На правах рукописи

ФРОЛАГИНА Елена Владимировна

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННО ИЗВЕСТНЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Специальность: 01.01.02 – дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2008

Работа выполнена в аспирантуре Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и в Нижегородском государственном техническом университете им. Р.Е. Алексеева

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор **М.И. Сумин**
Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук, профессор **Д.В. Баландин**

Кандидат физико-математических наук, доцент **М.М. Потапов**

Ведущая организация — Институт математики и механики Уральского Отделения РАН

Защита диссертации состоится 19 февраля 2009 г. в 14.40 на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в Нижегородском государственном университете по адресу: 603950, Нижний Новгород, пр.Гагарина, 23, корп.2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского http://www.unn.ru

Автореферат разослан 16 января 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.166.06,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И.Лукьянов

Общая характеристика диссертации

Диссертация посвящена развитию математической теории оптимального управления для задач с ограничениями, содержащими аддитивно входящие в них параметры, и с исходными данными, то есть функциями, задающими "правые части" дифференциальных уравнений, интегранты и терминальные слагаемые функционалов, известными лишь приближенно.

Актуальность темы. Хорошо известно, что центральный результат математической теории оптимального управления – принцип максимума Понтрягина явился результатом потребностей сугубо прикладных исследований[1]. За время, прошедшее после его открытия, теория необходимых условий оптимальности и, прежде всего, теория самого принципа максимума получили громадное развитие.

Однако в абсолютном большинстве работ, посвященных теории необходимых и достаточных условий в оптимальном управлении, рассматривались задачи, исходные данные которых подразумевались априори заданными и точно известными. Из громадного числа работ, посвященных теории необходимых и достаточных условий можно указать лишь несколько работ, в которых при анализе этих условий в задачах оптимального управления так или иначе учитывалась возможность приближенного задания входных данных. К их числу можно отнести, пожалуй, лишь работы М.И. Сумина[2] .

В то же время, представляется, что развитие теории необходимых и достаточных условий в направлении учета приближенно известных исходных данных столь же естественно, что и развитие методов решения задач оптимизации и оптимального управления[3], теории некорректных задач[4]. Это обусловлено, во-первых, потребностями многочисленных приложений, неизбежно приводящих к необходимости учета приближенно известных исходных данных (исходные данные могут содержать поставляемые экспериментом функции, физические константы и т.п.), во-вторых, тем, что при анализе алгоритмов решения задач оптимизации и оптимального управления самую существенную роль играют именно необходимые и достаточные условия оптимальности, и, в-третьих, тем, что, с общей точки зрения, задачи оптимального управления представляют собой тот класс математических задач, в котором неустойчивость по возмущению исходных данных не является патологическим событием.

---

[1]Гамкрелидзе Р.В. Математические работы Л.С. Понтрягина // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). Том I. Оптимальное управление. 1998. Т.60. С. 5-23.

[2][С1] Сумин М.И. Оптимальное управление системами с приближенно известными исходными данными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27. №2. С. 163-177.

[С2] Сумин М.И. Математическая теория субоптимального управления распределенными системами: Диссертация ... доктора физ.-мат. наук. Н.Новгород: ННГУ, 2000.

[3][В1] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

[4]Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1986.

Возникающие в этой ситуации при изучении необходимых и достаточных условий трудности связаны, прежде всего, с тем обстоятельством, что само понятие классического оптимального управления в случае приближенно известных данных в значительной степени "теряет смысл", так как в "возмущенной" задаче оптимального элемента может и не существовать, а в случае его существования не вполне понятно какое "отношение" оно имеет к исходному оптимальному управлению невозмущенной задачи. Рассмотрим в этой связи три простейших иллюстративных примера.

Пример 1. *Пусть имеется задача минимизации с ограничением типа равенства*

$$\int_0^1 (x(t) + u(t))dt \to \min, \;\; x(1) = 1,$$

где $x(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = u(t), \; x(0) = 0, \; t \in [0, 1], \;\; u(t) \in [-1, 1].$$

Легко видеть, что в этой задаче оптимальное управление $u_0(t) \equiv 1$. Оно может быть идентифицировано с помощью принципа максимума. Так как единица принадлежит границе области достижимости в рассматриваемой задаче, то это же управление можно трактовать как экстремальное управление (см., например,[5]*) и идентифицировать с помощью принципа максимума для экстремальных управлений. Рассмотрим возмущенную задачу*

$$\int_0^1 (x(t) + u(t))dt \to \min, \;\; x(1) = 1 + \delta, \quad \delta > 0.$$

Очевидно, множество классических допустимых управлений в возмущенной задаче пусто. По этой причине понятие классического оптимального управления теряет для нее смысл при любом сколь угодно малом $\delta > 0$.

Пример 2. *Рассмотрим хорошо известную (см., например, [B1]) задачу*

$$\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \to \min, \;\; \int_0^1 x^2(t)dt = 0,$$

где $x(t)$ – решение той же задачи Коши, что и в предыдущем примере, и так же $u(t) \in [-1, 1]$. Оптимальное управление здесь $u_0(t) \equiv 0$, а нижняя грань задачи равна нулю. Пусть возмущенная задача имеет вид

$$\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \to \min, \;\; \int_0^1 x^2(t)dt = \delta, \quad \delta > 0.$$

Можно показать, что оптимальное управление в возмущенной задаче при всех достаточно малых $\delta > 0$ существует и имеет вид функции, принимающей значения ± 1 с учащающимися переключениями при $\delta \to 0$. При этом очевидно,

[5] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

что такие управления не сходятся в метрике L_p при любом $p \in [1, +\infty]$ к оптимальному в невозмущенной задаче. Более того, как известно (см., например, [B1]), нижняя грань возмущенной задачи стремится к значению -1, которое не совпадает с нижней гранью исходной задачи.

Пример 3. *Рассмотрим обратную задачу финального наблюдения для уравнения теплопроводности по восстановлению начального возмущения, эквивалентную задаче оптимального управления*

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \to \inf, \quad z[v](\cdot, T) = 0 \in L_2(0,1), \quad v(x) \in [-1, 1],$$

где $z[v](x,t)$ – соответствующее управлению v решение задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\ z(x,0) = v(x),\ x \in \Omega \equiv (0,1),$$

$$\frac{\partial z(0,t)}{\partial x} - z(0,t) = 0,\ \frac{\partial z(1,t)}{\partial x} + z(1,t) = 0,\ t \in [0,T].$$

Единственным допустимым и оптимальным (классическим) управлением в этой задаче является $v(x) \equiv 0$, $0 \le x \le 1$. Рассмотрим возмущенную задачу

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \to \inf, \quad z[v](\cdot, T) = p \in L_2(0,1)$$

где $p \in L_\infty(0,1)$ – не равная нулю функция, имеющая разрывы первого рода на интервале $(0,1)$. Очевидно, поскольку функция p разрывная, то в силу "заглаженности" решений начально-краевой задачи, множество понимаемых классическим образом допустимых управлений в возмущенной задаче пусто.

Анализ рассмотренных примеров, число которых можно неограниченно увеличивать, говорит о естественности и полезности рассмотрения в качестве "основного" элемента теории не классического оптимального управления, а минимизирующей последовательности допустимых управлений, что и делается в настоящей диссертации. Одновременно, в качестве минимизирующей последовательности для изучаемого класса задач принимается не классическая минимизирующая последовательность, элементы которой удовлетворяют ограничениям задачи в точном смысле, а так называемое минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги[6]. Как известно, элементы этих обобщенных минимизирующих последовательностей удовлетворяют ограничениям задачи лишь в пределе. Заметим при этом, что в примерах 1, 3 при $\delta > 0$ в возмущенной задаче классических минимизирующих последовательностей просто не существует, а в примере 2 при тех

[6] [B2] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

же $\delta > 0$ они "никак не связаны" с классическим оптимальным управлением в невозмущенной задаче[7].

Отметим, что использование понятия неклассической минимизирующей последовательности – минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги является адекватным с точки зрения развития содержательной теории указанных задач оптимального управления. Применение минимизирующих приближенных решений, которые ниже будем называть для удобства просто минимизирующими последовательностями, позволяет с единых позиций рассматривать как задачи, для которых их возмущенные аналоги не имеют классических решений (примеры 1, 3), так и задачи с разрешимыми в классическом смысле возмущениями (пример 2). Использование минимизирующих в указанном смысле последовательностей оправдано также и потому, что они всегда существуют, удобны с прикладной (инженерной) точки зрения (подробности см., например, в [В2]), несут в себе регуляризирующее начало, и, по сути дела, именно они существенно и используются в теории численных методов оптимального управления, в теории регуляризации некорректных задач[8]. Подчеркнем одновременно, что одним из основных источников возникновения неклассических минимизирующих последовательностей является конечно-разностная аппроксимация задач оптимального управления с ограничениями.

Использование понятия минимизирующей последовательности в качестве основного приводит к необходимости получения для них необходимых и достаточных условий. Одновременно оказывается естественным вести речь и об их регуляризирующих свойствах, а также о регуляризирующих свойствах самого принципа максимума Понтрягина и выделении характерных для задач оптимального управления трех соответствующих уровней регуляризации. Первый из них связан с понятием так называемого регуляризованного принципа максимума для минимизирующих последовательностей, второй – с построением минимизирующих последовательностей в линейно-выпуклых по фазовой переменной задачах и третий, характерный для классической теории регуляризации, – с построением сходящихся по аргументу минимизирующих последовательностей. Отметим, что вопрос о регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина возможно рассматривать лишь тогда, когда основным в теории является именно понятие минимизирующей последовательности. По этой причине ранее регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина никем не рассматривались.

Как уже отмечено выше, в диссертации рассматриваются не "отдельные" за-

[7] Строго говоря, имеется теснейшая связь этих последовательностей с обобщенными в смысле Р.В. Гамкрелидзе оптимальными управлениями. В частности, получаемые в работе необходимые условия для минимизирующих последовательностей могут быть "замкнуты" и переписаны в терминах обобщенных оптимальных управлений.

[8] В частности, отметим здесь, что вырабатываемые в теории некорректных задач по методу невязки (см., например, [В1]) сходящиеся к нормальным решениям уравнений первого рода вида $Az = u$ последовательности элементов являются ни чем иным, как минимизирующими приближенными решениями в соответствующих задачах минимизации функционалов типа квадрата нормы при ограничении типа равенства $\|Az - u\|^2 = 0$.

дачи оптимального управления с приближенно известными исходными данными, а так называемые параметрические задачи, то есть, другими словами, семейства задач, зависящих от параметров, которые могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными. Эти параметры аддитивно входят в ограничения задачи. Изучение параметрических задач, в соответствии с общей идеологией метода возмущений[9], дает возможность рассматривать соответствующие функции (функционалы) значений как функции параметра и, основываясь на их специфических дифференциальных свойствах, получать информацию "в целом" о семействе, и, как следствие, во многих важных частных случаях о каждой конкретной задаче отдельно. Одним из таких важных вопросов в случае приближенно известных данных, является, например, вопрос об устойчивости значения задачи. Наличие такого параметра позволяет охарактеризовать также при определенных условиях на исходные данные множество тех задач, в которых можно заведомо пользоваться классическим понятием оптимального управления, несмотря на погрешности в исходных данных. Одновременно изучение параметрических задач позволяет утверждать, что не являются патологическими и задачи, в которых единственно оправданным при неточно известных исходных данных является понятие минимизирующей последовательности.

Отметим, что эффективное изучение параметрических задач оптимального управления, в том числе и с приближенно известными исходными данными, по сути дела, невозможно без использования понятия обобщенной минимизирующей последовательности, еще и потому, что порождаемая именно таким понятием функция значений задачи в самой общей ситуации является полунепрерывной снизу[10]. Данное обстоятельство позволяет применить к исследованию оптимизационных задач развитый в последние десятилетия аппарат негладкого (нелинейного) анализа, а именно, анализа нормалей (проксимальных нормалей) к замкнутым множествам и обобщенного дифференцирования негладких (полунепрерывных снизу) функций в банаховых пространствах (см., например,[11]).

Подытоживая сказанное выше, можно утверждать, что теория необходимых и достаточных условий для задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными как в случае "индивидуальной", так и параметрической постановки, к настоящему времени практически не развита. В то же время, с учетом сказанного выше, представляется, что развитие теории необходимых и достаточных условий для задач оптимального управления с приближенно известными

[9] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[10] Заметим, что функция значений, порождаемая классическим понятием минимизирующей последовательности таким свойством, вообще говоря, не обладает.

[11] [K] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

[L] Loewen P.D. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. V.2. Amer. Math. Soc., Providence, RI,1993.

[M] Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory; II: Applications, Springer, Berlin, 2006.

исходными данными несомненно является актуальной задачей. Подчеркнем при этом, что такая теория неизбежно приобретает определенные черты, свойственные теории методов решения некорректных задач, и, более того, оказывается полезной при исследовании этих методов.

Цель диссертационной работы. Цель диссертационного исследования состоит в разработке теории параметрических задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными, заключающейся в исследовании, в первую очередь, вопросов указанной теории, связанных с необходимыми и достаточными условиями на минимизирующие последовательности, с регуляризирующими свойствами минимизирующих последовательностей и самого принципа максимума Понтрягина.

Методы исследования. В диссертации использованы методы оптимизации, оптимального управления, негладкого анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа и теории функций действительного переменного.

Научная новизна и основные результаты. В диссертации получены новые для оптимального управления теоретические результаты, имеющие, в частности и прикладное значение. Автором получены следующие новые результаты:

1. Предложена ориентированная на задачи оптимального управления абстрактная схема исследования задачи оптимизации на полном метрическом пространстве функционала с аддитивно зависящим от параметра ограничением типа включения в выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства. Показана применимость предложенной схемы к конкретным задачам оптимального управления с приближенно известными исходными данными.

2. На основе указанных абстрактных результатов получены необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей в параметрической задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с приближенно известными исходными данными. Исследованы регуляризирующие свойства минимизирующих последовательностей и принципа максимума Понтрягина. Получены различные необходимые и достаточные условия регулярности, нормальности, условия устойчивости значений параметрических задач с приближенными данными.

3. Получены необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей в параметрической задаче оптимального управления в случае третьей краевой задачи для дивергентного параболического уравнения с приближенно известными исходными данными, исследованы их регуляризирующие свойства.

Степень обоснования результатов диссертации. Все научные положения и выводы диссертационной работы строго математически обоснованы. Результаты, полученные в диссертации, хорошо согласуются с работами других авторов как отечественных, так и зарубежных.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены в теории оптимального управления: 1) при теоретическом исследовании многих сложных конкретных задач; 2) при конструировании численных алгоритмов решения задач оптимального управления.

Результаты диссертации явились составной частью результатов работы, выполнявшейся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (КЦФЕ) Минобразования РФ при Санкт-Петербургском госуниверситете:

2003 - 2004 г.г. – грант КЦФЕ (№ госрегистрации 01.2.00311910, проект №E02-1.0-173), тема "Субоптимальное управление распределенными системами: операторные ограничения, граничные управления, численные алгоритмы, регуляризация, обратные задачи" (руководитель проф. Сумин М.И.);

2004 - 2006 г.г. – грант РФФИ (проект №04-01-00460), тема "Субоптимальное управление распределенными системами: операторные ограничения, граничные управления, численные алгоритмы, регуляризация, обратные задачи" (руководитель проф. Сумин М.И.);

2007 - 2009 г.г. – грант РФФИ (проект №07-01-00495), тема "Теория и алгоритмы оптимизации управляемых систем: субоптимизация, возмущения, двойственность, регуляризация, обратные задачи, вольтерровы уравнения." (руководители проф. Сумин В.И., проф. Сумин М.И.)[12].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались: на IX, X , XI, XII Нижегородских сессиях молодых ученых (Саров, 2004, 2005; Семенов, 2006, 2007)[13]; на XVI, XVII, XVIII весенних воронежских математических школах "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2005, 2006, 2007); на седьмой всероссийской конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Н.Новгород, 2005); на международной молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения" (Казань, 2005, 2006, 2007); на итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства" в Нижегородском госуниверситете (Н.Новгород, 2007).

По теме диссертации неоднократно делались доклады на семинаре по математической теории оптимального управления (руководители проф. Сумин В.И., проф. Сумин М.И., 2008 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в семнадцати научных публикациях [1] – [17], указанных в конце автореферата. В том числе три статьи из них [5], [13], [14] опубликованы в журналах, входящих в список ВАК изданий, рекомендуемых для публикации результатов диссертаций. Общее научное

[12]Результаты диссертации вошли в отчеты о НИР по указанным грантам.

[13]На X и XII сессиях доклады были отмечены дипломами соответственно третьей и первой степени.

руководство исследованиями в течение всего времени работы над диссертацией осуществлялось научным руководителем Суминым М.И. В опубликованных совместно с научным руководителем работах Сумину М.И. принадлежат постановка задачи и идеи доказательств основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3-х глав (главы I, II, III) и списка литературы. Содержание изложено на 143 страницах, включая список литературы из 93 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обсуждается актуальность темы диссертации и кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** диссертации, состоящей из трех разделов, изучается абстрактная задача оптимизации

$$I_0(w) \to \inf, \;\; I_1(w) \in \mathcal{M} + q, \;\; w \in \mathcal{D}, \; q \in \mathcal{H}, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}$ – полное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, элементы которого называются управлениями, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ – выпуклое замкнутое множество, $I_0 : \mathcal{D} \to R^1$ – непрерывный функционал, $I_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ – непрерывный оператор (непрерывный векторный функционал), $q \in \mathcal{H}$ – параметр.

Аксиоматика задачи нацелена на изучение задач оптимального управления с ограничением типа включения и на получение в них результатов, связанных с необходимыми и достаточными условиями на минимизирующие последовательности, а также со свойствами регулярности таких задач. Указанная аксиоматика является упрощенным и модифицированным вариантом абстрактной аксиоматики М.И. Сумина [C2]. В отличие от аксиоматики [C2], целевое пространство здесь предполагается лишь гильбертовым, и отсутствуют аксиомы, обеспечивающие получение абстрактных классических необходимых условий оптимальности, которые в соответствии с этой схемой предполагается получать в каждой конкретной задаче на основе соответствующего предельного перехода. Это позволило существенно упростить абстрактную аксиоматику без существенного ущерба при получении результатов в конкретных параметрических задачах. Все абстрактные результаты формулируются в терминах минимизирующих последовательностей.

В **п.1.1** приводится используемый во всех дальнейших построениях первой главы результат (теорема 1.1.1) о необходимых условиях субоптимальности для функционала типа максимума от конечного числа функционалов с некоторым набором традиционных для теории оптимизации свойств.

Далее, **в п.1.2** и **п.1.3** рассматривается абстрактная параметрическая задача (1), причем в качестве "искомого" элемента теории выступает минимизирующая последовательность в смысле Дж.Варги [B2]. Здесь приводится постановка абстрактной задачи, формулируется абстрактная аксиоматика, доказываются необходимые условия для минимизирующих последовательностей в двух принципиально разных случаях (теоремы 1.2.1, 1.3.3). В п.1.2 предполагается, что в задаче (1) целевое множество $\mathcal{M}$ является множеством конечной коразмерности, а в п.1.3 – нет. Так же в п.1.3 устанавливается связь необходимых условий с множителями Лагранжа и приводится представление в терминах множителей Лагранжа (точнее, в терминах слабых предельных точек последовательностей множителей Лагранжа) для предельных субградиентов в смысле [L] (теорема 1.3.6), (в основе определения которых лежит понятие проксимальной нормали [K], [L], [M]), функции значений задачи (1).

Главы II и III посвящены развитию теории оптимального управления в конкретных задачах оптимального управления с приближенно известными исходными данными. В каждой из них на определенном этапе доказательства необходимых условий для минимизирующих последовательностей существенным образом используются результаты абстрактных теорем первой главы.

Вторая глава диссертации состоит из трех разделов и посвящена задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями типа равенства и неравенства с приближенно известными исходными данными и параметрами $p \in R^k$, $q \in R^l$

$$(P_{p,q}) \qquad J_0(u) \to \inf,\ J_1(u) \le p,\ \ J_2(u) = q,\ u \in \mathcal{D},$$

где $J_1(u) = (J_{1,1}(u), \ldots, J_{1,k}(u)),\quad J_2(u) = (J_{2,1}(u), \ldots, J_{2,l}(u)),$

$$J_i(u) \equiv \int_0^T F_i(t, x[u](t), u(t))dt + \phi_i(x[u](T)),\ i = 0, 1, 2,$$

$$F_1(t, x, u) \equiv (F_{1,1}(t, x, u), ..., F_{1,k}(t, x, u)),\ F_2(t, x, u) = (F_{2,1}(t, x, u), ..., F_{2,l}(t, x, u)),$$
$$\phi_1(x) = (\phi_{1,1}(x), \ldots, \phi_{1,k}(x)),\quad \phi_2(x) = (\phi_{2,1}(x), \ldots, \phi_{2,l}(x)),$$

$x[u]$ – соответствующее управлению $u \in \mathcal{D}$ абсолютно-непрерывное решение задачи Коши ($a \in R^n$ – заданный вектор)

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)),\ \ x(0) = a,\ \ t \in [0, T], \tag{2}$$

$U \subset R^m$ – компакт, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(0, T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0, T)\}$. Правая часть управляемой системы $f : [0, T] \times R^n \times R^m \to R^n$, интегранты $F_0 : [0, T] \times R^n \times R^m \to R^1$, $F_{1,j} : [0, T] \times R^n \times R^m \to R^1$, $F_{2,j} : [0, T] \times R^n \times R^m \to R^1$, функции $\phi_0 : R^n \to R^1$, $\phi_{1,j} : R^n \to R^1$, $\phi_2 : R^n \to R^1$ удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям типа Каратеодори.

Обозначим через $\mathsf{f}^\delta \equiv \{f^\delta,\ F_0^\delta,\ F_1^\delta,\ F_2^\delta,\ \phi_0^\delta,\ \phi_1^\delta,\ \phi_2^\delta,\ U^\delta\}$, где $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, наборы невозмущенных ($\delta = 0$) и возмущенных ($\delta > 0$) исходных данных соответственно и будем считать, что выполняются оценки

$$|f^\delta(t, x, u) - f^0(t, x, u)| \le L_M\delta\ \forall(t, x, u) \in [0, T] \times S_M^n \times S_M^m,$$

$$|F_i^\delta(t,x,u)-F_i^0(t,x,u)|,\ |\nabla_x F_i^\delta(t,x,u)-\nabla_x F_i^0(t,x,u)|\le L_M\delta$$
$$\forall (t,x,u)\in[0,T]\times S_M^n\times S_M^m,\ \ i=0,1,2,$$
$$|\phi_i^\delta(x)-\phi_i^0(x)|,\ |\nabla\phi_i^\delta(x)-\nabla\phi_i^0(x)|\le L_M\delta\ \forall x\in S_M^n,\ \ i=0,1,2,\ \ \chi(U^\delta,U^0)\le N\delta,$$
где $S_M^n\equiv\{x\in R^n:\,|x|\le M\}$, L_M, $N>0$ – постоянные, $\chi(A,B)$ – расстояние в смысле Хаусдорфа между множествами A, B.

Согласно [B2], минимизирующей в задаче $(P_{p,q})$ называем последовательность $u^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\ldots$, такую, что

$$J_0(u^i)\le\beta(p,q)+\rho^i,\ u^i\in\mathcal{D}_{p,q}^{\alpha^i},\ \rho^i,\alpha^i>0,\ \rho^i,\ \alpha^i\to 0,\ i\to\infty,$$

где

$$\mathcal{D}_{p,q}^\alpha\equiv\{u\in\mathcal{D}:J_{1,j}(u)\le p_j+\alpha,\ j=1,\ldots,k,\ |J_{2,j}(u)-q_j|\le\alpha,\ j=1,\ldots,l\},$$
$$\beta(p,q)\equiv\lim_{\alpha\to+0}\beta_\alpha(p,q)\le\beta_0(p,q),\ \beta_\alpha(p,q)\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}_{p,q}^\alpha}J_0(u),$$
$$\beta_\alpha(p,q)\equiv+\infty,\quad\text{если } \mathcal{D}_{p,q}^\alpha=\emptyset.$$

П.2.1 посвящен необходимым и достаточным условиям для минимизирующих последовательностей, регуляризирующим свойствам принципа максимума Понтрягина в общей параметрической постановке задачи $(P_{p,q})$ при условии существования и равномерной ограниченности траекторий, отвечающих всем управлениям $u\in\mathcal{D}$.

Для формулировки основных его результатов введем предварительно стандартные обозначения:

$$H(x,t,u,\eta,\mu_0,\lambda_1,\lambda_2)\equiv\langle\eta,f(t,x,u)\rangle-\mu_0F_0(t,x,u)-$$
$$-\langle\lambda_1,F_1(t,x,u)\rangle-\langle\lambda_2,F_2(t,x,u)\rangle,$$
$$L(x,\mu_0,\lambda_1,\lambda_2)\equiv\mu_0\phi_0(x)+\langle\lambda_1,\phi_1(x)\rangle+\langle\lambda_2,\phi_2(x)\rangle.$$

Сопряженная система для задачи $(P_{p,q})$ запишется в виде $(x_1=x(T))$

$$\dot\eta=-\nabla_xH(x,t,u,\eta,\mu_0,\lambda_1,\lambda_2),\ \eta(T)=-\nabla_{x_1}L(x[u](T),\mu_0,\lambda_1,\lambda_2),\ t\in[0,T].$$

Ее решение обозначим через $\eta[u,\mu_0,\lambda_1,\lambda_2]\equiv\eta[u](t)$.

Решения $x[u]$, $\eta[u]$, функционал J_0, векторные функционалы J_1,J_2, множества $\mathcal{D}_{p,q}$, $\mathcal{D}_{p,q}^\alpha$, функцию значений $\beta(p,q)$, задачу $(P_{p,q})$, функции H, L, соответствующие набору f^δ, $\delta\in[0,\delta_0]$, будем обозначать соответственно через $x^\delta[u]$, $\eta^\delta[u]$, J_0^δ, J_1^δ, J_2^δ, $\mathcal{D}_{p,q}^\delta$, $\mathcal{D}_{p,q}^{\delta,\alpha}$, $\beta^\delta(p,q)$, $(P_{p,q}^\delta)$, H^δ, L^δ.

Пусть δ^i, $i=1,2,\ldots$, есть сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, характеризующих ошибку задания исходных данных набора f^0

в невозмущенной задаче $(P^0_{p,q})$. Нас интересуют условия, которым с необходимостью должны удовлетворять элементы последовательности управлений $u^i \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q}$ такой, что

$$J_0^{\delta^i}(u^i) - \beta^0(p,q) = h^i \to 0, \quad i \to \infty, \tag{3}$$

где α^i, $i = 1, 2, \dots$, – некоторая сходящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел. Такие условия и будем называть необходимыми условиями для минимизирующих последовательностей в задаче $(P^0_{p,q})$ с приближенно известными исходными данными.

Теорема 2.1.1 (Принцип максимума для минимизирующих последовательностей). [5], [13], [14]. *Пусть $\beta^0(p,q) < +\infty$, $\delta^i \geq 0$, $\delta^i \to 0$, $i \to \infty$, и последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q}$, $i = 1, 2, \dots$, $\alpha^i \geq 0$, $\alpha^i \to 0$, $i \to \infty$, удовлетворяет предельному соотношению* (3). *Тогда существует ограниченная и имеющая лишь ненулевые предельные точки последовательность множителей Лагранжа $(\mu_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i)$, $\mu_0^i \geq 0$, $\lambda_1^i \geq 0$, $\mu_0^i \in R^1$, $\lambda_1^i \in R^k$, $\lambda_2^i \in R^l$,*

$$(\mu_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i) \neq 0, \quad \lambda_{1,j}^i I_{1,j}^{\delta^i}(u^i) \geq -\zeta^i,\ j = 1, \dots, k, \tag{4}$$

такая, что

$$\int_0^T \max_{v \in U^{\delta^i}} H^{\delta^i}(x^{\delta^i}[u^i](t), t, v, \eta^{\delta^i}[u^i](t), \mu_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i) - \tag{5}$$

$$-H^{\delta^i}(x^{\delta^i}[u^i](t), t, u^i(t), \eta^{\delta^i}[u^i](t), \mu_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i) dt \leq \gamma^i,$$

где ζ^i, γ^i, $i = 1, 2, \dots$, – некоторые сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел.

Замечание 2.1.1. [13], [14]. *В условиях теоремы 2.1.1 последовательности δ^i, α^i, $i = 1, 2, \dots$, могут стремиться к нулю произвольным образом, а существование минимизирующей последовательности u^i, $i = 1, 2, \dots$, для которой справедливо предельное соотношение* (3) *постулируется. В общей ситуации при рассогласованном стремлении к нулю последовательностей δ^i, α^i, $i = 1, 2, \dots$, такой последовательности u^i, $i = 1, 2, \dots$, может и не существовать.*

Следствием теоремы 2.1.1 являются естественные понятия стационарной и нормальной стационарной последовательностей в задаче $(P_{p,q})$ в случае приближенно известных исходных данных.

Определение 2.1.1. [5], [13]. *Последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q}$, $i = 1, 2, \dots$, $\alpha^i \to 0$, $i \to \infty$, назовем стационарной в задаче $(P^0_{p,q})$ с приближенно известными исходными данными, если существует ограниченная и имеющая лишь ненулевые предельные точки последовательность множителей Лагранжа $(\mu_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i) \in R^1 \times R^k \times R^l$, $\mu_0^i \geq 0$, $\lambda_1^i \geq 0$, такая, что выполняются соотношения* (4) *и* (5) *с ζ^i, $\gamma^i \to 0$, $i \to \infty$.*

Определение 2.1.3. [5], [13] *Стационарная последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, в задаче $(P^0_{p,q})$ называется нормальной, если все соответствующие ей последовательности (см. определение 2.1.1) $(\mu^i_0, \lambda^i_1, \lambda^i_2)$, $i = 1, 2, \ldots$, имеют предельные точки $(\mu_0, \lambda_1, \lambda_2)$ с компонентой $\mu_0 > 0$. Задача $(P^0_{p,q})$ называется нормальной, если все ее стационарные последовательности нормальны.*

Далее в п.2.1 получены достаточные условия в задаче $(P^0_{p,q})$ с приближенно известными исходными данными. Приведем ради более компактного изложения наиболее общую формулировку этих условий. С этой целью введем следующие E-функции по формулам $E_{F_j}(t, y, x, v, u) \equiv F_j(t, y, v) - F_j(t, x, v) - \nabla_x F_j(t, x, u)(y - x)$, $E_{\phi_j}(y, x) \equiv \phi_j(y) - \phi_j(x) - \nabla_x \phi_j(x)(y - x)$, $j = 0, 1, 2$, $E_f(t, y, x, v, u) \equiv f(t, y, v) - f(t, x, v) - \nabla_x f(t, x, u)(y - x)$.

Теорема 2.1.2. [5], [13], [17]. *Для того, чтобы последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q}$, $\delta^i \ge 0$, $\alpha^i > 0$, δ^i, $\alpha^i \to 0$, $i \to \infty$, удовлетворяла предельному соотношению* (3), *достаточно существования ограниченной последовательности наборов множителей Лагранжа*

$$(\mu^i_0, \lambda^i_1, \lambda^i_2) \in R^1 \times R^k \times R^l,\ \mu^i_0 > 0,\ \lambda^i_1 \ge 0,\ \lambda^i_{1,j} I^{\delta^i}_{1,j}(u^i) \ge -\zeta^i,\ j = 1, \ldots, k, \quad (6)$$

такой, что

$$\{\int_0^T (H^{\delta^i}(u^i(t), u^i(t), \mu^i_0, \lambda^i_1, \lambda^i_2) - H^{\delta^i}(u^i(t), u(t), \mu^i_0, \lambda^i_1, \lambda^i_2))dt\} + \quad (7)$$

$$\{\int_0^T (\langle \eta^{\delta^i}[u^i](t), E_{f^{\delta^i}}(u(t), u^i(t))\rangle + \mu^i_0 E_{F_0^{\delta^i}}(x^{\delta^i}[u](t), x^{\delta^i}[u^i](t), u(t), u^i(t)) +$$
$$\langle \lambda^i_1, E_{F_1^{\delta^i}}(u(t), u^i(t))\rangle + \langle \lambda^i_2, E_{F_2^{\delta^i}}(u(t), u^i(t))\rangle)dt +$$
$$\mu^i_0 E_{\phi_0^{\delta^i}}(u, u^i) + \langle \lambda^i_1, E_{\phi_1^{\delta^i}}(u, u^i)\rangle + \langle \lambda^i_2, E_{\phi_2^{\delta^i}}(u, u^i)\rangle\} \ge -\epsilon^i \ \ \forall u \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q},$$

где ζ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$, – сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел, и выполняются условия согласования

$$\delta^i/\alpha^i \to 0, \ \ (\alpha^i + \zeta^i + \epsilon^i)/\mu^i_0 \to 0, \ \ i \to \infty, \quad (8)$$

а также приняты для более краткой записи обозначения:

$$H^\delta(u(t), v(t), \mu_0, \lambda_1, \lambda_2) \equiv H^\delta(x^\delta[u](t), t, v(t), \eta^\delta[u](t), \mu_0, \lambda_1, \lambda_2), \ \ E_{f^\delta}(u(t), v(t)) \equiv$$
$$E_{f^\delta}(x^\delta[u](t), x^\delta[v](t), u(t), v(t)),\ E_{F_j^\delta}(u(t), v(t)) \equiv E_{F_j^\delta}(x^\delta[u](t), x^\delta[v](t), u(t), v(t)),$$
$$E_{\phi_j^\delta}(u, v) \equiv E_{\phi_j^\delta}(x^\delta[u](T), x^\delta[v](T)),\ j = 0, 1, 2.$$

В **п.2.1** подробно обсуждаются конкретные удобные для проверки условия на исходные данные задачи $(P^0_{p,q})$, при которых выполняется неравенство (7). Естественно, эти условия теснейшим образом связаны с принципом максимума теоремы 2.1.1, а также со свойствами "линейной выпуклости" этой задачи.

Далее в п.2.1 обсуждаются регулялизирующие свойства неклассических минимизирующих последовательностей и принципа максимума Понтрягина. В частности, подробно обсуждается естественность в случае приближенно известных исходных данных выделения характерных для задач оптимального управления трех соответствующих уровней регуляризации. Первый из них связан с понятием так называемого регуляризованного принципа максимума для минимизирующих последовательностей, второй – с построением минимизирующих последовательностей в линейно-выпуклых по фазовой переменной задачах и третий, характерный для классической теории регуляризации, – с построением сходящихся по аргументу минимизирующих последовательностей.

Переходя на более конкретный язык, рассмотрим регуляризованную с параметром регуляризации α задачу вида

$$(P^{\delta,\alpha}_{p,q}) \qquad J^\delta_0(u) \to \inf, \;\; J^\delta_{1,j}(u) \le p_j + \alpha, \; j = 1, \dots, k,$$
$$|J^\delta_{2,j}(u) - q_j| \le \alpha, \; j = 1, \dots, l, \; u \in \mathcal{D}^\delta,$$

где выполняется условие согласования $\delta/\alpha \to 0$. При этом оказывается , что допустимое множество $\mathcal{D}^{\delta,\alpha}_{p,q} \equiv \{u \in \mathcal{D}^\delta : \; J^\delta_{1,j}(u) \le p_j + \alpha, \; j = 1, \dots, k, \;\; |J^\delta_{2,j}(u) - q_j| \le \alpha, \; j = 1, \dots, l\}$ задачи $(P^{\delta,\alpha}_{p,q})$ не пусто при условии непустоты множества $\mathcal{D}^{0,0}_{p,q}$. К задаче $(P^{\delta,\alpha}_{p,q})$ может быть применена техника, благодаря которой получена выше теорема 2.1.1. Если при этом выполняется и условие согласования $\delta/\alpha \to 0$ параметра регуляризации α с величиной δ, характеризующей ошибку задания исходных данных, то оказывается справедливой следующая важная теорема, характеризующая первый уровень регуляризации для задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными.

Теорема 2.1.3 (Регуляризованный принцип максимума для минимизирующих последовательностей). [5], [13], [14]. *Пусть $\beta^0(p,q) < +\infty$, δ^i, α^i, $i = 1, 2, \dots$, такие сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел, что выполняется условие согласования $\delta^i/\alpha^i \to 0$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда существует такая последовательность $u^i \in \mathcal{D}^{\delta^i,\alpha^i}_{p,q}$, $i = 1, 2, \dots$, для которой выполняется предельное соотношение* (3). *Для каждой такой последовательности существует ограниченная и имеющая лишь ненулевые предельные точки последовательность множителей Лагранжа $(\mu^i_0, \lambda^i_1, \lambda^i_2)$, $\mu^i_0 \ge 0$, $\lambda^i_1 \ge 0$, $\mu^i_0 \in R^1$, $\lambda^i_1 \in R^k$, $\lambda^i_2 \in R^l$, такая, что выполняются соотношения* (4), (5), *в которых ζ^i, γ^i, $i = 1, 2, \dots$, – некоторые сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел.*

Замечание 2.1.3. [5], [13]. *Принципиальное отличие теоремы 2.1.1 от ее нерегуляризованного аналога теоремы 2.1.3 состоит в том, что в теореме 2.1.3 последовательности δ^i, α^i, $i = 1, 2, \dots$, стремятся к нулю уже согласованным образом* (*см. замечание 2.1.1*). *При этом существование минимизирующей по-*

следовательности u^i, $i = 1, 2, \ldots$, для которой выполняется предельное соотношение (3) *гарантируется. Таким образом, можно утверждать, что для теории необходимых и достаточных условий в задачах оптимального управления с приближенно известными исходными данными являются естественными условия согласования ошибки задания исходных данных с некоторыми характеризующими "аппроксимирующие задачи" параметрами* (*см. условия* (8)).

Второй и третий уровни регуляризации связаны уже с построением непосредственно минимизирующих последовательностей или, другими словами, с решением задач типов I (сходимость по функции) и II (сходимость по аргументу) по терминологии [B1, с.11].

Далее в п.2.1 обсуждается существенность роли параметров (p, q) в задаче $(P_{p,q})$ с точки зрения изучения свойств регулярности, нормальности задачи, устойчивости оптимального значения по возмущению параметра. Из доказанных в работе выделим здесь, например, следующие результаты.

Лемма 2.1.11. [5], [13]. *Пусть $\beta(p, q) < +\infty$. Тогда, если задача $(P_{p,q})$ нормальна, то функция β является липшицевой в некоторой окрестности точки (p, q).*

Теорема 2.1.7. [5], [13]. *Пусть отсутствуют ограничения типа равенства, то есть $(P_{p,q}) = (P_p)$, и исходные данные имеют вид $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, $F_{1,j}(t, x, u) = F_{1,j,1}(t, x) + F_{1,j,2}(t, u)$, $j = 1, \ldots, k$, причем $F_{1,j,1}(t, \cdot)$, $\phi_{1,j}(\cdot)$ – выпуклые функции. Если существует такой элемент $u^0 \in D$, для которого $J_{1,j}(u^0) < p_j$, $j = 1, \ldots, k$, то задача $(P_{p,q})$ нормальна.*

Теорема 2.1.8. [5], [13]. *Пусть исходные данные имеют вид $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, $F_{1,j}(t, x, u) = \langle F_{1,j,1}(t), x\rangle + \langle F_{1,j,2}(t), u\rangle$, $j = 1, \ldots, k$, и существует последовательность $u^i \in D^{\alpha^i}_{p,q}$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha^i \to 0$, $i \to \infty$, не являющаяся стационарной. Тогда задача $(P_{p,q})$ нормальна.*

Наконец, заключительная часть главы II (п.2.2) посвящена подробному анализу на основе полученных выше в этой главе результатов целого ряда иллюстративных примеров (в частности примеров из введения).

Третья глава диссертации полностью посвящена параметрической задаче оптимального управления для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью с ограничениями типа включения в выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства. Глава состоит из двух разделов. По структуре результатов она во многом повторяет главу II. В **п.3.1** рассматривается параметрическая задача вида (1) с параметром $q \in \mathcal{H} \equiv L_2(\Omega)$

$$(P_q) \qquad I_0(\pi) \equiv \int_\Omega G(x, z[\pi](x, T), v(x))\, dx \to \inf,$$

$$I_1(\pi) \equiv A(\cdot) + B(\cdot)z[\pi](\cdot, T) \in \mathcal{M} + q, \quad \pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D},$$

где $\mathcal{M} \subset L_2(\Omega)$ – выпуклое замкнутое множество, $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – соответствующее паре $\pi \equiv (u, v)$ слабое решение в смысле[14] третьей краевой для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x,t) z_{x_j} + a(x,t,u(x,t))z + f(x,t,u(x,t)) = 0,$$

$$z(x,0) = v(x), \ x \in \Omega, \ \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \ (x,t) \in S_T,$$

и приняты стандартные обозначения: $U \subset R^m$, $V \subset R^1$ – компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S, \ t \in (0,T)\}$, Ω – ограниченная область в R^n, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D} \equiv \{(u,v) \equiv \pi : \pi \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U \ \text{ п.в. на } Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V \ \text{ п.в. на } \Omega\}$.

Исходные данные задачи (P_q) удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям и считаем их заданными приближенно в том же смысле, что и в случае задачи $(P_{p,q})$ главы II. Оценки отклонения возмущенных от невозмущенных исходных данных в задаче (P_q) также аналогичны оценкам, которые выписаны в случае задачи управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Прежде всего, в **п.3.1** собраны необходимые для получения основных результатов вспомогательные результаты. Далее здесь приводится подробный подсчет первых вариаций функционалов задачи с целью дальнейшего использования при проверке на определенном этапе выполнимости всех абстрактных аксиом главы 1.

Доказательство необходимых условий для задачи (P_q) проводится в двух, принципиально различных случаях. Первый принцип максимума для минимизирующих последовательностей (теорема 3.1.1) доказывается при одном важном дополнительном условии на целевое множество $\mathcal{M}$, а именно при предположении его конечной коразмерности, которое в условиях постановки задачи (P_q) равносильно, по сути дела, существованию внутренней точки множества $\mathcal{M}$. При этом выполнение в случае бесконечномерного целевого пространства $\mathcal{H}$ при любом значении параметра q, при котором задача имеет смысл, принципа максимума для минимизирующей последовательности (в частности, традиционного принципа максимума для оптимальной пары в конкретных задачах), аналогичного тому, который имеет место в случае конечномерного $\mathcal{H}$ для произвольной минимизирующей последовательности, гарантируется.

Отказавшись от весьма сильного в случае бесконечномерного пространства $\mathcal{H}$ условия конечной коразмерности множества $\mathcal{M}$, например, если положим $\mathcal{M} = \{0\}$, можно, тем не менее, утверждать, что произвольная минимизирующая последовательность в исходной задаче (P_q) удовлетворяет соотношениям, аналогичным

[14] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

доказанным соотношениям первого абстрактного принципа максимума (в случае, когда $\mathcal{M}$ содержит внутреннюю точку), если функция значений задачи обладает некоторыми дополнительными дифференциальными свойствами. Естественно, этот результат, вообще говоря, уже не будет верен для любой точки q. В то же время он сохранит свою силу (теорема 3.1.2) для всех точек q из некоторого плотного множества, содержащегося во множестве всех тех q, для которых задача (P_q) имеет смысл (ее нижняя грань конечна). Помимо необходимых условий, значительное место в п.3.1 отводится формулировке и доказательству достаточных условий (теоремы 3.1.3, 3.1.4). Далее значительное внимание уделено результатам, связанным с регуляризирующими свойствами минимизирующих последовательностей и принципа максимума Понтрягина (теорема 3.1.5). Подчеркнем, что в случае, когда целевое множество $\mathcal{M}$ не является множеством конечной коразмерности, полученный здесь принцип максимума для минимизирующих последовательностей (теорема 3.1.2) имеет одно существенное отличие от своего аналога (теорема 3.1.1) в случае, когда $\mathcal{M}$ есть множество конечной коразмерности (в частности, в случае конечномерных ограничений). Это отличие заключается в том, что принцип максимума теоремы 3.1.2 может вырождаться "в пределе" в силу зануления всех слабых предельных точек соответствующих последовательностей множителей Лагранжа. Таким образом, указанное выше отличие можно трактовать как дополнительный регуляризирующий эффект, свойственный принципу максимума для минимизирующих последовательностей. Иллюстрирующие это обстоятельство примеры конкретных задач (P_q) с целевыми множествами, не являющимися множествами конечной коразмерности, рассмотрены в п.3.2. В то же время, в этом случае, несмотря на вырожденность "в пределе", необходимые условия для минимизирующих последовательностей теоремы 3.1.2 могут быть выписаны в любой задаче (P_q) указанного вида с целью идентификации в ней минимизирующей последовательности. Наконец, в завершение п.3.1 приводятся результаты, связанные с наличием параметра q, исследованию свойств принципа максимума в задаче (P_q) в зависимости от дифференциальных свойств ее функции значений. В заключение третьей главы в **п.3.2** подробно рассматриваются иллюстративные примеры. В частности, здесь обсуждается возможность применения принципа максимума для минимизирующих последовательностей при решении некорректной обратной задачи финального наблюдения примера 3 из введения.

Публикации по теме диссертации

[1] **Трушина Е.В.** Параметрическая задача оптимального управления с негладкой динамикой. В кн. "IX Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки). Тезисы докладов. (23-27 мая, 2004г.)", 2004 – Н.Новгород: Изд. Гладкова О.В., С.35-36.

[2] **Трушина Е.В.** Задача оптимального управления с приближенно известными исходными данными. В кн. ”X Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки). Тезисы докладов. (15-19 мая, 2005г.)”, 2005 – Н.Новгород: Изд. Гладкова О.В., С.26-27.

[3] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Оптимизация систем с приближенно известными исходными данными. В кн. ”Воронежская весенняя математическая школа. Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XVI. Тезисы докладов школы”, 2005, Воронеж: Изд-во ВГУ. С.151.

[4] **Трушина Е.В.** Оптимальное управление системами обыкновенных дифференциальных уравнений с приближенно известными исходными данными. В кн. ”VII Всероссийская конференция. Нелинейные колебания механических систем. Тезисы докладов. (19-22 мая, 2005 г.)”, 2005 – Н.Новгород: Изд-во ННГУ., С.207-209.

[5] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Параметрическая задача оптимизации систем с приближенно известными исходными данными // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия ”Математика”, 2006. Вып.1(4), С.114-128.

[6] **Трушина Е.В.** Оптимизация систем с приближенно известными исходными данными. В кн. ”Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Том 31. Лобачевские чтения - 2005. Материалы IV молодежной научной школы-конференции. (16-18 декабря, 2005 г.)”, 2005 – Казань: Изд-во Казанского матем. общества, С.156-157.

[7] **Трушина Е.В.** Параметрическая задача оптимизации систем с приближенно известными исходными данными. В кн. ”XI Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки). Тезисы докладов. (22-25 мая, 2006г.)”, 2006 – Н.Новгород: Изд. Гладкова О.В., С.17-18.

[8] **Трушина Е.В.** Регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина для систем с приближенно известными исходными данными. В кн. ”Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Том 34. Лобачевские чтения - 2006. Материалы V молодежной научной школы-конференции. (28 ноября - 2 декабря, 2006 г.)”, 2006 – Казань: Изд-во Казанского математического общества, С.204-206.

[9] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Параметрическая задача оптимального управления системами с приближенно известными исходными данными. В кн. ”Воронежская весенняя математическая школа. Современные методы в теории

краевых задач. Понтрягинские чтения - XVII. Тезисы докладов школы", 2006, Воронеж: Изд-во ВГУ. С.176-177.

[10] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными. В кн. "Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа. Тезисы докладов школы", 2007, Воронеж: Изд-во ВГУ. С.214-215.

[11] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными. В кн. "Воронежская весенняя математическая школа. Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XVIII. Тезисы докладов школы", 2007, Воронеж: Изд-во ВГУ. С.159-160.

[12] **Трушина Е.В.** Минимизирующие последовательности в задачах оптимального управления с приближенно известными исходными данными. В кн. "XII Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки). Тезисы докладов. (23-26 мая, 2007г.)", 2007 – Н.Новгород: Изд. Гладкова О.В., С.17-18.

[13] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными и регуляризирующие свойства принципа максимума // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т.48. №2. С. 220-236.

[14] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** О регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина // Изв. вузов. Математика. 2008. №1. С. 63-77.

[15] **Сумин М.И., Трушина Е.В.** К вопросу о регуляризирующих свойствах принципа максимума. Труды итоговой конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства". Н.Новгород. Изд-во ННГУ, 2007. С.363-365.

[16] **Трушина Е.В.** Оптимальное управление распределенными системами с приближенно известными исходными данными. В кн. "Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Том 36. Лобачевские чтения - 2007. Материалы VI молодежной научной школы-конференции. (16-19 декабря, 2007 г.)", 2007 – Казань: Изд-во Казанского математического общества, С.224-226.

[17] **Трушина Е.В.** О регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина для распределенных систем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2008. №1. С.81-87.