

На правах рукописи

БЕЛОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ
ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ МЕТОДОВ
КВАДРАТУР СВЕРТОК И ДУРБИНА**

Специальность 01.02.04 –
Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2008

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте механики государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского»

Научные руководители:

Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор
доктор физико-математических наук,
доцент

Баженов Валентин Георгиевич

Игумнов Леонид Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Александров Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор

Ерофеев Владимир Иванович

Ведущая организация: Южный научный центр РАН (г. Ростов-на-Дону)

Защита состоится 29 декабря 2008 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан 28 ноября 2008 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.09

доктор физико-математических наук, доцент

Л.А. Игумнов

Неразрушающий контроль, диагностика и расчеты на прочность технических объектов, сейсморазведка, мониторинг приповерхностных зон земной среды и т.д. требуют разработки эффективных средств, методов и моделей. В связи с этим возникает задача разработки математических методов и применение их в исследованиях по распространению волн в неоднородных телах из вязкоупругих материалов при вибрационных, ударных нагружениях.

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) являются универсальным численно-аналитическим подходом к решению трехмерных волновых начально-краевых задач теории вязкоупругости. В некоторых случаях (бесконечные и полубесконечные тела и среды) метод ГИУ и МГЭ являются наиболее предпочтительным универсальным подходом к исследованию волн. К настоящему времени сформировались два основных направления развития метода ГИУ и МГЭ для исследования волновых задач: использование интегрального преобразования и построение шаговых процедур. Численные схемы МГЭ на основе интегральных преобразований обладают ограничением на тип решаемых задач (только когда справедлив принцип соответствия). Точность таких схем существенно зависит от параметров метода численного обращения интегрального преобразования. Считается, что для МГЭ наиболее предпочтителен метод Дурбина. Численные схемы МГЭ, опирающиеся на шаговые процедуры (интерполирование по времени), существенно зависят от выбора шага и применимы только к тем задачам, для которых возможно построение тензора Грина. Так как для волновых задач вязкоупругости тензор Грина во времени в общем случае не существует, то такие численные схемы не эффективны. Однако, возможно построение шаговых схем МГЭ на основе сочетания обоих подходов. Таким сочетанием обладает метод квадратур сверток ориентированный на гранично-временные интегральные уравнения вязкоупругости.

Цель работы состоит в развитии МГЭ-методики на основе метода квадратур сверток и интегрального преобразования Лапласа для решения трехмерных задач динамики упругих и вязкоупругих составных тел при смешанных краевых условиях; в разработке соответствующих алгоритмов и программ; в исследовании динамического деформирования трехмерных вязкоупругих составных тел; в создании средств визуализации результатов гранично-элементного моделирования.

Методика исследований основана на ГИУ прямого подхода для трехмерной линейной теории вязкоупругости; на интегральном преобразовании Лапласа и численном обращении этого преобразования на основе метода Дурбина; на методе квадратур сверток; на методе граничных элементов, как способе численного решения исследуемых ГИУ.

Достоверность исследований основана на эквивалентности исходной краевой/начально-краевой задачи в частных производных математической теории вязкоупругости системе используемых граничных/гранично-временных интегральных уравнений (ГИУ/ГВИУ); на использовании для численных исследований регуляризованных ГИУ/ГВИУ; на детально проработанных алгоритмах МГЭ-подхода и оттестированном программном обеспечении; на сравнении полученных результатов с решениями других авторов.

Научная новизна работы

Гранично-элементное (ГЭ) моделирование с использованием преобразования Лапласа впервые реализовано на основе комбинированных формул метода Дурбина, учитывающих специфику поведения подынтегрального выражения интеграла Меллина на всем частотном диапазоне. Представлены аппроксимации пошагового (по частоте) кусочно-линейного и кусочно-квадратичного поведения, как изображения, так и всего подынтегрального выражения, с возможностью рассмотрения переменного шага.

Метод ГВИУ в сочетании с методом квадратур сверток – единственный универсальный численно-аналитический подход решения краевых задач вязкоупругости с использованием шаговой схемы. ГЭ-моделирование на основе метода квадратур сверток развито на случай применения комбинированных формул для вычисления квадратурных коэффициентов. Такая формулировка метода впервые устраняет ограничения традиционного подхода. Разработаны и реализованы случаи, когда весовые коэффициенты метода строятся для переменного пошагового (по углу) кусочно-линейного и кусочно-квадратичного поведения изображения соответствующей свертываемой функции.

Создано программное обеспечение для компьютерного анализа динамики составных вязкоупругих трехмерных тел. Представлены результаты численного моделирования и верификации предложенных методик и схем.

Практическая значимость результатов исследования состоит в развитии методов Дурбина, квадратур сверток, граничных элементов с целью получения устойчивых высокоточных численных решений трехмерной теории вязкоупругости; в создании МГЭ-программного обеспечения для анализа динамики составных трехмерных вязкоупругих тел с использованием интегрального преобразования Лапласа; в создании МГЭ-программного обеспечения для анализа динамики составных трехмерных вязкоупругих тел на основе шаговой схемы; в создании программного обеспечения гранично-элементной визуализации.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методика численного решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с методом квадратур сверток и соответствующее программное обеспечение для расчета во времени неизвестных волновых полей трехмерных вязкоупругих составных тел;
2. методика численного решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с методом Дурбина и соответствующее программное обеспечение для расчета неизвестных волновых полей трехмерных вязкоупругих составных тел;
3. модифицированные методы квадратур сверток и Дурбина;
4. программное обеспечение по визуализации результатов гранично-элементного моделирования;
5. ГЭ-решение и анализ следующих волновых задач:
 - о действии скачка давления на торец составного призматического тела;
 - о действии вертикальной силы на поверхности вязкоупругого полупространства;
 - о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью (сферическая, кубическая);
 - о действии скачка давления внутри полости (сферическая, кубическая), расположенной в упругом полупространстве;
 - о штампе на полупространстве;
 - о реакции защитного корпуса атомной станции теплоснабжения на действие ударной силы.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийской научной конференции, посвященной памяти профессора А.И. Весницкого (Н.Новгород, 2004); IX-X Нижегородских сессиях молодых ученых (Саров, 2004, 2005) и XI-XIII Нижегородских сессиях молодых ученых (Семенов, 2006, 2007, 2008); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н.Новгород, 2006); Всероссийской научно-технической конференции – фундаментальные проблемы машиноведения: новые технологии и материалы (ИМАШ РАН 2007); XXII Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 2007); Итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (Н.Новгород, 2007г.); VI Всероссийской научно-практической конференции «Машиностроение:

наука, техника, образование» (г.Саранск, 2007); XI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2007); XIV международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (г.Москва, 2008).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 30 работ, 7 из них – в изданиях, рекомендуемых ВАК Министерства образования и науки РФ для опубликования результатов кандидатских диссертаций (список основных публикаций приводится в конце автореферата).

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 155 наименований. Общий объем диссертации составляет 180 страниц машинописного текста, включая 3 таблицы, 400 рисунков.

На различных этапах работа поддерживалась грантами Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-6391.1006.8 2006-2007 гг.; № НШ-3367.2008.8 2008-2009 г.г.); ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники», мероприятие 1.12. Развитие системы ведущих научных школ как среды генерации знаний и подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации (XII очередь – Научные школы). Приоритетное направление «Энергетика и энергосбережение» (гос. контракт № 02.445.11.7044, шифр «РИ-112/001/404» 2005 г.); программой Минобрнауки РФ «Развитие потенциала высшей школы (2006–2008 гг.) проект РНП.2.1.2.3556.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор работ по применению МГЭ к решению динамических трехмерных задач теорий упругости и вязкоупругости; обоснование актуальности темы диссертационной работы; формулировки целей работы и основных положений, которые выносятся на защиту.

В развитии МГЭ для применения к трехмерным динамическим задачам упругости и вязкоупругости заметную роль сыграли работы таких ученых, как Ш.М. Айтиалиев, Л.А. Алексеева, В.А. Бабешко, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Р.В. Гольдштейн, Л.А. Игумнов, М.И. Лазарев, А.Н. Соловьев, А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский, И.Ю. Чудинович, J.D. Achenbach, H. Antes, D.E. Beskos, M. Bonnet, H.B. Coda, J. Dominguez, L. Gaul, L.J. Gray, S. Kobayashi, M. Kogel, W. Kress, G.D. Manolis, M. Marrero, A.D. Mesquita, Y. Niwa, G. H. Paulino, M. Shanz, и др.

В развитии методов решения соответствующих интегральных уравнений механики деформируемого твердого тела существенные результаты получили В.М. Александров, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Р.В. Гольдштейн, О.В. Евдокимова, Л.А. Игумнов, В.В. Калинин, А.М. Линьков, А.В. Манжиров, Н.Ф. Морозов, Д.А. Пожарский, О.Д. Пряхина, А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский и др

В главе I приведена постановка задачи и описано построение ГИУ и ГВИУ прямого подхода. Изложены методы Дурбина и квадратур сверток. В качестве расширения этих методов предложены их модификации.

В первом параграфе рассматривается кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Граница тела обозначена через Γ . Предполагается, что каждая составная часть Ω_k является изотропным вязкоупругим телом. Динамическое состояние части тела Ω_k описывается соответствующим дифференциальным уравнением Ламе в перемещениях $u^k(x,t) = (u_1^k, u_2^k, u_3^k)$. Рассматривается случай пропорциональных функций памяти. Используются функции памяти классических вязкоупругих моделей (Максвелла, Кельвина-Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) и слабосингулярной модели с ядром $K(t) = kt_+^{-\alpha} / \Gamma(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(1-\alpha)$ - гамма функция.

Рассматриваются смешанные граничные условия на $\Gamma = \partial\Omega$ и условия жесткого контакта на внутренних для Ω границах. Интегральные представления строятся не только во времени, но и в терминах преобразования Лапласа с параметром p .

Во втором параграфе описаны фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости как во времени, так и в изображениях по Лапласу. Дана визуализация поведения их компонент на сфере.

Третий параграф посвящен построению ГВИУ и ГИУ. Обобщенные формулы Сомильяны во времени и в изображениях по Лапласу дают следующие ГВИУ и ГИУ:

$$c_{ij} u_j(x,t) + \int_{\Gamma_k 0}^t T_{ij}(x,y,t-\tau) u_j(y,\tau) d\tau d_y S = \int_{\Gamma_k 0}^t U_{ij}(x,y,t-\tau) p_j(y,\tau) d\tau d_y S, \quad x \in \Gamma_k = \partial\Omega_k, \quad (1)$$

$$c_{ij}(x) \bar{u}_j(x,p) + \int_{\Gamma_k} T_{ij}(x,y,p) \bar{u}_j(y,p) d_y S = \int_{\Gamma_k} U_{ij}(x-y,p) \bar{t}_j(y,p) d_y S, \quad (2)$$

$$l, j = 1, 2, 3, \quad x \in \Gamma_k = \partial\Omega_k,$$

где U_{ij} и T_{ij} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения Ламе для Ω_k .

Уравнения (1) являются уравнениями Вольтера по времени, поэтому при построении шаговых схем необходимо использовать сплайн-аппроксимацию по переменной времени. В этом заключается один из основных ГЭ-подходов для решения таких гранично-временных интегральных уравнений. Но, кроме того, это ГВИУ является интегралом свертки по времени, именно этим и определяется разработанный в диссертации подход – построение квадратурных формул численного интегрирования для интегралов свертки. Сочетание (1) и (2) с контактными условиями дает ГВИУ и ГИУ для кусочно-однородных тел.

В четвертом параграфе рассмотрены проблемы численного обращения преобразования Лапласа на основе метода Дурбина. Изложен сопутствующий вопрос о численном интегрировании быстро осциллирующих функций. Предложены модификации метода Дурбина. Базовая формула метода Дурбина на основе метода трапеций с переменным шагом для всей подынтегральной функции выглядит следующим образом:

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}(\alpha + i\omega_k) + \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1})) \Delta_k / 2\pi,$$

$$f(t) \approx e^{at} \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}(\alpha + i\omega_k) e^{it\omega_k} + \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1}) e^{it\omega_{k+1}}) \Delta_k / 2,$$

где $\bar{f}(p)$ - изображение по Лапласу функции $f(t)$; $p = \alpha + i\omega$; $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$.

С учетом того, что $\bar{f}(\alpha + i\omega) e^{it\omega}$ может быть сильно осциллирующей функцией, построены модификации метода. Модификация на основе линейной аппроксимации функции $\bar{f}(\alpha + i\omega)$ выглядит следующим образом:

$$f(0) \approx \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}(\alpha + i\omega_k) + \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1}) \Delta_k / 2,$$

$$f(t) \approx e^{at} \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{it \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2}} [D_1(w) \bar{f}(\alpha + i\omega_k) + D_2(w) \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1})] \Delta_k / 2, \quad (3)$$

где $w = t \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2}$, $D_{1,2}(w) = \begin{cases} (\sin w) / w \pm (w \cos w - \sin w) i / w^2, & \text{при } |w| > w_2 \\ e^{\mp wi}, & \text{при } |w| \leq w_2 \end{cases}$.

Модификация на основе квадратичной аппроксимации функции $\bar{f}(\alpha + i\omega)$ выглядит следующим образом:

$$f(0) \approx \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}(\alpha + \omega_k) + 2\bar{f}(\alpha + \omega_{k+1/2}) + \bar{f}(\alpha + \omega_{k+1})) (\omega_{k+1} - \omega_k) / 2,$$

$$f(t) \approx e^{at} \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_{k+1} - \omega_k) e^{it \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2}} [D_1(w) \bar{f}(\alpha + \omega_k) + D_2(w) \bar{f}(\alpha + \omega_{k+1/2}) + D_3(w) \bar{f}(\alpha + \omega_{k+1})] / 2, \quad (4)$$

$$\text{при } |w| > w_3 \quad \begin{cases} D_1 = (2ie^{iw} + we^{iw} + 3we^{-iw} - 2ie^{-iw} + 2w^2ie^{-iw})/2w^3, \\ D_2 = 2(-ie^{iw} - we^{iw} + ie^{-iw} - we^{-iw})/w^3, \\ D_3 = -(-3we^{iw} - 2ie^{iw} + 2w^2ie^{-iw} + 2ie^{-iw} - we^{-iw})/2w^3, \end{cases} \quad \text{при } |w| \leq w_3 \quad \begin{cases} D_1 = e^{-wi}/2, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = e^{wi}/2. \end{cases}$$

Возможности модификаций метода Дурбина продемонстрированы на численных примерах (аналитическое решение задачи о действии скачка давления на торец составного призматического тела).

Применение в численном моделировании вариантов метода Дурбина (Zhao X. 2004), построенных на основе рассмотрения $e^{i\omega t}$ как весовой функции, может привести к более худшим результатам, чем использование традиционной формулы метода Дурбина (Durbin F. 1974). Так, если взять 5000 точек по ω на интервале $[0, 200]$, то кривая, отмеченная цифрой 1 на рис. 1 – это результат использования традиционного метода Дурбина, и этот результат не отличим от аналитической кривой. Применение вариантов метода Дурбина (Zhao X. 2004) позволяет на этих же точках построить следующие оригиналы искомой функции перемещений: кривая 2 – метод с линейной аппроксимацией спектральной функции, кривая 3 – метод с квадратичной аппроксимацией спектральной функции. Результат демонстрирует заметное затухание, устранить которое можно только увеличением количества точек по частоте.

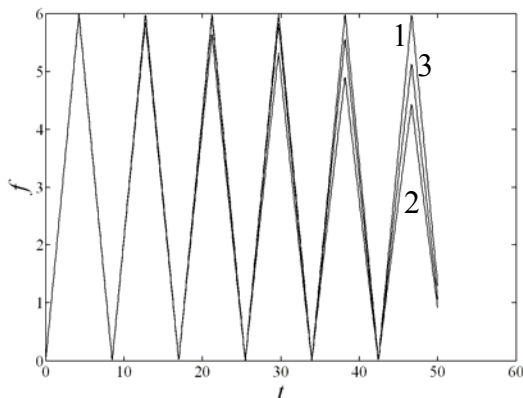


Рис. 1

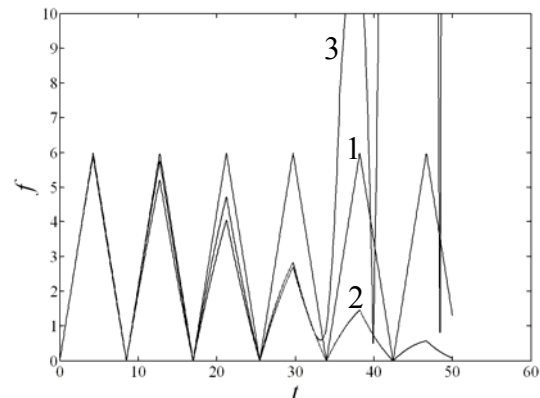


Рис. 2

При увеличении частотного интервала на сохраненном числе точек или при уменьшении числа точек по частоте с сохраненной длиной интервала могут возникнуть еще большие неприятности с применением такого варианта метода Дурбина (Zhao X. 2004). На рис. 2 продемонстрировано решение той же самой задачи с 5000 точками по частоте на интервале $[0, 500]$ (маркировка кривых сохранена). Использование варианта метода Дурбина с переменным шагом не позволяет преодолеть возникающих проблем. На рис. 3 продемонстрированы результаты одного из таких экспериментов, когда выбрано 2000 точек по частоте на интервале $[0, 200]$.

Равномерные сетки строились на интервалах $[0, 40]$ и $[40, 200]$ из расчета что выбиралось по 1000 точек на каждом интервале.

Использование модификаций метода Дурбина на основе формул (3), (4) позволяет преодолеть отмеченные проблемы. На рис. 4 представлены результаты, построенные на той же сетке, как для примера на рис. 3, но с применением формул (3) и (4). Построенные кривые по формулам (3) и (4) совпали.

Проведенные исследования при других вариантах разбиения частотного диапазона показали, что использование комбинированных формул (3), (4) позволяет без потери точности понизить количество точек интегрирования в разы. Для примера, изображенного на рис. 4, удалось понизить количество точек интегрирования в 2,5 раза.

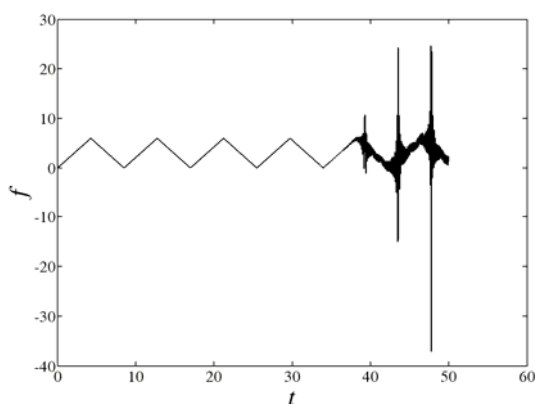


Рис. 3

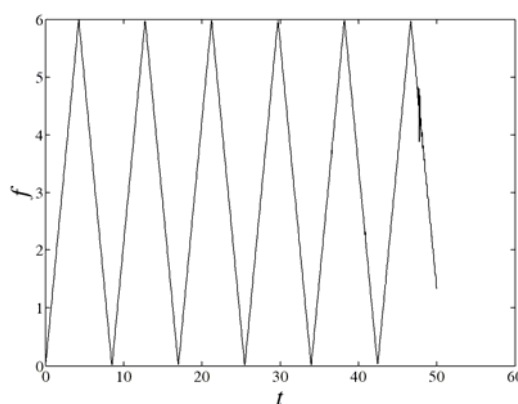


Рис. 4

В пятом параграфе дано описание традиционного метода квадратур сверток (Lubich Ch. 1988). Отмечено, что для численных исследований имеет существенное значение способ вычисления весовых множителей:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

где Δt – шаг по времени; $\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$; n – номер шага по времени, $n = \overline{0, N}$; R – параметр метода.

Традиционный метод использует метод трапеций с постоянным шагом для вычисления такого интеграла. В параграфе представлена следующая формула построения ω_n на основе переменного шага:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \left(\bar{f}(\gamma(Re^{in\varphi_k})/\Delta t) e^{-in\varphi_k} + \bar{f}(\gamma(Re^{in\varphi_{k+1}})/\Delta t) e^{-in\varphi_{k+1}} \right) (\varphi_{k+1} - \varphi_k) / 2.$$

Для случаев, когда $\bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t) e^{-in\varphi}$ – сильно осциллирующая функция, предложено использовать комбинированную формулу, использующую специфику интегрирования таких функций.

Модификация на основе линейной аппроксимации функции $\bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_n(\Delta t) &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t) e^{-in\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}} [D_1(w) \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi_k})/\Delta t) + D_2(w) \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi_{k+1}})/\Delta t)],\end{aligned}\quad (5)$$

где $w = -n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}$, $D_{1,2}(w) = e^{\begin{cases} \sin w / w \pm (w \cos w - \sin w) i / w^2 & \text{при } |w| > w_2, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w_2. \end{cases}}$

Модификация на основе квадратичной аппроксимации функции $\bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_n(\Delta t) &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t) e^{-in\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}} [D_1(w) \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi_k})/\Delta t) + \\ &+ D_2(w) \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi_{k+1/2}})/\Delta t) + D_3(w) \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi_{k+1}})/\Delta t)],\end{aligned}\quad (6)$$

где при $|w| > w_3$ $\begin{cases} D_1 = (2ie^{iw} + we^{iw} + 3we^{-iw} - 2ie^{-iw} + 2w^2ie^{-iw})/2w^3, \\ D_2 = 2(-ie^{iw} - we^{iw} + ie^{-iw} - pe^{-iw})/w^3, \\ D_3 = -(-3we^{iw} - 2ie^{iw} + 2w^2ie^{-iw} + 2ie^{-iw} - we^{-iw})/2w^3, \end{cases}$ при $|w| \leq w_3$ $\begin{cases} D_1 = e^{-wi}/2, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = e^{wi}/2. \end{cases}$

Возможности построенных модификаций метода квадратур свертки продемонстрированы на численных примерах. На рис. 5 представлены оригиналы искомых функций для следующих параметров схемы: $N = 500$, $\Delta t = 0,01$, $L = 501$. Цифрой 1 обозначена кривая, построенная по традиционной формуле метода квадратур свертки, цифрами 2 и 3 – кривые, построенные по результатам применения модификации метода с линейным и квадратичным интерполированием функции $\bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t)$. Применение метода квадратур свертки с переменным шагом при линейной интерполяции подынтегральной функции не позволяет решить проблему устойчивости численного построения искомой функции на выбранном временном интервале без измельчения расчетной сетки. На рис. 6 показано возникновение численных осцилляций при следующих параметрах схемы: $N = 500$, $\Delta t = 0,01$ и использовании равномерных сеток на интервалах $\varphi: [0, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$ из расчета выбора соответственно $L = 125$, $L = 21$ и $L = 125$.

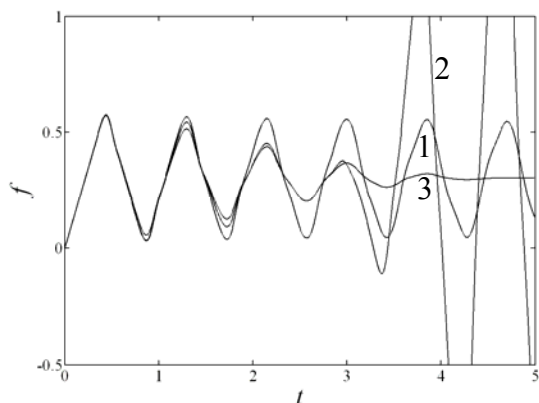


Рис. 5

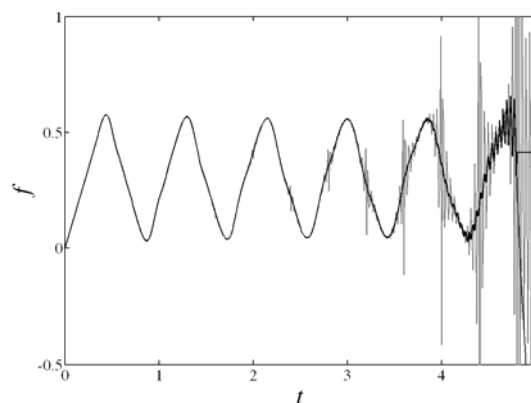


Рис. 6

Применение комбинированных формул (5), (6) позволяет получить искомый результат на той же сетке (гладкая кривая на рис. 6). Кривые по формулам (5) и (6) неразличимы. В численных экспериментах полагалось, что в формуле (5) $w_2 = 3$, а в формуле (6) $w_2 = 6$.

Построение модификаций метода квадратур сверток на основе комбинированных формул (5), (6) позволило преодолеть такие ограничения традиционного подхода, как выбор числа шагов N по времени, совпадающим с числом узлов L по углу φ . Использование модификаций позволяет сократить необходимое число точек разбиения для достижения заданной точности. В рассмотренном примере удалось понизить число точек в 2 раза, а при уменьшении шага по времени число точек еще более сократится, т.к. информативная часть функции \bar{f} при уменьшении шага по времени будет уплотняться к точкам 0 и 2π (приведен пример с уменьшением количества точек в 3 раза).

В главе II описана методика гранично-элементного решения на основе метода Дурбина и квадратур сверток, и приведены результаты тестовых экспериментов.

В первом параграфе дано описание используемой гранично-элементной дискретизации. В основе ГЭ-моделирования положено регуляризованное ГИУ прямого подхода. ГЭ-дискретизация состоит в разбиении поверхности на биквадратичные ГЭ, причем треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные. Неизвестные граничные поля интерполируются следующим образом: перемещения – билинейно, а поверхностные силы выбираются постоянными на элементе. Коллокация ГИУ проводится во всех неизвестных узлах ГЭ-сетки. Решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Элементы разрешающей матрицы получаются с помощью локального численного интегрирования по Гауссу с использованием приема устранения особенности.

Использован адаптивный алгоритм поэлементного численного интегрирования. Система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Для численного обращения преобразования Лапласа используется метод Дурбина.

Во втором параграфе построены дискретные аналоги на основе метода квадратур сверток. При построении численной схемы использованы все основные алгоритмы ГЭ-моделирования, использованные в первом параграфе. При пошаговом решении задачи на основе метода квадратур сверток возникает следующий дискретный аналог базовых ГИУ:

$$\int_0^e f(t-\tau)g(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t) \quad n = \overline{0, N},$$

$$c_{ij}(x)u_i(x, n\Delta t) = \sum_{e=1}^E \sum_{k=0}^n \left\{ \omega_{n-k}^e(\hat{U}_{ij}, x, \Delta t) t_i^e(k\Delta t) \right\} - \sum_{e=1}^E \sum_{j=1}^4 \sum_{k=0}^n \left\{ \omega_{n-k}^{ef}(\hat{T}_{ij}, x, \Delta t) u_i^{ef}(k\Delta t) \right\},$$

$$\omega_n^{ef}(\hat{T}_{ij}, x, \Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Gamma_e} \hat{T} \left(x, y, \gamma \left(\operatorname{Re}^{-il\frac{2\pi}{L}} \right) / \Delta t \right) N_e^f(y) d\Gamma_e e^{-inl\frac{2\pi}{L}},$$

$$\omega_n^e(\hat{U}_{ij}, y, \Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Gamma_e} \hat{U} \left(x, y, \gamma \left(\operatorname{Re}^{-il\frac{2\pi}{L}} \right) / \Delta t \right) d\Gamma_e e^{-inl\frac{2\pi}{L}},$$

где $N(y)$ – билинейные функции формы.

В третьем параграфе описана программа визуализации ГЭ-моделирования. Программа позволяет формировать полутонные или многоцветные изображения элементов конструкций, сеточной геометрии, физических полей в различные моменты времени. Исходными данными является геометрическая модель и значения граничных полей.

В четвертом параграфе даны краткие характеристики программной реализации. Программное обеспечение предназначено для расчета динамики составных трехмерных вязкоупругих тел и создано на основе имеющегося пакета программ. Реализация осуществлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН.

В пятом параграфе приведены результаты решений тестовых задач. Рассмотрена задача о сферической полости в безграничной вязкоупругой среде. В момент времени $t=0$ к границе полости прикладывается давление $p=t$ при $t \in [0,1]$ и $p=1$ при $t>1$. Исследуются перемещения на границе полости. Результаты расчетов по методу Дурбина и квадратур сверток сравниваются с аналитическим решением. Методики продемонстрировали высокую точность – ошибка численных результатов и разброс решений по граничным элементам составил менее 1%.

Рассмотрена задача о действии скачка давления на торец составного призматического тела силы $P(t) = 1_+(t) \text{ Н/м}^2$, где $1_+(t)$ – правосторонняя функция Хевисайда.

Составное призматическое тело имеет жестко закрепленный торец (рис. 7). Рассматриваются подобласти с одинаковыми параметрами материала:

$$E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0;$$

$\rho = 7850 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 0; \quad \mu = 1,055 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$. Каждая из подобластей содержит по 72 элемента и 88 точек на четверти сетки.

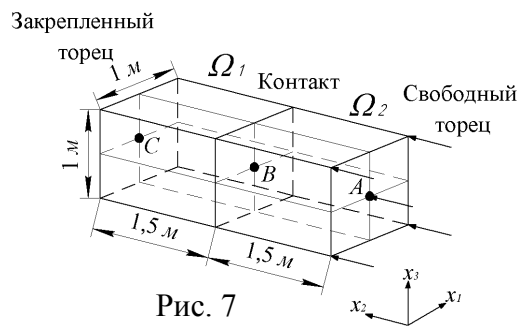


Рис. 7

На рис. 8, 9 приведены перемещения на свободном торце и в области контакта соответственно. На рис. 10, 11 приведены напряжения, возникающие на закрепленном торце и в области контакта. Цифрами 1 обозначено решение с использованием метода квадратур сверток, цифрами 2 – с использованием метода Дурбина, штриховыми линиями – аналитическое решение.

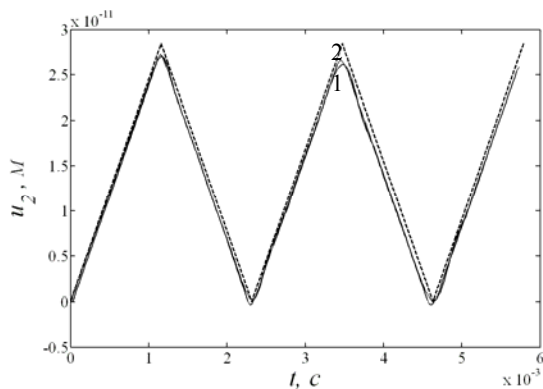


Рис. 8

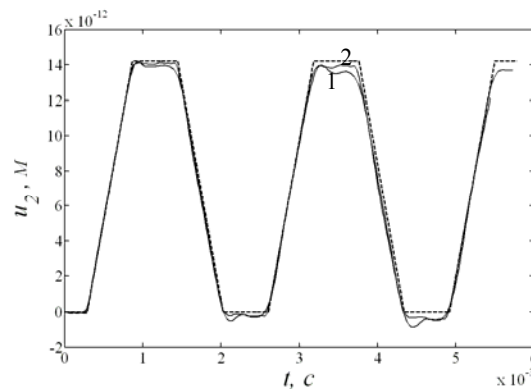


Рис. 9

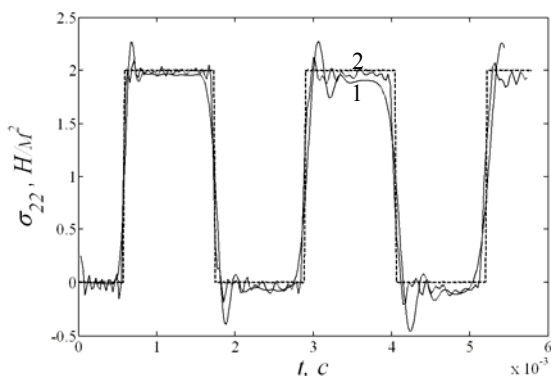


Рис. 10

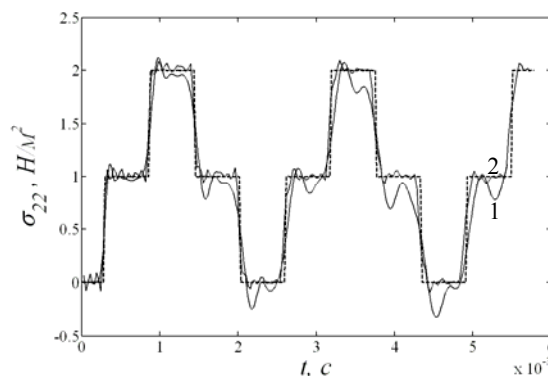


Рис. 11

Проведены расчеты с учетом вязкоупругих свойств материала. Численно продемонстрировано влияние разномодульности подобластей на волновые поля перемещений и напряжений. Увеличение жесткости второй подобласти приводит к следующему: изменение формы отклика перемещений в точке А – появление временных отрезков с менее резким изменением амплитуды перемещений;

существенное изменение формы отклика напряжений в точке С – исчезновение участков постоянных значений напряжений и т.д. Для однородного вязкоупругого тела для разных моделей построены кривые деформации, снятые в точке А. Использование моделей Кельвина-Фойгта, стандартного вязкоупругого тела приводят к тому, что наклон кривой ползучести в начальный момент времени имеет конечную производную, а использование слабосингулярной модели приводит к тому, что наклон кривой имеет бесконечную производную. Если тело составлено так, что Ω_1 – упругая подобласть, а Ω_2 – вязкоупругая подобласть, то в отклике напряжений в точке С возможно появление перемещений и напряжений другого знака.

Гранично-элементные схемы, построенные на основе метода Дурбина и квадратур сверток, продемонстрировали на модельных задачах возможности получения высокоточных значений граничных перемещений и напряжений. Соответствующий набор параметров схем позволяет получить графически неразличимые численные решения.

В главе III представлены ГЭ-решения прикладных задач.

В первом и втором параграфах представлены задачи о действии вертикальной силы на поверхности упругого и вязкоупругого полупространства соответственно. Исследуется точка на дневной поверхности полупространства.

Численные результаты для нагрузки хевисайдовского вида, полученные методами квадратур сверток и Дурбина, сравниваются с имеющимся в литературе решением. Приведены результаты расчетов для нагрузки вида $P(t) = P_0 \{1_+(t) - 1_+(t - \alpha)\}$, P_0, α – постоянные.

Если для хевисайдовской нагрузки максимум в отклике перемещений приходится на волну Релея, соответствующую скачку подъема силы в начальный момент времени, то для нагрузки в виде разности хевисайдовских сил максимум в отклике перемещений приходится на волну Релея, соответствующую скачку падения силы в момент $t = \alpha$. Разница величин амплитуд соответствует величине отклика на постоянную (статическую) часть отклика.

Проведены исследования влияния длины импульса нагрузки и вязкости материала на характер поведения отклика перемещений. Использование моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта может существенно изменить отклик поверхностных волн, однако имеются диапазоны характерных времен ползучести и релаксации когда изменения в отклике проявляется лишь в уменьшении амплитуды. Использование модели стандартного вязкоупругого тела и слабосингулярного ядра приводит к изменению скорости и амплитуды отклика перемещений. Продемонстрирована

визуализация распространения поверхностных волн на основе полутонковых изображений.

В третьем параграфе представлены задачи о действии вертикальной силы на поверхность полупространства, ослабленного под площадкой приложения силы сферической или кубической полостью. Рассматриваются два варианта нагрузки: хевисайдского вида и разницы функций Хевисайда. Исследуются граничные перемещения на дневной поверхности полупространства.

Результаты показали, что для сферической и кубической полостей форма отклика в сравнении с задачей для полупространства поменялась. Причем, в ближней зоне форма полости влияет на форму отклика: для сферической полости в отклике проявились два всплеска в головной части поверхностной волны, а для кубической полости в головной части отклика такого разделения нет. Продемонстрирована визуализация распространения поверхностных волн на основе полутонковых изображений.

Четвертый и пятый параграфы посвящены задачам о действии давления внутри сферической или кубической полости, расположенной в упругом полупространстве.

Результаты показали, что максимальные перемещения возникли в точках близких к дневной поверхности полупространства, как для сферической полости, так и для кубической. Кроме того, было проведено сравнение с соответствующими численными решениями задач о полостях в пространстве. Показано, что граничные перемещения в точках полостей ведут себя аналогично граничным перемещениям для задачи о полостях в пространстве до того момента, как волны достигают дневной поверхности полупространства. Продемонстрирована визуализация распространения поверхностных волн на основе полутонковых изображений.

В шестом параграфе приведено численное решение задачи о штампе на полупространстве. Действует вертикальная сила на деформируемый штамп, расположенный на полупространстве (рис. 12). Параметры материалов штампа и полупространства приведены в следующей таблице:

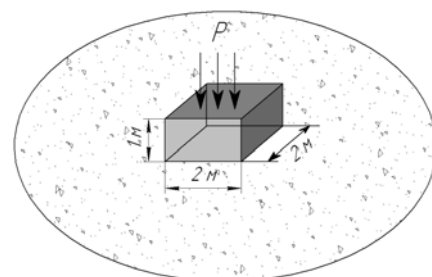


Рис. 12

	штамп	полупространство
E	$3 \cdot 10^8 \text{ Н / м}^2$	$1,38 \cdot 10^8 \text{ Н / м}^2$
ν	0,2	0,35
ρ	2000 кг / м^3	1966 кг / м^3

Рассматривается нагрузка вида $P(t) = P_0(1_+(t) - 1_+(t - \alpha))$, $P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$, $\alpha = 0,0085 \text{ с}$. Перемещения снимаются в точке (2,33; 2,33; 0). За начало координат выбран центр контактной грани штампа. Приведены результаты расчетов, когда штамп и полупространство описываются упругой моделью. Первоначально построено численное решение, полученное другими авторами. Полученное совпадение и дальнейшее исследование позволили установить, что известное из литературы решение зависит от гранично-элементной сетки и дает завышение амплитуды отклика поверхностной волны. Сходимость на выбранных сетках продемонстрирована для модифицированного метода Дурбина на рис. 13, а для метода квадратур сверток – на рис. 14. Исследовались решения на следующих сетках:

Номер сетки	Штамп		Полупространство	
	Кол-во элементов	Кол-во точек	Кол-во элементов	Кол-во точек
1	54	56	90	92
2	216	218	360	362
3	24	33	216	241
4	96	113	864	913

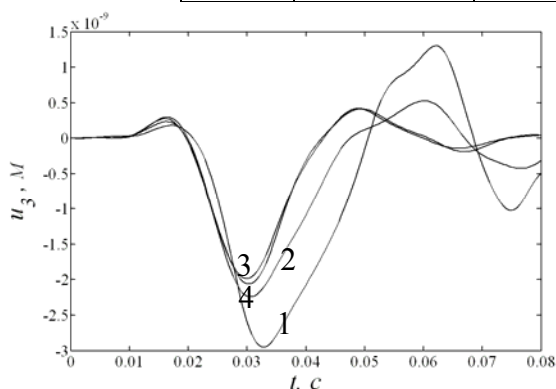


Рис. 13

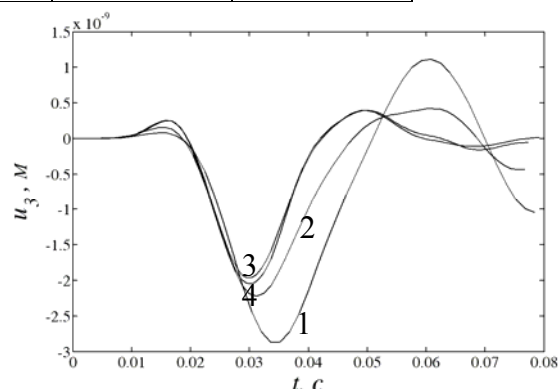


Рис. 14

Номер кривой на графике соответствует номеру сетки, по которой велись расчеты.

Проведены расчеты с использованием метода Дурбина для различных вязкоупругих моделей, рассчитанных по сетке № 4 для различных параметров вязкости. Проведены расчеты для случая, когда штамп и полупространство описываются разными вязкоупругими моделями. Продемонстрирована визуализация распространения поверхностных волн на основе трехмерных и полутонковых изображений.

В седьмом параграфе представлены расчеты по задаче о реакции защитного корпуса атомной станции теплоснабжения на действие ударной силы. Решение этой задачи сравнивалось с имеющимся в литературе гранично-элементным решением,

построенным для случая когда полупространство, в которое заглублен корпус, моделировалось амортизаторами. Учет взаимодействия корпуса с деформируемым полупространством продемонстрировал качественное совпадение и количественные отличия в искомым граничных полях. Продемонстрирована визуализация распространения поверхностных волн на основе полутоновых изображений.

Основные результаты и выводы

1. Развита методика численного решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с методом квадратур сверток и создано соответствующее программное обеспечение для расчета во времени неизвестных волновых полей трехмерных вязкоупругих составных тел;
2. Развита методика численного решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с методом Дурбина и создано соответствующее программное обеспечение для расчета неизвестных волновых полей трехмерных вязкоупругих составных тел;
3. Разработаны модификации методов квадратур сверток и Дурбина;
4. Создано программное обеспечение по визуализации результатов гранично-элементного моделирования;
5. Получены ГЭ-решения и проведен анализ тестовых и прикладных волновых задач, в том числе:
 - о действии скачка давления на торец составного призматического тела;
 - о действии вертикальной силы на поверхности вязкоупругого полупространства;
 - о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью (сферическая, кубическая);
 - о действии скачка давления внутри полости (сферическая, кубическая), расположенной в упругом полупространстве;
 - о штампе на полупространстве;
 - о реакции защитного корпуса атомной станции теплоснабжения на действие ударной силы.

Основные результаты и защищаемые положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Игумнов Л.А., Белов А.А., Ануфриев А.А. Исследование методом Дурбина фундаментальных и сингулярных матриц-решений трехмерной

- модифицированной теории вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2004. – Вып. 66. – С. 18-30.
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное исследование волновых полей в слоистом полупространстве от действующей по нормали поверхностной сосредоточенной силы // IX Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки: тезисы докладов. – Саров. – 2004. – С. 14.
 3. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Ануфриев А.А. Гранично-элементное моделирование динамического деформирования трехмерных элементов конструкций // Волновая динамика машин и конструкций. Всероссийская научная конференция, посвященная памяти профессора А.И. Весницкого, (Н.Новгород, 1-5 июня 2004 г.). Тезисы докладов. – Н.Новгород. – 2004. – С. 8.
 4. Игумнов Л.А., Белов А.А., Ануфриев А.А., Литвинчук С.Ю., Аменицкий А.В., Ермолаев М.Д. Гранично-элементная методика расчета трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости и вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2005. – Вып. 67. – С. 91-101.
 5. Игумнов Л.А., Белов А.А. Численное решение интегральных уравнений на одиночной плоской волне для начально-краевых задач трехмерной теории упругости конечных тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 68. – С. 23-28.
 6. Белов А.А., Аменицкий А.В. Численное решение граничных интегральных уравнений трехмерной динамической теории упругости с использованием преобразования Лапласа // 10 Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки: Тезисы докладов. / Н.Новгород: Изд. Гладков О.В. – 2005 г. – С. 13-14.
 7. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Аменицкий А.В. Гранично-элементное моделирование нестационарного динамического деформирования трехмерных элементов конструкций // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 1(7). – С. 76-89.
 8. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. Об исследовании влияния вязкости материала на волновые поля перемещений и напряжений методом граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 68. – С. 161-169.

9. Белов А.А., Шишкова Е.А. Расчеты динамических задач теории упругости методом граничных элементов // 11 Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки. / Н.Новгород: Издание ИП Гладкова О.В. – 2006 г. – С. 56.
10. Белов А.А. Сравнение расчетов динамических задач теории упругости, полученных на основе разных формулировок метода граничных элементов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III (Н.Новгород, 22-28 августа 2006). / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – С. 33.
11. Белов А.А., Шишкова Е.А., Аменицкий А.В. Исследование влияния вязкоупругих свойств материала на волновые поля в элементах конструкций // Фундаментальные проблемы машиноведения: Новые технологии и материалы. Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная 20-летию Нижегородского филиала ИМАШ РАН им. А.А. Благонравова. Тезисы докладов. / Н.Новгород: Издание ЗАО «Интек-НН». – 2006. – С. 14.
12. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – Вып. 69. – С. 125-136.
13. Белов А.А., Шишкова Е.А., Лаганкин А.С. Вариант метода гранично-временных элементов для анализа динамики трехмерных кусочно-однородных тел // Фундаментальные проблемы машиноведения: Новые технологии и материалы. Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная 20-летию Нижегородского филиала ИМАШ РАН им. А.А. Благонравова. Тезисы докладов. / Н.Новгород: Издание ЗАО «Интек-НН». – 2007. – С. 8.
14. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. Применение метода граничных элементов к расчету трехмерных динамических задач теорий упругости и вязкоупругости // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXII Международной конференции. / СПб: 24-27 сентября 2007г. Изд-во: ООО «НИЦ Моринтех». Т.2. – С. 195-200.
15. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Применение метода граничных элементов к расчету трехмерных динамических задач теорий упругости и вязкоупругости // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тезисы

докладов XXII Международной конференции. / СПб: 24-27 сентября 2007 г. Изд-во: ООО НИЦ «Моринтех», 2007. – С. 61-62.

16. Белов А.А., Дворянкин М.И., Литвинчук С.Ю. Применение метода гранично-временных интегральных уравнений для решения смешанных задач теории упругости // Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (Н.Новгород, 27-30 ноября 2007г.) / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – С. 31-34.
17. Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Васильев А.Н. О некоторых особенностях алгоритма Дурбина по численному обращению преобразования Лапласа // Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (Н.Новгород, 27-30 ноября 2007г.) / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – С. 35-38.
18. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Дьянов Д.Ю. Влияние вязкоупругих свойств материала на волны перемещений и напряжений в элементах конструкций // Машиностроение: наука, техника, образование: сб. науч. тр. VI Всерос. науч.-практ. конф., г.Саранск, 22-23 окт. 2007г. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та. – 2007. – С. 158-160.
19. Белов А.А., Шишкова Е.А. Применение метода гранично-временных элементов к решению трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости//12 Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки: Материалы докладов (12;. 2007). –Н.Новгород: Изд-во ИП Гладкова О.В., 2007. – С. 51-52.
20. Белов А.А., Шишкова Е.А. Гранично-элементное моделирование динамического деформирования вязкоупругих элементов конструкций в трехмерной постановке//12 Нижегородская сессия молодых ученых. Технические науки: Материалы докладов (12;. 2007). – Н.Новгород: Изд-во ИП Гладкова О.В. – 2007. – С. 61.
21. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Применение метода гранично-временных элементов к решению трехмерных динамических задач теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XI Межд. конф., г.Ростов-на-Дону. Изд-во ООО «ЦВВР». 2007. – С. 59-63.
22. Белов А.А., Игумнов Л.А., Дьянов Д.Ю., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементное моделирование решений трехмерных динамических задач теории вязкоупругости на основе модификации метода Дурбина // Современные

проблемы механики сплошной среды. Труды XI Межд. конф. / г.Ростов-на-Дону. Изд-во ООО «ЦВВР». – 2007. – С. 59-63.

23. Белов А.А., Игумнов Л.А. Вариант гранично-элементного решения интегральных уравнений начально краевых задач трехмерной теории вязкоупругости // XIV международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: «ИД МЕДПРАКТИКА-М». – 2008. – С. 37.
24. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементная методика на основе модифицированного метода квадратур сверток в динамических задачах упругих тел// Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – Вып. 70. – 2008. – С. 156-163
25. Белов А.А. Гранично-элементный расчет динамики составных вязкоупругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – Вып. 70. – 2008. – С. 164-170

Подписано в печать 25.11.2008. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1. Заказ № 817. Тираж 100.

Отпечатано в типографии ННГУ им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37

