значение коэффициента b_3 следует брать из этого интервала.

Объединение всех точек в пространстве параметров, для которых может быть найдена положительно

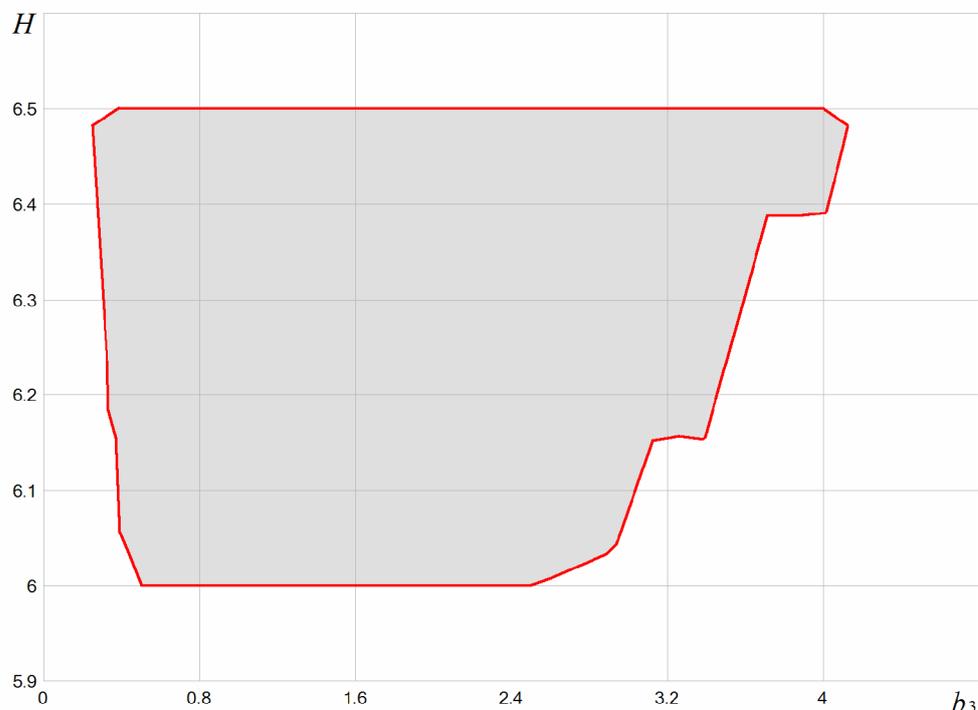


Рис. 6

определенная функция Ляпунова, дает область консервативной устойчивости системы в пространстве параметров. Эта область совпадает с полученной выше.

На практике в системах с диссипацией консервативная устойчивость недостижима. Необходимо исследовать возможность достижения асимптотической устойчивости.

С учетом в исходных уравнениях (1) дополнительных малых неконсервативных сил система запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - x + \delta \alpha + h_1 \dot{x} - k_1 y &= 0, \\ \ddot{y} - y + \delta \beta + h_1 \dot{y} + k_1 x &= 0, \\ \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} - \chi \alpha + \delta x + h_2 \dot{\alpha} - k_2 \beta &= 0, \\ \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} - \chi \beta + \delta y + h_2 \dot{\beta} + k_2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Здесь добавлены силы сопротивления с коэффициентами h_1 , h_2 и циркуляционные силы с коэффициентами k_1 , k_2 . Циркуляционные силы

называют также силами радиальной коррекции, следящими или псевдогироскопическими. Им соответствует кососимметричная матрица.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$f(p) = (p^2 - 1)(p^2 - iHp - \chi) - \delta^2 + (p^2 - 1)(h_2 p + i\kappa_2) + (p^2 - iHp - \chi)(h_1 p + i\kappa_1) = 0, \quad (3)$$

В нем в силу малости $h_{1,2}, \kappa_{1,2}$ опущены квадратичные по этим параметрам члены.

Исследование устойчивости проведено методом D-разбиений. Согласно процедуре метода, сделана замена $p = i\omega$. Действительная и мнимая части $f(i\omega)$ приравнены нулю:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f) &= (\omega^2 + 1)(\omega^2 - \omega H + \chi) - \delta^2 = 0, \\ \operatorname{Im}(f) &= (\omega^2 - \omega H + \chi)(h_1 \omega + \kappa_1) + (\omega^2 + 1)(h_2 \omega + \kappa_2) = 0. \end{aligned}$$

Для простоты положено $h_1 = h_2 = h$. В качестве параметров, на плоскости которых производится D-разбиение, выбраны κ_1/h и κ_2/h . Все они содержатся в последнем уравнении. Для нахождения D-границы нужно найти корни первого уравнения и подставить найденные значения во второе. Каждому $\omega = \omega_k (k = 1, 2, 3, 4)$, обращающему в нуль действительную часть $f(i\omega)$, отвечает особая прямая на

плоскости $\kappa_1/h, \kappa_2/h$.

Область, все границы которой заштрихованы с ее стороны, является претендентом на область устойчивости. Необходимо найти действительные части всех корней характеристического

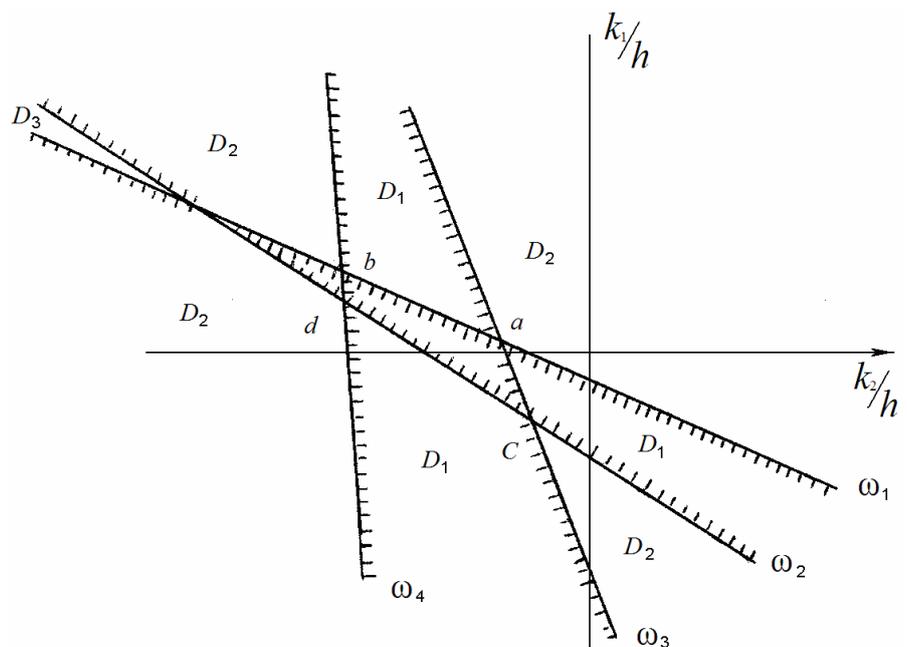


Рис. 7

полинома для хотя бы одной точки из этой области. В данном случае этого

делать не надо, так как границы области суть прямые, отвечающие всем четырем чисто мнимым корням, и при смещении внутрь области от этих границ все корни обретают отрицательные действительные части. Поэтому областью устойчивости является четырехугольник с вершинами, образованными пересечением особых прямых (рис. 7).

Область устойчивости была также исследована численно с помощью критерия Рауса-Гурвица. Для этого характеристическое уравнение было записано в виде

$$a_0 p^8 + a_1 p^7 + a_2 p^6 + a_3 p^5 + a_4 p^4 + a_5 p^3 + a_6 p^2 + a_7 p + a_8 = 0, \quad (4)$$

где

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 2(h_2 + h_1),$$

$$a_2 = 2(h_1 h_2 - \chi - 1) + (h_2 + h_1)^2 + H^2,$$

$$a_3 = 2(-\chi h_1 - h_2) + 2(h_1 h_2 - \chi - 1)(h_2 + h_1) + 2(H h_1 - k_2)H,$$

$$a_4 = 2(\chi - \delta^2) + 2(-\chi h_1 - h_2)(h_2 + h_1) + (h_1 h_2 - \chi - 1)^2 + 2(-H - k_2 h_1)H + (H h_1 - k_2)^2 + k_1^8,$$

$$a_5 = 2(\chi - \delta^2)(h_2 + h_1) + 2(-\chi h_1 - h_2)(h_1 h_2 - \chi - 1) + 2k_2 H + 2(-H - k_2 h_1)(H h_1 - k_2) + 2h_2 k_1^8,$$

$$a_6 = 2(\chi - \delta^2)(h_1 h_2 - \chi - 1) + (\chi h_1 + h_2)^2 + 2k_2(H h_1 - k_2) + (H + k_2 h_1)^2 + 2k_1^8 + h_2^2 k_1^8 + (k_1 H)^2,$$

$$a_7 = 2(\chi - \delta^2)(-\chi h_1 - h_2) + 2k_2(-H - k_2 h_1) + 2h_2 k_1^8 + 2k_1 H(-k_2 k_1 - \delta^2),$$

$$a_8 = (\chi - \delta^2)^2 + k_2^2 + k_1^8 + (k_2 k_1 + \delta^2)^2 - \delta^4.$$

Действительные части корней этого уравнения будут отрицательны, если главные миноры матрицы, составленной из коэффициентов многочлена, положительны.

Для примера взяты следующие значения параметров: $H=6.25$, $\chi = 10$, $\delta = 3$. Положено $h_1=h_2=h$. Исследована область устойчивости на плоскости k_1 и k_2 для различных значений h . На рисунках 8,а и б показаны области, полученные для случаев $h=0.1$ и $h=0.4$ соответственно.

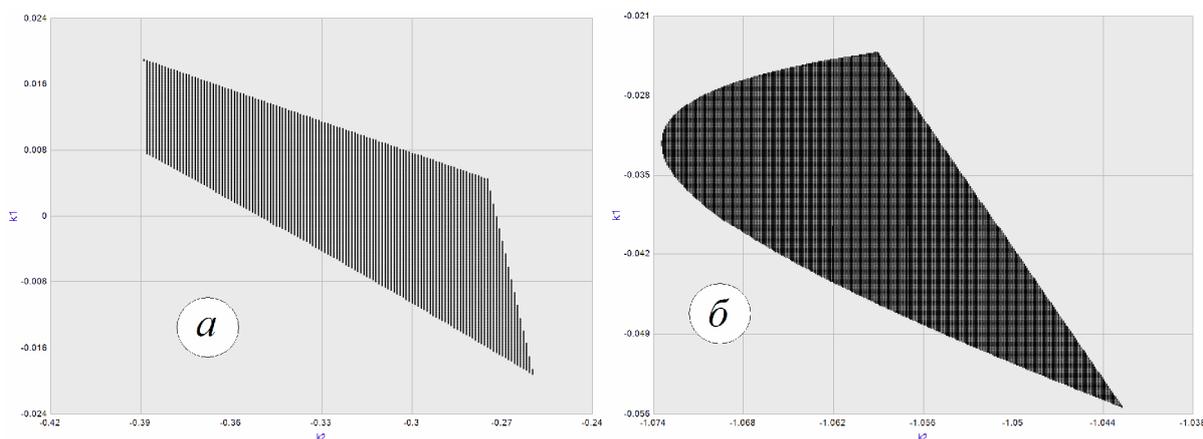


Рис. 8

Область асимптотической устойчивости на рис. 8,а очень близка к области, полученной с помощью D-разбиения (рис. 7). Однако при увеличении h область становится отличной от полученной выше, что видно на рис. 8,б. Различие связано с тем, что при исследовании методом D-разбиений неконсервативные силы предполагались малыми и квадратичные члены по $h_{1,2}$, $\kappa_{1,2}$ в уравнении (3) не учитывались.

Таким образом, в результате исследования динамики тела, несущего точечный электрических заряд, в поле одноименного точечного заряда показано, что в системе с вырожденной матрицей гироскопических сил устойчивость достижима. Из характеристического уравнения и прямым методом Ляпунова показано, что консервативной устойчивости соответствует ограниченная область в пространстве параметров системы.

Изучено влияние диссипативных и циркуляционных сил на динамику ввешиваемого тела. Аналитически с помощью метода D-разбиений и численно с помощью критерия Рауса-Гурвица показано, что стабилизация системы возможна, если в системе наряду с силами диссипации присутствуют циркуляционные силы. Устойчивость в этом случае становится асимптотической. При этом матрица циркуляционных сил (как и матрица гироскопических сил) может быть вырожденной.

Во второй главе исследуется влияние начальных условий на устойчивость движения. Для этого рассмотрены нелинейные уравнения возмущенного движения

$$\frac{1}{r_1^3} \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^3 (x - \delta \sin \alpha \cos \beta) = \ddot{x},$$

$$\frac{1}{r_1^3} \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^3 (y - \delta \sin \beta) = \ddot{y},$$

$$\frac{1}{r_1^3} \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^3 \left(z + \frac{\chi}{\delta} - \delta \cos \alpha \cos \beta \right) - \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right) = \ddot{z},$$

$$\frac{1}{r_1^3} \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^3 \delta \cos \beta \left(\left(z + \frac{\chi}{\delta} \right) \sin \alpha - x \cos \alpha \right) = \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + (I - 2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + I \omega \dot{\beta} \cos \beta,$$

$$\frac{1}{r_1^3} \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^3 \delta \left(\left(z + \frac{\chi}{\delta} \right) \cos \alpha \sin \beta - y \cos \beta + x \sin \alpha \sin \beta \right) = \ddot{\beta} + (1 - I) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - I \omega \dot{\alpha} \cos \beta,$$

$$\dot{\omega} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta = 0.$$

Здесь I – отношение моментов инерции.

Система интегрировалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Шаг численного дифференцирования выбирался так, чтобы изменения полной энергии системы (неизбежные при численном счете) были малыми и их амплитуда не росла.

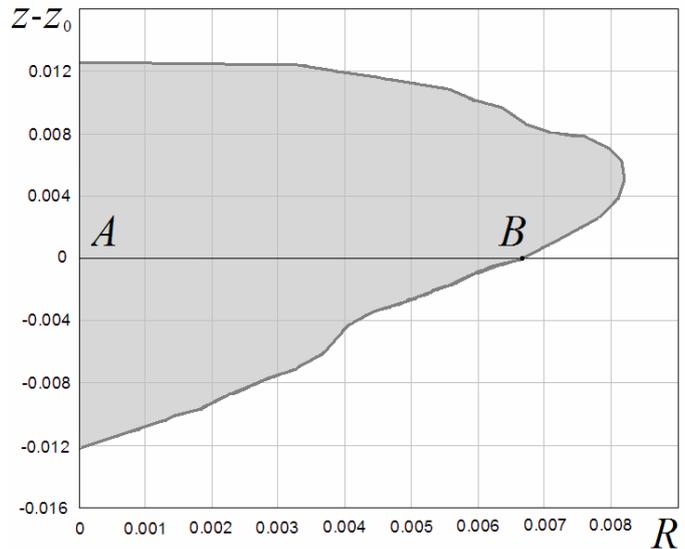


Рис. 9

Для иллюстрации начальное положение системы было задано тремя отличными от нуля координатами x_0, y_0, z_0 при $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = \alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = \beta_0 = \dot{\beta}_0 = 0$. Область притяжения устойчивого состояния системы обладает осевой симметрией. Для получения этой области в пространстве x, y, z достаточно провести расчет для координат R, z , где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Если тело начало движение из точки $(R_0; z_0)$ и через достаточно большое время T_{max} осталось в окрестности положения равновесия, то точка $(R_0; z_0)$ принадлежит области притяжения. Полученная таким образом область притяжения для параметров $H=6.3$, $\chi=10$, $\delta=3$ показана на рис 9. На нем изображена половина разреза области притяжения плоскостью, проходящей через прямую $x=y=0$.

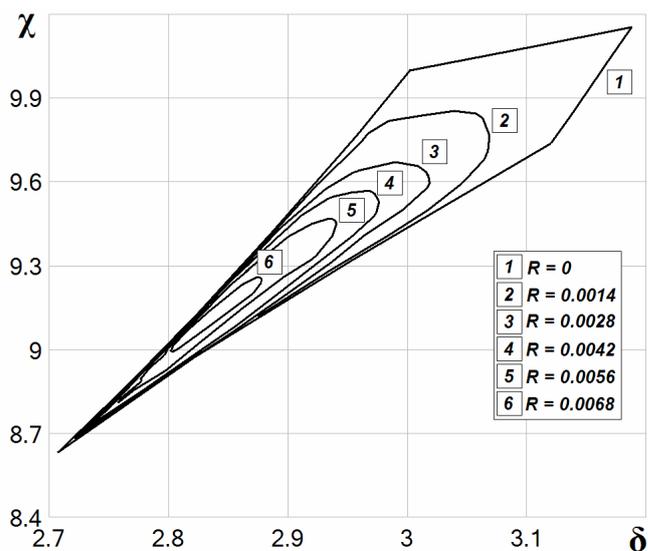


Рис. 10

Была исследована зависимость размеров области притяжения (длина отрезка AB на рис. 9) от параметров системы. Показано, что при увеличении H область притяжения тоже увеличивается. При фиксированном H на плоскости параметров $\chi\delta$ можно указать параметры, при которых область притяжения максимальна (рис 10).

Другим способом максимизации области притяжения равновесного состояния является изменение конфигурации электростатического поля, в котором ввешено тело. В работе рассматривалась задача движения тела с зарядом в постоянном электростатическом поле равномерно заряженного кольца (рис 11).

Из соображений симметрии следует, что в равновесном состоянии координаты ввешенного тела, будут следующими:

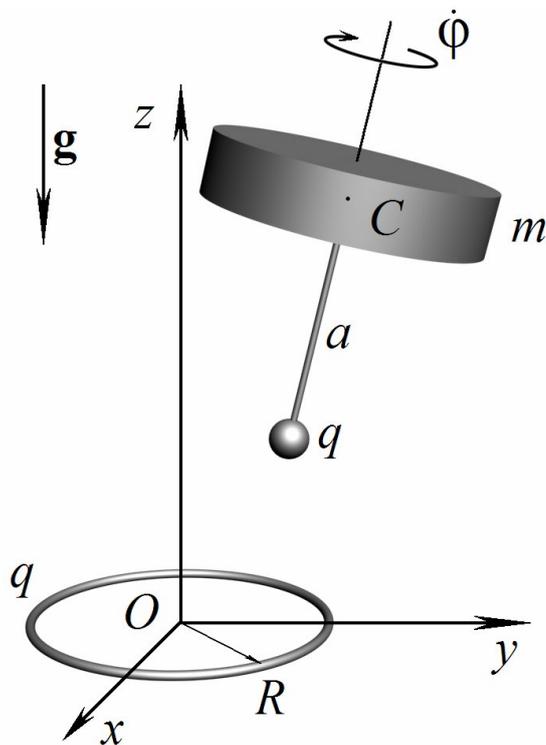


Рис. 11

$X_0 = Y_0 = \alpha_0 = \beta_0 = 0$. Координата Z_0 получается из условия равенства силы Кулона и силы тяжести:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_0 - a}{(R^2 + (Z_0 - a)^2)^{3/2}} - mg = 0.$$

На рис. 12 сплошной линией показана зависимость силы Кулона от высоты z над плоскостью кольца. Пересечение $F(z)$ с прямой $mg = const$ дает два состояния равновесия. Устойчивым относительно вертикальных смещений является верхнее (на рис. 12 - справа).

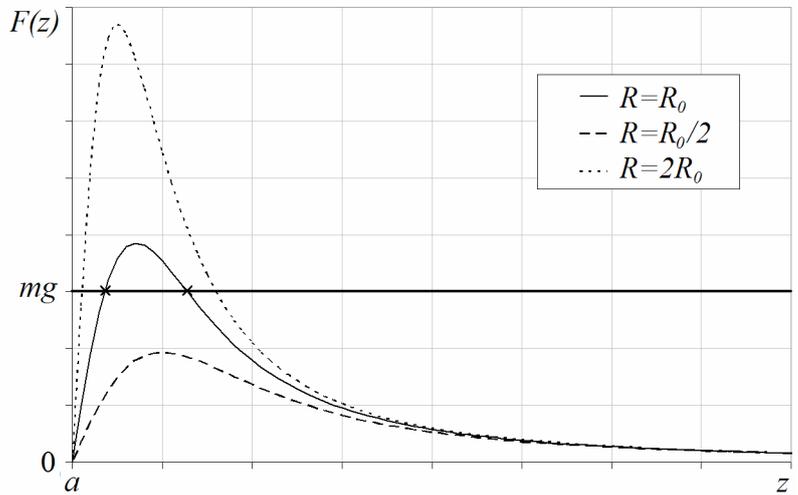


Рис. 12

Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^2 + r^2 \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_\gamma^3} (x - \delta \sin \alpha \cos \beta - r \cos \gamma) d\gamma = \ddot{x},$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^2 + r^2 \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_\gamma^3} (y - \delta \sin \beta - r \sin \gamma) d\gamma = \ddot{y},$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^2 + r^2 \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_\gamma^3} \left(z + \frac{\chi}{\delta} - \delta \cos \alpha \cos \beta \right) d\gamma - \left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right) = \ddot{z},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^2 + r^2 \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_\gamma^3} (\delta \cos \beta ((z - r \sin \gamma) \sin \alpha - (x - r \cos \gamma) \cos \alpha)) d\gamma = \\ & = \ddot{\alpha} (\cos^2 \beta + I \sin^2 \beta) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta (I - 1) + I\dot{\phi}\dot{\beta} \cos \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\chi}{\delta} - \delta \right)^2 + r^2 \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_\gamma^3} \left(\delta ((z + \frac{\chi}{\delta} - r \sin \gamma) \cos \alpha \sin \beta - (y - r \sin \gamma) \cos \beta + (x - r \cos \gamma) \sin \alpha \sin \beta) \right) d\gamma = \\ & = \ddot{\beta} + (1 - I)\dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - I\dot{\phi}\dot{\alpha} \cos \beta, \end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta = 0.$$

Здесь $r_\gamma = \sqrt{(x - \delta \sin \alpha \cos \beta - r \cos \gamma)^2 + (y - \delta \sin \beta - r \sin \gamma)^2 + \left(z + \frac{\chi}{\delta} - \delta \cos \alpha \cos \beta\right)^2}$ -

расстояние от прикрепленного к телу точечного заряда до элемента кольца, r - радиус кольца, δ - расстояние от заряда до центра масс, χ - коэффициент возвращающего момента, I - отношение моментов инерции.

Масштабы времени и длины

$$t_* = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m}{e^2} \left(\sqrt{(z_0 - a)^2 + R^2} \right)^3}, \quad l_* = \sqrt{\frac{A}{m}}$$

соответственно.

Линеаризованные уравнения движения тела с зарядом в поле заряженного кольца совпадают с уравнениями движения тела в поле точечного заряда (задача была

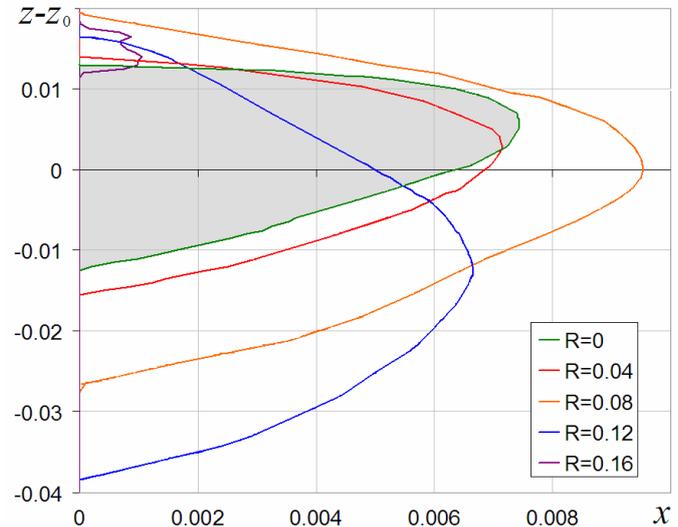


Рис. 13

рассмотрена в первой главе). Для исследования влияния измененной конфигурации электростатического поля на динамику тела с зарядом рассматривались нелинейные уравнения движения.

Зависимость области притяжения устойчивого состояния от параметра R показана на рис 13. Видно, что область, соответствующая точечному заряду (выделена серым цветом), не является максимальной. На графике она перекрывается областью со значением $R=0.08$, область, отвечающая $R=0.12$, также больше.

Итак, в результате проведенного исследования разработана методика определения области притяжения равновесного состояния системы, позволяющая построить ее при любых значениях параметров, в любых координатах. Разработанный алгоритм позволяет исследовать зависимость области притяжения от параметров системы и выработать рекомендации по

выбору параметров устройства так, чтобы область притяжения равновесного состояния системы была максимальна.

Показано, что область притяжения можно максимизировать за счет изменения конфигурации электростатического поля, в котором находится тело с зарядом. В частности, результаты проведенного исследования позволяют утверждать, что движение тела с зарядом в поле равномерно заряженного кольца более устойчиво, чем движение в поле точечного заряда. Задача оптимизации области притяжения равновесного состояния системы может быть решена для любого набора параметров.

В третьей главе исследовалась возможность стабилизации системы, описываемой в линейном приближении большим числом уравнений, чем в рассмотренных выше задачах. При этом матрица гироскопических сил является вырожденной.

Рассматривалась динамика двух гравитирующих тел, несущих точечные электрические одноименные заряды (рис. 14). Центры масс обоих тел (точки C_i) не совпадают с положениями зарядов (точки Q_i). Тела приведены во вращение вокруг оси симметрии с начальными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 .

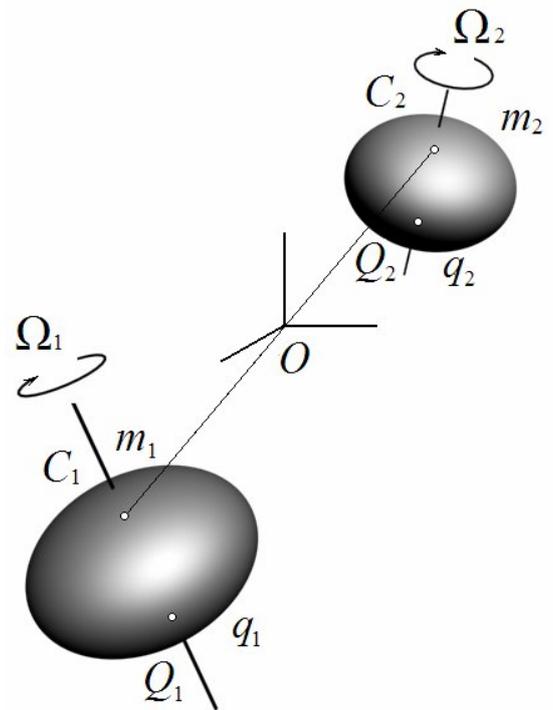


Рис. 14

Начало координат связано с центром инерции системы (точка O). В этом случае координаты центров масс тел оказываются связанными. Устойчивое по z равновесное состояние системы показано на рис. 15. Ему соответствуют следующие значения переменных $x = y = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, $z_1 = z_{10}$, $z_2 = z_{20}$, $\dot{\phi}_1 = \Omega_1$, $\dot{\phi}_2 = \Omega_2$.

После перехода к безразмерным переменным, связанные уравнения возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$\ddot{X} = X - \frac{\chi}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2),$$

$$\ddot{Y} = Y - \frac{\chi}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2),$$

$$\ddot{\alpha}_1 = -H_1 \dot{\beta}_1 + \delta_1 (-X + \delta_2 \alpha_2 + \chi \alpha_1 - \delta_2 \alpha_1),$$

$$\ddot{\beta}_1 = H_1 \dot{\alpha}_1 + \delta_1 (-Y + \delta_2 \beta_2 + \chi \beta_1 - \delta_2 \beta_1),$$

$$\ddot{\alpha}_2 = -H_2 \dot{\beta}_2 + \delta_2 (-X + \delta_1 \alpha_1 + \chi \alpha_2 - \delta_1 \alpha_2),$$

$$\ddot{\beta}_2 = H_2 \dot{\alpha}_2 + \delta_2 (-Y + \delta_1 \beta_1 + \chi \beta_2 - \delta_1 \beta_2).$$

Здесь $X = x_1 - x_2 = x_1 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$, $Y = y_1 - y_2 = y_1 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$,

$Z = z_1 - z_2 = z_1 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$; $\delta_1 = \frac{a_1}{l_*}$ - расстояние от центра масс

до заряда для первого тела, $\delta_2 = \frac{a_2}{l_*}$ - для второго тела,

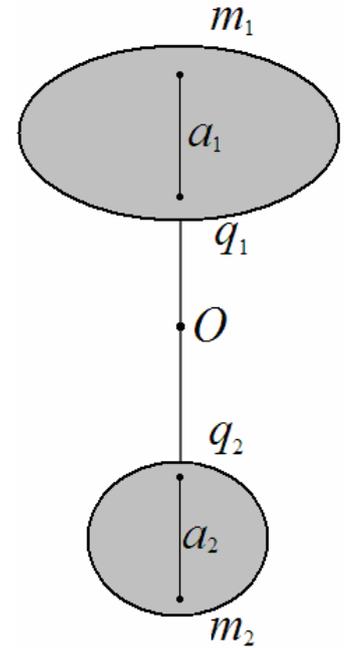


Рис. 15

$H_1 = \frac{C_1}{A_1} t_* \Omega_1$ - параметр гироскопических сил, действующих на первое тело,

$H_2 = \frac{C_2}{A_2} t_* \Omega_2$ - на второе тело, $\chi = \frac{Z_0}{l_*}$ - расстояние между центрами масс;

$t_*^2 = \frac{Z_0 (Z_0 - a_1 - a_2)^3}{Q(a_1 + a_2) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$ - масштаб времени, $l_*^2 = \frac{A(a_1 + a_2)}{Z_0} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$ - масштаб длины.

Если одно из тел принять за материальную точку, то задача сводится к рассмотренной в главе 1 задаче движения одного тела с зарядом над неподвижным точечным зарядом.

При движении тел сила отталкивания двух зарядов должна компенсировать силу тяготения. Отсюда вытекает необходимое условие устойчивости системы:

$$\chi - \delta_1 - \delta_2 > 0.$$

Без вращения система неустойчива по каждой из степеней свободы ($X, Y, \alpha_1, \beta_2, \alpha_1, \beta_2$). Гироскопические силы присутствуют лишь в уравнениях угловых движений, и теорема Кельвина о достаточных условиях гироскопической стабилизации консервативных систем с четной степенью неустойчивости в этом

случае неприменима. Матрица гироскопических сил в этом случае будет шестого порядка, и ее определитель равен нулю.

Уравнение частот запишется следующим образом

$$\begin{aligned}
 & p(-p^5 + p^4(H_1 + H_2) + p^3(-H_2H_1 - 1 - \delta_1(\chi - \delta_2) - \delta_2(\chi - \delta_1)) + \\
 & + p^2(H_1 + H_2 + H_2\delta_1(\chi - \delta_2) + H_1\delta_2(\chi - \delta_1)) + \\
 & + p(-\delta_1(\chi - \delta_2) - \delta_2(\chi - \delta_1) - H_2H_1 - \delta_1\delta_2(\chi - \delta_1)(\chi - \delta_2) + \delta_1^2\delta_2^2 + \frac{\chi}{\delta_1 + \delta_2}(\delta_2^2 + \delta_1^2)) + \quad (5) \\
 & + (H_2\delta_1(\chi - \delta_2) + H_1\delta_2(\chi - \delta_1) - \frac{\chi}{\delta_1 + \delta_2}\delta_2^2H_1 - \frac{\chi}{\delta_1 + \delta_2}\delta_1^2H_2)) = 0.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы система была консервативно устойчивой, необходимо, чтобы все корни уравнения (5) были действительными. Отыскание области устойчивости в пространстве параметров системы проводилось численно.

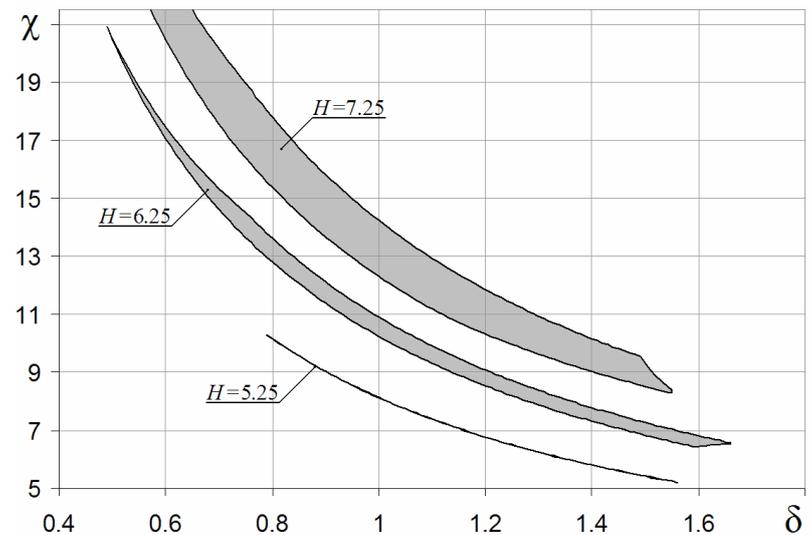


Рис. 16

На рис. 16 для примера в случае $H_1=H_2=H$ и $\delta_1=\delta_2=\delta$ показаны

сечения области устойчивости плоскостями $H=const$. Видно, что при определенных δ и χ существует интервал по параметру гироскопических сил H , в котором все корни уравнения (5) действительны, а, значит, система консервативно устойчива.

Динамика связки гравитирующих тел, несущих заряды, описывается большим числом уравнений, чем рассмотренная в первой главе система. Общим в обеих задачах является то, что матрица гироскопических сил вырождена. Показано, что стабилизация системы в этих случаях возможна. Устойчивому движению соответствуют ограниченные области в пространстве параметров. Полученные результаты являются обобщением теоремы Кельвина о достаточных условиях гироскопической стабилизации консервативных систем с

четной степенью неустойчивости на случай вырожденной матрицы гироскопических сил.

Результаты проведенного в третьей главе исследования могут представлять интерес при изучении динамики объектов космического пространства: спутниковых систем, исследовательских зондов, астероидов и так далее.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

- Обоснован принцип достижения устойчивости тела с зарядом в электростатическом поле.
- Найдены условия стабилизации системы. Показано, что консервативной устойчивости соответствует ограниченная область в пространстве параметров системы. Исследовано влияние диссипативных и циркуляционных сил на динамику системы. Показано, что введение диссипации и циркуляционных сил в соответствующих соотношениях упрочняет устойчивость до асимптотической.
- Проведено численное исследование области притяжения устойчивого состояния системы. Исследованы способы максимизации области притяжения, в частности, изучено влияние конфигурации электростатического поля на движение системы.
- Показана возможность существования устойчивой связки двух неконтактирующих тел, взаимодействующих посредством гравитационных и электростатических сил. Полученные результаты обобщают теорему Кельвина о достаточных условиях гироскопической стабилизации консервативных систем с четной степенью неустойчивости на случай вырожденной матрицы гироскопических сил.
- Разработано программное обеспечение для численного анализа рассмотренных моделей.

Основное содержание и результаты диссертации опубликованы в следующих работах

Публикации в рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. Гироскопическая стабилизация несущего электрический заряд тела, вывешенного в поле другого заряда // Вестник Нижегородского университета. 2007. №1. С. 144-150.
2. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. О левитации тела, несущего электрический заряд, в электростатическом поле // МГТ. 2007. № 6. С. 4-13.

Другие публикации по теме диссертации

3. Федоров А.Е. Влияние структуры сил на устойчивость системы // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / Казань. 2006. Т. 34. С. 210-211.
4. Федоров А.Е. О стабилизации системы заряженных тел // Труды четвертой всероссийской конференции “Необратимые процессы в природе и технике”: Тезисы докладов / М. 2007. С. 326-327
5. Федоров А.Е. О левитации тела с зарядом в электрическом поле // Фундаментальные проблемы машиноведения: Новые технологии и материалы. Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Нижний Новгород. 2006. С. 112.
6. Федоров А.Е. К вопросу о динамике системы гравитирующих тел, несущих заряды // Волновая динамика машин и конструкций. Тезисы докладов Второй Всероссийской научной конференции / Нижний Новгород. 2007. С. 98.