

На правах рукописи

ПРОЙДАКОВА Екатерина Вадимовна

**АНАЛИЗ ВЫХОДНЫХ ПОТОКОВ
УПРАВЛЯЮЩИХ ПРОЦЕССОВ
ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**01.01.09 — Дискретная математика и математическая
кибернетика**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2008

Работа выполнена на кафедре прикладной теории вероятностей факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Федоткин Михаил Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Ушаков Владимир Георгиевич (г. Москва)

доктор физико-математических наук, профессор
Жильцова Лариса Павловна (г. Н. Новгород)

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов
(г. Москва)

Защита состоится 22 мая 2008 г. в 14 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 2, конференц-зал ННГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского <http://www.unn.ru>

Автореферат разослан 19 апреля 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

В.И. Лукьянов

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. В современной теории массового обслуживания одним из наиболее актуальных и перспективных направлений является изучение свойств выходных потоков. Это в первую очередь связано с широким применением задач и методов теории массового обслуживания в организации производства и при создании сложных информационных систем (систем по обработке и передаче информации). Как правило, такие системы имеют разветвленную структуру и состоят из двух и более подсистем, объединенных некоторым образом. Если в такой структуре имеется последовательное соединение, то выходной поток одной подсистемы является входным для другой, и в этом случае закономерно возникает вопрос описания выходного потока подсистемы, а точнее, проблема исследования его вероятностных распределений.

Первые результаты в области выходных потоков были получены в 60-е годы XX века такими математиками, как П.Дж. Берк (P.J. Burk), Дж.В. Коэн (J.W. Cohen), Е. Рейч (E. Reich) и П.Д. Финч (P.D. Finch). Данные результаты касались только простейших систем: рассматривалась одноканальная система обслуживания с неограниченной очередью, входной поток полагался пуассоновским, обслуживание требований осуществлялось по показательному закону. В нашей стране выходными потоками в разное время занимались Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Г.Ш. Цициашвили, И.И. Ежов, Н.В. Маркова, В.Ф. Каданков и др. Данные авторы, как правило, также рассматривали одноканальные системы, но уже с некоторыми усложнениями, касающимися вида входного потока, дисциплины формирования очереди и механизма обслуживания. При этом выходной поток всегда описывали аналогично входному, используя для этого один из следующих эквивалентных способов:

1) задавали случайный процесс $\{\bar{\xi}(t); t \geq 0\}$, где $\bar{\xi}(t)$ при $t > 0$ определяет число обслуженных системой заявок за промежуток времени $[0, t)$ и $\bar{\xi}(t) = \bar{\xi}(t-0)$, $\bar{\xi}(0) = 0$;

2) указывали случайную последовательность $\{(\tau'_i, \bar{\xi}'_i); i \geq 1\}$, в которой через τ'_i и $\bar{\xi}'_i$ обозначены соответственно i -й момент появления требований на выходе и число требований обслуженных системой в этот момент времени.

Если для описания выходного потока использовать один из предложенных выше способов, то не удастся найти конечномерные распределения процесса даже применительно к несложным системам обслуживания. В отличие от большинства известных в этой области трудов, для построения математической модели выходных потоков автор использует так называемое нелокальное описание потока требований, впервые предло-

женное М.А. Федоткиным. При этом в описание выходных потоков включены такие элементы самой системы массового обслуживания как состояния обслуживаемого устройства и величины очередей по потокам. На настоящий момент проблема выходных потоков остается малоизученной и важной для решения практических задач. Все это обуславливает актуальность проводимых в данной работе исследований.

Цель работы. В диссертационной работе рассматриваются два типа систем управления конфликтными потоками требований: циклическая система и система с преимуществом (приоритетная система). Целью диссертационного исследования является построение математических моделей и изучение свойств конечномерных распределений выходных потоков, возникающих в данных неклассических системах массового обслуживания.

Научная новизна. Впервые построены и проанализированы вероятностные модели выходных потоков, возникающих в циклической и приоритетной системах обслуживания. Доказано, что нелокальное описание выходных потоков можно выполнить с помощью векторных марковских последовательностей, в первом случае трехмерной, во втором — пятимерной. Проведена полная классификация по Колмогорову состояний данных последовательностей, получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений последовательностей, которые позволяют определить все конечномерные распределения. Исследованы предельные свойства построенных последовательностей. Таким образом, в работе получены новые теоретические результаты в области изучения свойств выходных потоков в неклассических системах массового обслуживания двух типов. Помимо этого, создана программа, являющаяся имитационной моделью процесса движения m конфликтных транспортных потоков на пересечении магистралей в случае циклической системы и в случае системы с приоритетами.

Методы исследования. Для построения моделей выходных потоков управляющих систем обслуживания применялся кибернетический подход, методологически разработанный А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским (*Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 5-22*) и развитый М.А. Федоткиным в ряде работ (*Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6 – С. 51-70; Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1998. – Вып. 7. – С. 333-344*). Использовались аппарат теории случайных процессов, методы математической кибернетики и

функционального анализа. При исследовании марковских цепей применялся итеративно-мажорантный метод, который позволил найти необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения.

Теоретическая и практическая ценность. Данная работа была выполнена в рамках следующих госбюджетных НИР, проводимых на кафедре прикладной теории вероятностей ННГУ и в лаборатории теории вероятностей и математической статистики НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ: «Математическое моделирование и создание новых методов анализа динамических систем и систем оптимизации» (номер государственной регистрации 01.2.00 1 07703), «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций» (номер государственной регистрации 01.2.00 6 02598).

Диссертационная работа имеет как теоретическую, так и практическую ценность. Полученные теоретические результаты важны для дальнейших исследований в области изучения выходных потоков более сложных управляющих систем обслуживания. Помимо этого данные результаты используются при чтении специальных курсов для студентов, специализирующихся по кафедре прикладной теории вероятностей. Программное обеспечение, разработанное в рамках данной работы, может применяться для определения численных оценок характеристик выходных потоков, возникающих в циклических и приоритетных системах, которые необходимы при расчете сложных транспортных сетей. Полученные в работе квазиоптимальные параметры, методика их расчета и основные выводы могут быть использованы для оптимизации реальных процессов обслуживания, например, светофоров, регулирующих транспортное движение в классе циклических и приоритетных алгоритмов.

Основные результаты, выносимые на защиту. Ниже приведены наиболее существенные результаты диссертации, выносимые на защиту.

- Эффективность применения кибернетического подхода при построении математических моделей выходных потоков в циклической и приоритетной системах.
- Способ проведения классификации состояний марковских последовательностей.
- Метод исследования предельных свойств многомерных марковских последовательностей, которые являются математическими моделями выходных потоков.
- Способ определения области квазиоптимальных параметров управления конфликтными потоками.
- Методика составления имитационных моделей управляющих систем обслуживания с целью получения численных оценок характеристик систем.

Личный вклад автора. Постановка задачи и основные методы исследования принадлежат научному руководителю. Вкладом диссертанта являются формулировка и доказательства утверждений, теоретические расчеты, программная реализация и исследование имитационной модели.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и конгрессах:

1. Международная конференция «Прикладная статистика в социально-экономических проблемах» (Нижний Новгород, 2003 г.).

2. Научно-техническая конференция «Математика и кибернетика 2003» (Нижний Новгород, 2003 г.).

3. VI Международный конгресс по математическому моделированию (Нижний Новгород, 2004 г.).

4. Десятая междисциплинарная научная конференция «Нелинейный мир» (Нижний Новгород, 2005 г.).

5. Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей» (Гродно, 2007 г.).

По теме диссертации опубликовано 15 работ, из них 4 в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации для публикации материалов диссертации. Совместно с научным руководителем выполнено 13 из 15 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 120 наименований, приложения с доказательствами некоторых утверждений, текстом программы и численными результатами имитационного моделирования в виде таблиц и графиков. Объем основного текста работы составляет 149 страниц.

2. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор литературы по изучаемому вопросу и краткую характеристику работы с указанием основных научных результатов.

В первой главе строится математическая модель реальных процессов обслуживания и изучаются свойства выходных потоков, возникающих в циклической системе управления m конфликтными пуассоновскими потоками требований (машин) с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать. Это обстоятельство не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком и, следовательно, обслуживать его без прерывания. Обслуживание требований из

конфликтных потоков должно происходить в непересекающиеся промежутки времени. Также допускаются промежутки переналадок, разрешающие проблему конфликтности потоков, например, проблему безопасности движения транспорта на перекрестке. Под обслуживанием машин понимается их проезд через перекресток. Смена состояний обслуживающего устройства (автомата-светофора) осуществляется по циклическому алгоритму $\Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m-1)} \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \dots$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, где $j = \overline{1, m}$, разрешается групповое обслуживание требований только из потока Π_j с интенсивностью μ_j . В состоянии $\Gamma^{(2j)}$ также пропускается группа заявок только из потока Π_j , но уже с интенсивностью $\mu'_j \geq \mu_j$. Длительности состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$ известны и равны T_1, T_2, \dots, T_{2m} единиц времени соответственно.

Для построения математической модели изучаемой системы обслуживания используется так называемый «кибернетический» подход, при котором на систему смотрят не с позиции «черного ящика», а с точки зрения общего понятия управляющей системы. Следуя методологии кибернетического подхода для управляющей системы необходимо определить дискретную временную шкалу функционирования, а затем выделить схему, информацию, координаты и функцию. Для схемы, в свою очередь, определяются составляющие блоки: входные и выходные полюсы, внешняя память, внутренняя память, устройство по переработке информации внешней и внутренней памяти. Стоит отметить, что проблема определения временной шкалы является сложной, поскольку не существует методики или алгоритма выбора моментов наблюдения за системой. В работе управляющая система наблюдается в дискретные моменты времени $\tau_i, i = 0, 1, \dots$, переключений состояний обслуживающего устройства (фаз светофора) или на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Дискретная шкала функционирования системы определяется случайной последовательностью $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$. Здесь момент τ_0 начала функционирования системы совпадает с моментом переключения фазы обслуживающего устройства. В нашем случае входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ первичных требований — это первый тип входных полюсов для управляющей системы обслуживания. Потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$ (выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании) — второй тип входных полюсов. Накопители очередей по входным потокам — внешняя память. Устройства по организации дисциплины очередей в накопителях или стратегии обслуживания требований — блок по переработке информации внешней памяти. Обслуживающее устройство (автомат-светофор) с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$ — внутренняя память. Алгоритм смены

состояний обслуживающего устройства — блок по переработке информации внутренней памяти. Выходные потоки $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_m$ обслуженных требований — выходные полюса. Наборы состояний очередей в накопителях, обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяют информацию управляющей системы обслуживания. Номера входных потоков, потоков насыщения, выходных потоков, накопителей, механизмов формирования очередей и номера состояний обслуживающего устройства задают координаты управляющей системы обслуживания. Функция системы — это управление потоками (разрешение или запрещение начала обслуживания) и обслуживание требований.

Считаем, что рассматриваемые в работе случайные объекты заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$, где Ω — множество описаний всех элементарных исходов системы, \mathfrak{F} — σ -алгебра событий $A \subset \Omega$, а $P(A)$ — вероятность исхода $A \in \mathfrak{F}$. Описание составляющих блоков схемы осуществляется при $j = \overline{1, m}, i = 0, 1, \dots$ с помощью следующих случайных величин и элементов, заданных на $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$:

1) $\eta_{j,i}$ — число заявок потока Π_j , обслуженных за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \dots\}$; 2) $\xi_{j,i}$ — максимальное число требований, которое может быть обслужено за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j , $\xi_{j,i} \in \{0, l'_j, l_j\}$, здесь l_j — максимальное число заявок потока Π_j , которое может обслужиться за время работы состояния $\Gamma^{(2j-1)}$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, а l'_j — максимальное число требований потока Π_j , которое может обслужиться за время работы сигнала $\Gamma^{(2j)}$ и $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$, причем $l_j \geq l'_j$, поскольку $T_{2j-1} \gg T_{2j}$; 3) Γ_i — состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$; 4) $\alpha_{j,i}$ — длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i , где $\alpha_{j,i} \in X$; 5) $\bar{\xi}_{j,i}$ — число реально обслуженных требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\bar{\xi}_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$; 6) $\bar{\xi}_{j,-1}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[0, \tau_0)$, причем $\bar{\xi}_{j,-1} \in Y_j$.

При $j = \overline{1, m}$, семейства $\{\xi_{j,i} : i = 0, 1, \dots\}$ и $\{\bar{\xi}_{j,i} : i = 0, 1, \dots\}$ случайных величин соответственно определяют потоки насыщения и выходные потоки системы.

В соответствии с методикой кибернетического подхода определялись функциональные и статистические связи между блоками схемы. Требования из очереди потока Π_j отбираются согласно экстремальной стратегии механизма обслуживания, для которой при $i = 0, 1, \dots, j = \overline{1, m}$, выполняется $\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\alpha_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}$. Пусть функция

$U(\Gamma^{(r)}): \Gamma \rightarrow \Gamma$ принимает значение $\Gamma^{(1)}$ при $r = 2m$ и значение $\Gamma^{(r+1)}$ в остальных случаях, т. е. при $r \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$. Тогда для Γ_{i+1} справедливо соотношение $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Поскольку входные потоки предполагаются пуассоновскими, то

$$P(\eta_{j,i} = u_j \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j T_r)^{u_j} (u_j!)^{-1} \exp\{-\lambda_j T_r\} = \varphi_j(u_j, T_r), \quad u_j \in X, \quad j = \overline{1, m}, \quad r = \overline{1, 2m}.$$

Для случайной величины $\xi_{j,i}$ при $j = \overline{1, m}$ имеет место вырожденное условное распределение следующего вида $P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \beta_j(v, \Gamma^{(r)})$, где

$$\beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = l_j, \quad r = 2j - 1; \\ 1 & \text{при } v = l'_j, \quad r = 2j; \\ 1 & \text{при } v = 0, \quad r \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{2j - 1, 2j\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ и потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$ считаем независимыми. Состояние циклической системы по потоку Π_j на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ характеризуется случайным вектором $(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1})$. Поведение системы по потоку Π_j описывается векторной последовательностью $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$, которая определяет динамику состояний обслуживающего устройства, флуктуацию длин очередей по потокам и флуктуацию обслуженных требований. Данная последовательность задает и нелокальное описание выходного потока по j -му направлению, причем за выходной поток отвечает $\bar{\xi}_{j,i-1}$, а компоненты Γ_i и $\alpha_{j,i}$ играют роль меток.

В силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний светофора процесс обслуживания можно рассматривать отдельно по каждому потоку. Это позволяет свести задачу анализа выходных потоков системы размерности $(2m+1)$ к трехмерной задаче. В случае циклической системы все рассуждения проводятся для произвольного j -го потока. Предполагается, что в начальный момент τ_0 задано распределение вектора $(\Gamma_0, \alpha_{j,0}, \bar{\xi}_{j,-1})$, то есть известны вероятности $P(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)}, \alpha_{j,0} = x, \bar{\xi}_{j,-1} = y)$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x \in X$, $y \in Y_j$. Условное распределение каждой из случайных величин $\eta_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}$ зависит от выбора вектора $b = (T_1, T_2, \dots, T_{2m})$. Назовем вектор b управлением m конфликтными потоками в циклической системе обслуживания, здесь $b \in \mathcal{R} = \{(T_1, T_2, \dots, T_{2m}): T_1 > 0, T_2 > 0, \dots, T_{2m} > 0\}$.

В первой главе диссертации изучены свойства конечномерных распределений управляемой последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ при фиксированном значении $b \in \mathcal{R}$ и доказаны утверждения, приведенные ниже. В частности доказано, что при

$i = 0, 1, \dots$, для последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ имеет место рекуррентное соотношение $(\Gamma_{i+1}, \mathfrak{a}_{j,i+1}, \bar{\xi}_{j,i}) = (U(\Gamma_i), \max\{0, \mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{\mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\})$.

Кибернетический подход требует на этапе построения математической модели так выбирать шкалу $\{\tau_i; i \geq 0\}$ тактов времени, чтобы можно было определить конечномерные распределения управляемой последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Если дискретные моменты времени τ_i были выбраны удачно, то векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$, как правило, обладает свойством марковости. Далее нумерация теорем и лемм в автореферате соответствует принятой в диссертации.

Лемма 1. При заданном распределении вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{j,0}, \bar{\xi}_{j,-1})$ управляемая последовательность $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ является марковской.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P(\{\Gamma_i = \Gamma^{(s)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x, \bar{\xi}_{j,i-1} = y\}) &= Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y); \\ \Gamma(j) &= \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}, \Gamma^{(2j+2)}\}; \Gamma'(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}; \\ E_j(\Gamma^{(s)}) &= \{(\Gamma^{(s)}, x, 0): x \in X\}, \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j); \\ E_j(\Gamma^{(2j)}) &= \{(\Gamma^{(2j)}, x, l_j): x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y): y = \overline{0, l_j - 1}\}; \\ E_j(\Gamma^{(2j+1)}) &= \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, l'_j): x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, 0, y): y = \overline{0, l'_j - 1}\}. \end{aligned}$$

Лемма 4. Пространство состояний последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ разбивается на незамкнутое подмножество $\{(\Gamma^{(s)}, x, y): \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in X, y = \overline{1, l_j}\} \cup \cup \{(\Gamma^{(2j)}, x, y): x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l_j - 1}\} \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, y): x \in X, y = \overline{l'_j + 1, l'_j}\} \cup \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, y): x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l'_j - 1}\}$ несущественных состояний и на замкнутое подмножество $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ существенных периодических состояний с периодом $2m$.

В первой главе диссертации получены рекуррентные по i соотношения для одномерных распределений $\{Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y): \Gamma^{(s)} \in \Gamma, x \in X, y \in Y_j\}$ последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Также найдены рекуррентные соотношения для производящих функций $\Phi_{j,i}(\Gamma^{(s)}; y; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y) z^x$ за один такт работы системы и для производящих функций $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; y; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; x; y) z^x$ за период $T = \sum_{r=1}^{2m} T_r$, где $i = 0, 1, \dots, \Gamma^{(s)} \in \Gamma, y \in Y_j, |z| \leq 1$. Данные соотношения использовались при доказательстве предельных теорем.

Теорема 4. Для существования стационарного распределения последовательности $\{(G_i, \alpha_{j,i}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства $\lambda_j T - l_j - l'_j < 0$.

Установлено, что в циклической системе обслуживания возможно существование стационарного распределения как для отдельного потока Π_j , $j = \overline{1, m}$, так и для всей системы, в зависимости от выполнения либо только одного неравенства $\lambda_j T - l_j - l'_j < 0$ при некотором j , или же m неравенств $\lambda_j T - l_j - l'_j < 0$, $j = \overline{1, m}$.

Во второй главе работы рассматривается приоритетная система управления m пуассоновскими конфликтными потоками $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$. Поступающие в систему потоки делятся на три типа: Π_1 — поток малой интенсивности, заявки которого пользуются приоритетом при обслуживании; Π_2, \dots, Π_{m-1} — потоки средней интенсивности и без приоритетов; Π_m — интенсивный поток без приоритетов. Приоритет первого потока заключается в том, что если поступила хотя бы одна заявка по этому направлению, то она должна быть обслужена как можно быстрее, но не прерывая при этом уже проводящееся обслуживание других требований. Такой алгоритмы в настоящее время используются, например, для управления интенсивным потоком транспорта на основной магистрали и приоритетным неинтенсивным потоком пешеходов, когда появление пешехода фиксируется кнопкой вызова. Как и в первой главе, предполагается независимость входных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ и потоков насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$. Характеристики системы также изучались в дискретные моменты времени τ_i , $i = 0, 1, \dots$, переключений состояний светофора или на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$.

Укажем при $j = \overline{1, m}$ и $i = 0, 1, \dots$ основные отличия приоритетной модели от циклической. В случае приоритетной модели обслуживающее устройство имеет $2m + 1$ состояние $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}$, длительности $T_1, T_2, \dots, T_{2m+1}$ состояний известны. Здесь добавляется новое состояние $\Gamma^{(2m+1)}$ в котором обслуживается только поток Π_m с интенсивностью $\mu''_m > \mu_m$. Каждый из элементов Γ_i принимает значения из множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}\}$. Случайная величина $\xi_{j,i}$, $j = \overline{1, m-1}$, принимает значения из множества $\{0, l'_j, l_j\}$, а $\xi_{m,i}$ из множества $\{0, l'_m, l''_m, l_m\}$, где l''_m — максимальное число требований потока Π_m , которое может обслужиться в состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$ обслуживающего устройства и $l''_m = [\mu''_m T_{2m+1}]$, причем $l_m \geq l''_m$, поскольку $T_{2m-1} \gg T_{2m+1}$. Случайная величина $\bar{\xi}_{j,i}$ принимает значения из множества $Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$.

Для приоритетной модели отличается вид функции $\beta_j(v, \Gamma^{(r)})$:

$$\beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = l_j, r = 2j - 1, j = \overline{1, m}; \\ 1 & \text{при } v = l'_j, r = 2j, j = \overline{1, m}; \\ 1 & \text{при } v = l''_m, r = 2m + 1, j = m; \\ 1 & \text{при } v = 0, r \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\} \setminus \{2j - 1, 2j\}, j = \overline{1, m-1}; \\ 1 & \text{при } v = 0, r \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\} \setminus \{2m - 1, 2m, 2m + 1\}, j = m; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция $U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1)$ определяется следующим образом:

$$U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1) = \begin{cases} \Gamma^{(1)} & \text{при } r = 2m; \\ \Gamma^{(r+1)} & \text{при } r = \overline{1, 2m-2}; \\ \Gamma^{(2m)} & \text{при } r \in \{2m - 1, 2m + 1\}, w_1 = 0, u_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m)} & \text{при } r \in \{2m - 1, 2m + 1\}, w_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m+1)} & \text{при } r \in \{2m - 1, 2m + 1\}, w_1 = u_1 = 0. \end{cases}$$

Соотношение $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i})$, $i = 0, 1, \dots$, определяет некоторый однородный алгоритм с упреждением, который управляет изменением структуры обслуживающего устройства по информации о наличии заявок в очереди по потоку Π_1 и по информации о текущем внутреннем состоянии. Данный алгоритм основывается на минимальном количестве информации о состоянии системы и поэтому легко может быть реализован.

Случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$, $j = \overline{1, m}$, являются независимыми при условии, что состояние обслуживающего устройства известно. Во второй главе работы изучаются вероятностные свойства последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$. Выбор данной последовательности обусловлен тем, что она определяет поведение системы как по информативному потоку Π_1 , так и по наиболее интенсивному потоку Π_m .

Для последовательностей $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{2,i}, \dots, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{2,i-1}, \dots, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$, $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}); i \geq 0\}$, $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{j,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$, $j = \overline{2, m-1}$, могут быть получены аналогичные результаты. В начальный момент времени τ_0 задано распределение вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{1,0}, \mathfrak{a}_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{m,-1})$. Ниже приведены основные утверждения, доказанные во второй главе диссертации.

Для последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ при $i = 0, 1, \dots$, имеет место следующее векторное рекуррентное соотношение:

$$(\Gamma_{i+1}, \mathfrak{a}_{1,i+1}, \mathfrak{a}_{m,i+1}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{m,i}) =$$

$$= (U(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i}), \gamma_1(\mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}), \gamma_m(\mathfrak{a}_{m,i}, \eta_{m,i}, \xi_{m,i}), \zeta_1(\mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}), \zeta_m(\mathfrak{a}_{m,i}, \eta_{m,i}, \xi_{m,i})), \\ \gamma_j(\mathfrak{a}_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) = \max\{0, \mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \zeta_j(\mathfrak{a}_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) = \min\{\mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, j = 1, m.$$

Лемма 5. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{1,0}, \mathfrak{a}_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{m,-1})$ управляемая случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ является марковской.

Проведена полная классификация по Колмогорову состояний управляемой марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$, доказано, что пространство $E = \{(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m) : \Gamma^{(s)} \in \Gamma, x_1, x_m \in X, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m\}$ ее состояний распадается на незамкнутое множество несущественных состояний, и на минимальное замкнутое множество существенных сообщающихся аperiodических состояний.

Введем обозначение $P(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(s)}, \mathfrak{a}_{1,i+1} = x_1, \mathfrak{a}_{m,i+1} = x_m, \bar{\xi}_{1,i} = y_1, \bar{\xi}_{m,i} = y_m\}) = Q_{i+1}(\Gamma^{(s)}; x_1; x_m; y_1; y_m)$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma, x_1, x_m \in X, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m, i = 0, 1, \dots$

Получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i(\Gamma^{(s)}; x_1; x_m; y_1; y_m) : \Gamma^{(s)} \in \Gamma, x_1, x_m \in X, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m\}$ последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$.

Доказано, что для $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ либо существует стационарное движение, либо $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}; x_1; x_m; y_1; y_m) = 0$ для всех $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$.

Также были найдены рекуррентные соотношения для производящих функций $\Phi_i(\Gamma^{(s)}; y_1; y_m; z_1; z_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(s)}; x_1; x_m; y_1; y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$, $\Phi_i^m(\Gamma^{(s)}; y_1; y_m; 0; z_m) = \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(s)}; 0; x_m; y_1; y_m) z_m^{x_m}$, $\Phi_i^1(\Gamma^{(s)}; y_1; y_m; z_1; 0) = \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(s)}; x_1; 0; y_1; y_m) z_1^{x_1}$, $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(s)}; y_1; y_m; z_1; z_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(s)}; x_1; x_m; y_1; y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$ $i = 0, 1, \dots, \Gamma^{(s)} \in \Gamma, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m, |z_1| \leq 1, |z_m| \leq 1$. Полученные соотношения существенно использовались при доказательстве следующих предельных теорем.

Теорема 9. Если справедливо $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 > 0$, то имеет место предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}; x_1; x_m; y_1; y_m) = 0$ для всех $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$.

Теорема 10. Пусть $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 = 0$, тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}; x_1; x_m; y_1; y_m) = 0$ для любого состояния $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$.

Теорема 11. Пусть одновременно выполняются следующие неравенства: $\lambda_1 T(l_1 + l'_1)^{-1} - \lambda_1 T_{2m+1}(l_m + l'_m)((l_1 + l'_1)l''_m)^{-1} + \lambda_m T_{2m+1}(l''_m)^{-1} > 1$, $\lambda_m T_{2m+1} < l''_m$, $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$, тогда для любого $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$ справедливо $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}; x_1; x_m; y_1; y_m) = 0$.

Теорема 13. Для существования стационарного распределения марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ достаточно выполнения двух неравенств $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$, $\lambda_m T - l_m - l'_m < 0$.

В третьей главе изучение систем продолжается средствами имитационного моделирования. Для рассматриваемых систем не удается аналитически определить законы распределения выходных потоков, найти среднее время ожидания начала обслуживания заявки по потокам и средние длины очередей. Чтобы получить численные оценки этих и других характеристик и определить квазиоптимальное управление, была создана имитационная модель систем. Программная реализация имитационной модели выполнена на основе Borland Turbo Delphi Explorer. При моделировании предполагалось, что машины обслуживаются как группами, так и последовательно по одной по мере поступления в систему. В качестве примера в работе приведены численные результаты для последовательного обслуживания двух потоков ($m = 2$). В случае циклической системы считали, что выбраны два наиболее интенсивных транспортных потока.

С целью оценивания стационарных характеристик, моделирование проводилось в два этапа. На первом этапе определялся момент вхождения системы в квазистационарный режим. Для этого вычислялись оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины для двух систем. В первой системе в начальный момент времени очереди были пусты ($x_{1,0} = x_{2,0} = 0$), а во второй определялись по формулам $x_{j,0} = [\lambda_j T]$, $j = 1, 2$, $T = \sum_{r=1}^4 T_r$. На i -м шаге вычислялись значения $\tilde{M}\gamma_{j,i}^0$ и $\tilde{M}\gamma_{j,i}^+$, $j = 1, 2$ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания машины по каждому потоку в первой и второй системе соответственно. Затем определялись значения γ_i^0 , γ_i^+ , где $\gamma_i^0 = (\lambda_1 \tilde{M}\gamma_{1,i}^0 + \lambda_2 \tilde{M}\gamma_{2,i}^0) / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\gamma_i^+ = (\lambda_1 \tilde{M}\gamma_{1,i}^+ + \lambda_2 \tilde{M}\gamma_{2,i}^+) / (\lambda_1 + \lambda_2)$. При выполнении условия $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| \geq \delta \gamma_i^0$ переходили к $(i + 1)$ -му шагу. В противном случае, то есть когда выполнялось $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| < \delta \gamma_i^0$, считали, что система достигла квазистационарного режима и фиксировали время переходного процесса t_n , здесь $\delta = 0,05$. На втором

этапе, продолжаящем траекторию первого, находились: значения $\tilde{M}\gamma_1$ и $\tilde{M}\gamma_2$ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания машины по первому и второму потокам в секундах; значения γ^* оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в секундах, где $\gamma^* = (\lambda_1\tilde{M}\gamma_1 + \lambda_2\tilde{M}\gamma_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$; значения $\tilde{M}\kappa_1$ и $\tilde{M}\kappa_2$ оценок средней очереди перед зеленым светом по первому и второму потокам в машинах. Здесь $\varkappa_{j,i} \equiv \kappa_j$, $j = 1, 2$, определяет очередь в квазистационарном режиме по j -му потоку непосредственно перед переходом светофора в состояние $\Gamma^{(2j-1)}$. Для выходящих потоков вычислялись статистические законы распределения и статистические числовые характеристики. В частности для случайной величины $\bar{\xi}_{j,i} \equiv \theta_j$, $j = 1, 2$, определяющей в квазистационарном режиме число обслуженных машин за время, пока светофор находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, вычислялись статистический ряд распределения, выборочное математическое ожидание $\tilde{M}(\theta_j)$ и выборочная дисперсия $\tilde{D}(\theta_j)$. Все численные оценки были получены с точностью $\varepsilon = 0,01$ и надежностью $\alpha = 0,99$. Решалась задача оптимизации по критерию $\gamma^* \rightarrow \min$. Рассматривалась загрузка $\rho_j = \lambda_j T (\mu_j T_{2j-1} + \mu'_j T_{2j})^{-1}$ системы по j -му потоку, $j = 1, 2$. Общая загрузка системы определялась как $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Исследовался разброс оценок γ^* при разных нагрузках системы. Разброс оценок определялся по формуле $\sigma^* = (\gamma_{\max}^* - \gamma_{\min}^*) (\gamma_{\min}^*)^{-1} 100\%$, где γ_{\max}^* – наибольшее значение оценки γ^* , среди полученных по 10 различным реализациям, а γ_{\min}^* — наименьшее.

Моделирование производилось при значении параметров, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям существования стационарного движения в обеих системах. Из физических соображений на величины T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 и T накладывались ограничения: $T_2 \geq 4$, $T_4 \geq 4$, $T_5 \geq 4$, $T_1 \geq T_2$, $T_3 \geq T_4$, $T \geq 60$, $T \leq 120$. Таким образом, при существующих ограничениях область поиска квазиоптимальных параметров имела вид $\mathcal{R}_c = \{(T_1, T_3): T_1 \geq 4, T_3 \geq 4, T_1 + T_3 \geq 52, T_1 + T_3 \leq 112, \lambda_1(T_1 + T_3 + 8) - l_1 - l'_1 < 0, \lambda_2(T_1 + T_3 + 8) - l_2 - l'_2 < 0\}$. В качестве примера в таблице 1 приведены значения оценок $\tilde{M}\gamma_1$, $\tilde{M}\gamma_2$, γ^* , $\tilde{M}\kappa_1$ и $\tilde{M}\kappa_2$ в случае циклической системы для различных T при фиксированных параметрах $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu'_1 = \mu'_2 = 1,2$, $\lambda_1 = 0,7$, $\lambda_2 = 0,1$ и квазиоптимальных значениях T_1 и T_3 .

T	T_1	T_3	$\tilde{M}\gamma_1$	$\tilde{M}\gamma_2$	γ^*	$\tilde{M}\kappa_1$	$\tilde{M}\kappa_2$
120	100	12	6,723	54,528	12,698	12,623	10,845
100	80	12	7,638	41,445	11,864	12,782	8,567
80	64	8	6,409	35,056	10,002	10,011	7,046
60	46	6	6,784	26,127	9,202	9,062	5,265

Таблица 1

В данном случае минимальное значение оценки γ^* равно 9,202 и оно достигается на периоде $T = 60$ при $T_1 = 46$ и $T_3 = 6$, которые и являются квазиоптимальными. При квазиоптимальных значениях параметров для первого выходного потока выборочное математическое ожидание $\tilde{M}(\theta_1) = 39,166$, а выборочная дисперсия $\tilde{D}(\theta_1) = 28,666$. Для второго выходного потока соответственно $\tilde{M}(\theta_2) = 4,922$ и $\tilde{D}(\theta_2) = 1,904$. На рис. 1 изображен полигон частот, построенный по статистическому ряду распределения числа машин, обслуженных по первому потоку за время работы состояния $\Gamma^{(1)}$ светофора при $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu'_1 = \mu'_2 = 1,2$, $\lambda_1 = 0,7$, $\lambda_2 = 0,1$ и квазиоптимальных T_1, T_3 .

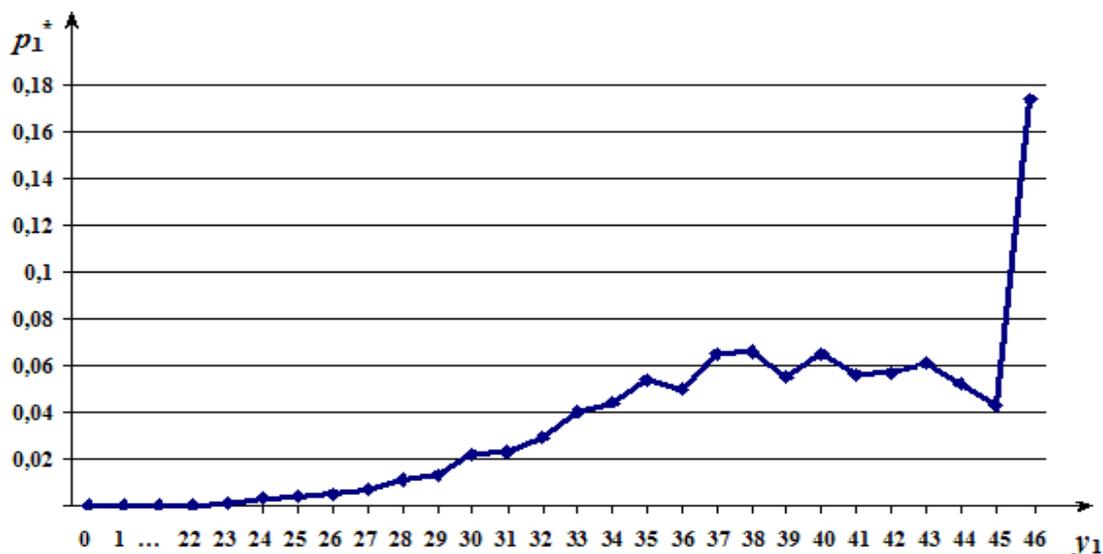


Рис. 1

Полученные в работе численные результаты позволяют сделать ряд выводов.

Целесообразность применения алгоритма с упреждением обосновывается во многих работах. Полученные результаты имитационного моделирования подтверждают тот факт, что приоритетная система в сравнении с циклической обеспечивает выигрыш по среднему времени ожидания начала обслуживания произвольной машины.

Оценка γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в системах обоих типов, как правило, уменьшается при сокращении периода работы светофора. С ростом загрузки ρ системы оценка γ^* возрастает нелинейно.

Разброс σ^* оценок γ^* с ростом загрузки системы увеличивается, составляя для обоих рассматриваемых алгоритмов управления при близких входных параметрах величины одного порядка.

Продолжительность переходного процесса t_n с увеличением загрузки ρ возрастает и наблюдается резкое ее увеличение при больших загрузках системы. Для двух разных алгоритмов управления при близких интенсивностях входных потоков длительности переходных процессов являются величинами одного порядка.

В заключение кратко сформулированы основные результаты работы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе изучены циклическая и приоритетная системы управления m конфликтными потоками требований. При построении математических моделей выходных потоков таких систем подтверждена эффективность применения кибернетического подхода.

Получено нелокальное описание выходных потоков, циклической и приоритетной управляющих систем обслуживания, в виде векторных последовательностей.

Изучены свойства построенных последовательностей, проведена полная классификация по Колмогорову их состояний и получены необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения.

Проведено исследование имитационных моделей циклической и приоритетной управляющих систем. Получены численные оценки среднего времени ожидания начала обслуживания заявки по потокам, средних длин очередей, длительности переходного процесса, а также стационарных законов распределения выходных потоков.

Определены квазиоптимальные параметры функционирования циклической и приоритетной систем по критерию минимизации среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования.

4. СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации:

1. Федоткин, М.А. Нелинейная модель процесса циклического обслуживания и выходные потоки / М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. Издание Саратовского университета. — Т.13, № 3. — 2005. — С. 48–60.

2. Пройдакова, Е.В. Математическая модель управления выходными потоками в циклической системе обслуживания / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2005. — Вып. 2 (29). — С. 201–208.

3. Пройдакова, Е.В. Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика. — 2006. — Вып. 1 (4). — С. 92–102.

4. Пройдакова, Е.В. Достаточное условие существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2006. — Вып. 3 (32). — С. 118–126.

В иных печатных изданиях:

5. Пройдакова, Е.В. Изучение выходного процесса при нелинейном обслуживании автомобилей на перекрестке с помощью имитационной модели / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин // Прикладная статистика в социально-экономических проблемах. Материалы Международной конференции (Нижний Новгород, 14-15 февраля 2003г.) В 2-х томах. — Т. I. — Нижний Новгород, 2003. — С. 97–102.

6. Федоткин, М.А. Нелокальное описание выходных потоков в системе с циклическим обслуживанием и переналадками / М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова // Математика и кибернетика 2003. Сборник научных статей юбилейной научно-технической конференции факультета ВМК ННГУ и НИИ ПМК. Нижний Новгород, 28-29 ноября 2003г. — Нижний Новгород, 2003. — С. 274–278.

7. Projdakova, E.V. Mathematical model of output flows control in cyclic service system / E.V. Projdakova, M.A. Fedotkin // Сборник тезисов докладов VI Международного конгресса по математическому моделированию. — Нижний Новгород, 2004. — С. 115.

8. Пройдакова, Е.В. Нелокальное описание выходных потоков в системе с циклическим обслуживанием и переналадками / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин; Нижегород. ун-т. — Нижний Новгород, 2004. — 27 с. — Деп. в ВИНТИ 24.11.04 № 1856-B2004.

9. Пройдакова, Е.В. Анализ свойств выходных потоков в системе с циклическим обслуживанием и переналадками / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин; Нижегород. ун-т. — Нижний Новгород, 2005. — 32 с. — Деп. в ВИНТИ 01.04.05 № 442-B2005.

10. Федоткин, М.А. Нелинейные модели в теории очередей и выходные потоки / М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова // Нелинейный мир. Десятая междисциплинарная научная конференция (Нижний Новгород, 27 июня-2 июля 2005г.). Тезисы докладов. — Вып. 10. — Нижний Новгород, 2005. — С. 143.

11. Пройдакова, Е.В. Статистический анализ свойств выходных потоков, возникающих в циклической системе массового обслуживания / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин; Нижегород. ун-т. — Нижний Новгород, 2005. — 29 с. — Деп. в ВИНТИ 27.12.05 № 1755-B2005.

12. Пройдакова, Е.В. Нелокальное описание выходных потоков в системе массового обслуживания с приоритетным направлением / Е.В. Пройдакова, М.А. Федоткин; Нижегород. ун-т. — Нижний Новгород, 2006. — 62 с. — Деп. в ВИНТИ 21.03.06 № 293-B2006.

13. Пройдакова, Е.В. Анализ свойств выходных потоков в системе массового обслуживания с приоритетным направлением / Е.В. Пройдакова; Нижегород. ун-т. — Нижний Новгород, 2006. — 49 с. — Деп. в ВИНТИ 21.12.06 № 1602-B2006.

14. Пройдакова, Е. Выходные потоки в системе массового обслуживания с преимуществом/ Е. Пройдакова, М. Федоткин // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции «Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей» Гродно, 29 января–1 февраля 2007 г. — Вып. 19. — С. 210–215.

15. Пройдакова, Е.В. Необходимые условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с приоритетным направлением / Е.В. Пройдакова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского — 2007. — №1. — С. 167–172.