На правах рукописи

ДМИТРИЧЕВ Алексей Сергеевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ СО СЛОЖНО-ПОРОГОВЫМИ СВОЙСТВАМИ

01.04.03 - Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук
Институте прикладной физики РАН
(г. Нижний Новгород)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Некоркин Владимир Исаакович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Полежаев Андрей Александрович

доктор физико-математических наук, профессор Осипов Григорий Владимирович

Ведущая организация: Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Защита состоится «_07_» _____апреля_____ 2010 г. в _15_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском государственном университете имени Н.И. Лобачевского (603950, Нижний Новгород, ГСП-20, Проспект Гагарина, 23, корп. 1, ауд. 420).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «_04_» марта 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент В.В. Черепенников

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к исследованию процессов в неравновесных пространственно-распределенных системах, наблюдающийся уже в течение достаточно длительного времени, не только не ослабевает, но и в последние годы усиливается, что свидетельствует о фундаментальном характере и актуальности этой проблемы. Одним из наиболее ярких и удивительных явлений, наблюдаемых в широком классе неравновесных систем, является формирование разнообразных пространственно-временных структур и, в частности, нелинейных волн и локализованных структур. Различные типы таких состояний экспериментально обнаружены, например, в гидродинамических системах, в газоразрядных, полупроводниковых и оптических системах, в гранулированных материалах, в астрофизических и квантовых системах, в некоторых химических системах, в нейронных системах, в сердечной ткани, в колониях микроорганизмов и др. Выявление закономерностей формирования и эволюции локализованных структур и нелинейных волн составляет одну из фундаментальных проблем радиофизики.

Важный класс неравновесных систем, обладающих разнообразием формируемых пространственно-локализованных и волновых структур, образуют так называемые реакционно-диффузионные системы. Общепринятое название систем “реакция-диффузия” пришло из химии и является отражением двух основных процессов, происходящих в таких системах, фактически определяющих их пространственно-временное поведение, – взаимодействия между локальными компонентами систем (реакций) и пространственной диффузии компонент. Реакционно-диффузионные системы описывают процессы различной природы в физике, химии, биологии и др. В частности, такие системы естественным образом возникают при исследовании процессов в сетях нейронов (нервных клеток), связанных посредством так называемых электрических синапсов.

Началом исследований систем “реакция-диффузия” принято считать пионерские работы Колмогорова – Петровского – Пискунова[1], Фишера[2] и Зельдовича – Франк-Каменецкого[3], выполненные в $30^{х}$ годах прошлого века. В этих работах на примере однокомпонентных одномерных систем “реакция-диффузия” была показана возможность формирования самоподдерживающихся бегущих волн переключения между различными пространственно-однородными состояниями (волновых фронтов), не меняющих ни своей скорости, ни своего профиля. Пространственно-локализованные структуры в системах “реакция-диффузия” были обнаружены значительно позже в серии

[1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // *Бюлл. МГУ, секция А*. – 1937. – Т. 1. – N. 6. – С. 1-25.
[2] Fisher R.A. // *Ann. Eugenics*. – 1937. – Vol. 7. – P. 355-369.
[3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // *Ж. Физ. Хим.* – 1938. – Т. 19. – N. 9. – С. 693-697.

знаменитых работ Ходжкина и Хаксли[1], посвященных исследованию механизмов распространения нервных импульсов вдоль гигантского аксона кальмара. Модель, предложенная этими авторами, имеет вид четырехкомпонентной одномерной системы “реакция-диффузия”, одним из решений которой является структура в виде локализованной (уединенной) стационарной волны – бегущего импульса. Это была первая модель реакционно-диффузионного типа примененная для описания процессов в нейронных системах. Дальнейшее развитие теория реакционно-диффузионных систем получила в работах Алана Тьюринга[2], Белоусова – Жаботинского[3,4], ФитцХью – Нагумо[5,6] и др. В этих работах была показана возможность формирования стационарных пространственно-неоднородных структур, появляющихся в результате усиления неустойчивостей, вызванных действием диффузии (структуры Тьюринга), спиральных волн и концентрических колебательных структур, возникновения пространственно-однородных колебаний, а также формирования и распространения импульсов возбуждения в сравнительно простых (двухкомпонентных) моделях.

К настоящему времени опубликовано значительное число работ по исследованию процессов структурообразования в различных реакционно-диффузионных системах, изучены основные механизмы формирования структур активности в таких системах. Однако, несмотря на достигнутый прогресс, здесь еще остается целый ряд нерешенных проблем.

Одной из таких проблем является выявление механизмов формирования сложных пространственно-временных, в том числе фрактальных, структур активности. Другая важная проблема – исследование механизмов формирования движущихся (волновых) неодномерных локализованных структур в многомерных (две и более пространственных координаты) реакционно-диффузионных системах. Известно, что в одномерных двухкомпонентных моделях этого класса существует большое разнообразие волновых устойчивых локализованных структур – одиночных импульсов (или автосолитонов), связанных состояний из некоторого числа импульсов и др. В двумерных двухкомпонентных моделях обнаружены устойчивые неподвижные локализованные структуры в виде пятен (так называемые spots), а устойчивые неодномерные волновые локализованные структуры до сих пор не наблюдались. В таких системах были найдены лишь “долгоживущие” движущиеся локализованные возбуждения, время жизни которых резонансным образом зависит от

[1] Hodgkin A., Huxley A. // *J. Physiol.* – 1952. – Vol. 117. – P. 500-544.
[2] Turing A.M. Phil. // *Trans. Roy. Soc. Lond. B*. – 1952. – Vol. 237. – P. 37-72.
[3] Белоусов Б.П. *В сб. рефер. по рад. медицине за 1958 год*. – М.: Медгиз, 1959. – С. 145-147.
[4] Жаботинский А.М. *Концентрационные автоколебания*. – М.: Наука, 1974. – 178 с.
[5] FitzHugh R. // *Biophysical Journal*. – 1961. – Vol. 1. – P. 445-466.
[6] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. // *Proc. IRE*. – 1962. – Vol. 50. – P. 2061-2073.

параметров системы[1]. В работах Шоуолтера[1,2] было показано, что придать устойчивость подвижным локализованным структурам в двумерных двухкомпонентных системах “реакция-диффузия” можно путем введения в систему отрицательной обратной связи, поддерживающей некоторый постоянный уровень общей концентрации либо одной, либо нескольких компонент. Было обнаружено также, что аналогичную стабилизирующую роль играет и увеличение числа компонент системы, действие которых, фактически, носит характер отрицательных обратных связей. Например, в работах[3,4,5] был рассмотрен целый ряд трехкомпонентных двумерных систем “реакция-диффузия”, поддерживающих распространение устойчивых неодномерных локализованных структур. Следует отметить, что найденные в этих работах структуры являются стационарными, т.е. они не меняют ни профиля ни скорости при распространении. С другой стороны, сравнительно недавно[6] в одномерных реакционно-диффузионных системах были обнаружены более сложные (нестационарные) волновые локализованные структуры. Примером здесь может служить структура в виде осциллирующего бегущего импульса. Однако, неодномерные нестационарные локализованные волновые структуры в многомерных реакционно-диффузионных системах не были обнаружены.

Целью диссертационной работы является исследование пространственно-временного поведения одномерных и двумерных двухкомпонентных систем “реакция-диффузия”, локальная динамика которых характеризуется наличием нетривиальных сложно-пороговых режимов, изучение процессов формирования устойчивых волновых и пространственно-локализованных структур, в том числе и нестационарных, исследование их свойств и бифуркаций при изменении параметров систем.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Показано, что модель ФитцХью-Нагумо с нелинейным поведением восстанавливающей переменной обладает нетривиальными сложно-пороговыми, в том числе мультипороговыми, свойствами.
2. Предложен подход к исследованию сложной пространственно-временной динамики одномерной двухкомпонентной системы “реакция-диффузия” со сложно-пороговыми свойствами, состоящий в изучении гетероклинических контуров в соответствующей системе для бегущих волн.
3. Предложен новый механизм “отражения” волновых фронтов и локализованных волн в одномерной системе “реакция-диффузия” при их взаимодействии друг с другом и границами системы, в основе которого лежит мультипороговость ее элементов.
4. Показано, что двумерная двухкомпонентная система “реакция-диффузия” со сложно-пороговыми свойствами поддерживает формирование устойчивых волновых стационарных локализованных структур (регулярных структур) и обладает по отношению к ним высокой мультистабильностью.
5. Показано, что в двумерной двухкомпонентной системе “реакция-диффузия” со сложно-пороговыми свойствами возможно формирование и распространение трех типов устойчивых нестационарных локализованных структур (полиморфных структур), характеристики которых изменяются во времени периодически, квазипериодически и хаотически.

Методы исследований и достоверность результатов.

Исследование динамики рассмотренных в диссертации систем проводилось с использованием методов современной нелинейной динамики (изучение структуры фазового пространства, построение пространственно-временных и бифуркационных диаграмм, исследование спектров Ляпуновских показателей и сечений Пуанкаре) и численного моделирования. Достоверность полученных результатов подтверждается согласованностью результатов аналитического исследования и численного моделирования, экспериментальными данными исследований реакционно-диффузионных систем, а также согласованностью с результатами других авторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Модель ФитцХью-Нагумо с нелинейным восстановлением обладает мультипороговыми свойствами.
2. В одномерной двухкомпонентной системе “реакция-диффузия” со сложно-пороговыми свойствами (далее для краткости РДСП система) возможно формирование различных стационарных бегущих волн – импульсов возбуждения и волновых фронтов, неподвижных осцилляторных и движущихся локализованных структур, представляющих собой связанные состояния волновых фронтов, а также сложных нестационарных колебательно-волновых структур.
3. Нетривиальное пространственно-временное поведение одномерной РДСП системы ассоциируется с наличием у соответствующей системы для бегущих волн гетероклинического контура, образованного многообразиями двух седло-фокусов, имеющих превалирующее неустойчивое направление, существующего в пространстве параметров системы на сложных бифуркационных множествах коразмерности два.
4. В одномерной РДСП системе стационарные бегущие волны при взаимодействиях друг с другом и границами системы могут как аннигилировать, так и демонстрировать солитоноподобное поведение, т.е. отражаться друг от друга, от границ системы и “переключаться” в новое состояние. На-

[1] Mihaliuk E., Sakurai T., Chirila F., Showalter K. // *Faraday Discuss*. – 2001. – Vol. 120. – P. 283.
[2] Steele Aaron J., Tinsley M., Showalter K. // *CHAOS*. 2008. – Vol. 18. – P. 026108.1-026108.8.
[3] Bode M., Liehr A.W., Schenk C.P., Purwins H.G. // *Physica D*. – 2002. – Vol. 161. – P. 45.
[4] Nishiura Y. // *CHAOS*. – 2005. – Vol. 15. – P. 047509.
[5] Заикин А.Н. // *Физическая мысль России*. – 1995. N. 1. – С. 54-63.
[6] Yang L., Zhabotinsky A.M., Epstein I.R. // *PCCP*. – 2006. – Vol. 8. – P. 4647-4651.

личие солитоноподобных свойств волн в данной системе определяется нетривиальными мультипороговыми свойствами ее локальной динамики.

5. В двумерной РДСП системе возможно формирование и распространение большого числа устойчивых стационарных (регулярных) и трех типов устойчивых нестационарных (полиморфных: периодических, квазипериодических и хаотических) неодномерных пространственно-локализованных структур активности.

Практическая и теоретическая значимость результатов.

Полученные результаты позволяют продвинуться в понимании процессов и механизмов формирования сложного пространственно-временного поведения реакционно-диффузионных систем, в том числе образования нетривиальных колебательно-волновых и неодномерных локализованных структур активности.

Развитые методики исследования представленных в работе нелинейных динамических систем могут быть использованы для изучения разнообразных радиофизических систем обладающих сложной пространственной и временной динамикой.

Результаты диссертации могут найти применение при разработке нетрадиционных систем обработки, хранения и передачи информации, основанных на нейродинамических принципах.

Результаты, изложенные в диссертационной работе, могут быть использованы в организациях, занимающихся нелинейной динамикой и моделированием различных неравновесных пространственно-распределенных, в частности нейронных, систем (Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН, Институт радиотехники и электроники РАН и др.), а также в учебном процессе ВУЗов (ННГУ, СГУ, МГУ и др.), при обучении студентов по специальностям радиофизического профиля.

Апробация результатов работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Научных конференциях ННГУ по радиофизике (2003, 2008, Нижний Новгород, Россия), Сессии молодых ученых (2005, Нижний Новгород), Международных школах "Хаотические автоколебания и образование структур" (2004, 2007, Саратов, Россия), Научных школах "Нелинейные волны" (2004, 2006, 2008, Нижний Новгород, Россия), Международной конференции "Dynamic Days" (2002, Heidelberg, Germany), Международном симпозиуме "Topical problem of Nonlinear Wave Physics" (2003, Нижний Новгород, Россия), Международных симпозиумах "Nonlinear Dynamics of electronic systems" (2006, Dijon, France; 2008, Nizhny-Novgorod, Russia) и XVII научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (2008, Москва, Россия).

По теме диссертации было опубликовано 17 научных работ, в том числе 4 статьи в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах, 1 глава в книге, 6 статей в сборниках трудов конференций и 6 в тезисах докладов.

Результаты работы получены в рамках грантов РФФИ (03-02-17135, 06-02-16137, 08-02-97035, 09-02-91061-НЦНИ), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-7309.2006.2), ФЦНТП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники" (госконтракт №40.020.1.1.1168), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (госконтракт №П942), программ президиума РАН ("Фундаментальные проблемы нелинейной динамики") и ОФН РАН ("Проблемы радиофизики") и др.

Личный вклад автора.

Основные результаты диссертационной работы получены лично автором. В совместных работах автором выполнены все компьютерные расчеты, включая программирование задач и проведение численных экспериментов. В частности, здесь следует отметить обнаружение и исследование мультипороговых свойств системы ФитцХью-Нагумо с нелинейным восстановлением, а также исследование процессов формирования, распространения и взаимодействия сложных волновых, в том числе неодномерных пространственно-локализованных, структур. Формулировка и постановка основных задач, определение методов и подходов к их решению, теоретический анализ и интерпретация полученных результатов были выполнены совместно с научным руководителем и другими соавторами работ.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 144 страницы текста, включая 52 рисунка и список литературы из 125 наименований на 13 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, изложены основные результаты и раскрыта их научная и практическая значимость, приведены, положения, выносимые на защиту и сведения об апробации результатов.

Первая глава посвящена исследованию динамики системы ФитцХью-Нагумо с нелинейным поведением восстанавливающей переменной. Эта система используется в качестве базовой модели локальной динамики одномерных и двумерных реакционно-диффузионных систем, изучаемых в последующих главах. Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - v + I_{вн}(t), \\ \dot{v} = \varepsilon(g(u) - v - I), \end{cases} \tag{1}$$

где $f(u)=u-u^3/3$, а $g(u)$ – кусочно-линейная функция вида $g(u)=\alpha u$, если $u\leq 0$, $g(u)=\beta u$, если $u>0$.

Система (1) представляет собой модификацию классической модели ФитцХью-Нагумо, в отличие от которой, во второе уравнение введена кусочно-линейная функция. Переменная u обычно трактуется как "концентрация" активатора, а v – ингибитора. В частности, в нейродинамике система (1) используется для описания электрической активности нейронов. Переменная u в этом случае описывает динамику мембранного потенциала, а v – совокупное действие всех трансмембранных ионных токов, отвечающих за восстановление потенциала покоя мембраны. Параметр I контролирует уровень деполяризации мембраны нейрона, ε ($\varepsilon>0$) определяет скорость изменения ионных токов, параметры α и β ($\alpha>0$, $\beta>0$) – описывают нелинейные свойства ионных токов, а $I_{вн}(t)$ представляет собой внешний ток стимуляции. Здесь и далее мы будем трактовать полученные результаты применительно к проблемам нейронной активности.

При $I_{вн}(t)\equiv 0$ методами нелинейной динамики и численного моделирования проведено исследование системы (1). Показано, что в определенной области параметров эта система имеет три состояния равновесия: O_1, O_2 и O_3. Одно из этих состояний равновесия, O_2, является седлом. Его входящие сепаратрисы определяют в системе одно из главных пороговых многообразий. Два других состояния равновесия, O_1 и O_3, являются либо фокусами либо узлами и в зависимости от параметров могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

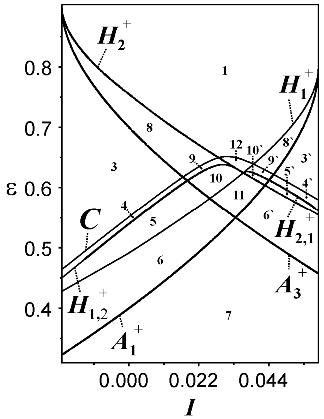


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма. Значения параметров: $\alpha=0.8$, $\beta=0.9$.

Построено разбиение плоскости параметров (ε, I) системы (1) на области, отвечающие ее различному динамическому поведению для трех соотношений параметров α и β: $\alpha=0.5$, $\beta=2.0$; $\alpha=0.8$, $\beta=0.9$ (рис. 1); $\alpha=0.8$, $\beta=1.1258$. Разбиение осуществляется кривыми, которые соответствуют:

- седло-узловым бифуркациям;
- субкритическим (кривые A_1^+ и A_3^+, рис. 1) и суперкритическим (для $\alpha=0.5$, $\beta=2.0$ и $\alpha=0.8$, $\beta=1.1258$) бифуркациям Андронова-Хопфа состояний равновесия O_1 и O_3;
- бифуркациям различных петель сепаратрис седла O_2, при разрушении которых происходит рождение либо неустойчивых (кривые H_1^+, H_2^+, $H_{1,2}^+$ и $H_{2,1}^+$, рис. 1), либо устойчивых (для $\alpha=0.5$, $\beta=2.0$ и $\alpha=0.8$, $\beta=1.1258$) предельных циклов;
- бифуркациям двукратных предельных циклов – "больших" (кривая C, рис. 1), охватывающих все три состояния равновесия, и "малых", локализованных в окрестности одного из состояний равновесия, O_1 или O_3 (для $\alpha=0.8$, $\beta=1.1258$).

Установлено, что система (1) обладает достаточно широким набором динамического поведения, включающим как сравнительно простые режимы (классический триггерный – покой-покой, колебательный и возбудимый), так и более сложные (сложно-пороговые) би- и мультистабильные режимы, одновременно совмещающие, например, возбудимые и колебательные свойства.

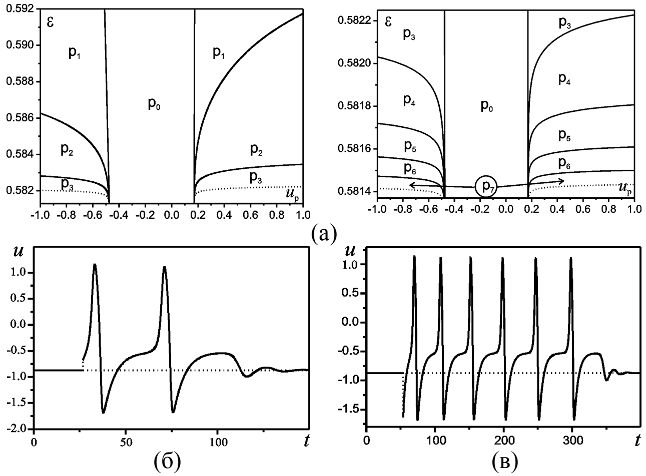


Рис. 2. Области p_i (*а*), отвечающие генерации различного числа импульсов отклика, и примеры отклика модели в виде двух (*б*) и шести импульсов (*в*) в ответ на возбуждающую и подавляющую стимуляцию. Значения параметров: $\alpha=0.8$, $\beta=0.9$, $I=0.01$.

При $I_{вн}(t)\neq 0$ система (1) описывает динамику нейрона, находящегося под действием внешнего стимула. Внешний стимул имеет вид короткого (по отношению к характерному временному масштабу системы) одиночного импульса. Действие такого импульса можно приближенно трактовать как мгновенное смещение изображающей точки на фазовой плоскости по переменной u на некоторое, зависящее от амплитуды стимула, расстояние от текущего равновесного состояния. Обнаружено, что отклик нейрона на действие внешнего стимула может быть достаточно разнообразным и зависит от его пороговых свойств и амплитуды стимула. Наиболее простой отклик происходит в случае, когда единственным аттрактором системы является одно из состояний равновесия, O_1 или O_3. В этом случае, в зависимости от амплитуды стимула (рис. 2, *а*), происходит генерация различного числа импульсов (рис. 2, *б*,*в*). Заметим, что генерация импульсов происходит под действием как возбуждающих (положительных), так и подавляющих (отрицательных) стимулов. Более сложные отклики наблюдаются при наличии в системе двух или трех аттракторов. Например, в случае, когда аттракторами являются состояние равновесия и предельный цикл, в зависимости от амплитуды стимула, происходит генерация серий импульсов, заканчивающаяся либо возвращением в состояние покоя (состояние равновесия), либо переходом в режим периодических колебаний. Было установлено, что мультипороговые свойства связаны с нетривиальной (колебательной) динамикой пороговых сепаратрис и возникают в окрестности кривых, отвечающих бифуркациям “большого” двукратного предельного цикла (охватывающего все три состояния равновесия) и “большой” петли сепаратрис седла, при разрушении которой происходит рождение устойчивого предельного цикла. При приближении к этим бифуркационным кривым входящие сепаратрисы седла начинают совершать вращение вокруг всех трех состояний равновесия. На фазовой плоскости (u,v) такое вращение приводит к образованию “слоений”, ограниченных витками сепаратрис, которые и определяют мультипороговость.

Во второй главе проведено исследование одномерной двухкомпонентной системы “реакция-диффузия” с локальной динамикой, определяемой системой (1). Пространственно-временное поведение такой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}_j = f(u_j) - v_j + d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ \dot{v}_j = \varepsilon(g(u_j) - v_j - I), \end{cases} \qquad (2)$$

$$j = 1,2,...,N, \quad u_0(t) \equiv u_1(t), \quad u_{N+1}(t) \equiv u_N(t),$$

где j играет роль дискретной пространственной координаты, а d – параметр, характеризующий величину диффузионной связи в системе.

Исследуется динамика нелинейных волновых структур, в частности, волновых фронтов и бегущих импульсов возбуждения. Рассматриваются достаточно гладкие структуры, характерные масштабы которых значительно превосходят собственные пространственные масштабы системы. В этом приближении динамика волновых структур описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = y, \\ \dot{y} = cy + F(u) - I + z, \\ c\dot{z} = -\varepsilon z - cg'(u)y, \end{cases} \qquad (3)$$

где $F(u)=-f(u)+g(u)$, а точкой обозначено дифференцирование по бегущей координате. Выделены параметры при которых система (3) имеет три состояния равновесия типа седло-фокус. Два из этих состояний равновесия O_1 и O_3, имеют неустойчивое одномерное и устойчивое двумерное многообразия, а состояние равновесия O_2, наоборот, имеет устойчивое одномерное и неустойчивое двумерное многообразия (рис. 3, *б*). Исследование системы (3) показало, что траектории инвариантных многообразий этих состояний равновесия могут образовывать разнообразные гомоклинические и гетероклинические

орбиты, когда параметры принадлежат соответствующим бифуркационным множествам. Наличие таких орбит отвечает существованию в исходной реакционно-диффузионной системе волновых структур в виде бегущих импульсов и фронтов. Профиль таких волн определяется свойствами соответствующих орбит. Бифуркационные множества, в свою очередь, определяют зависимость скорости волн от параметров системы.

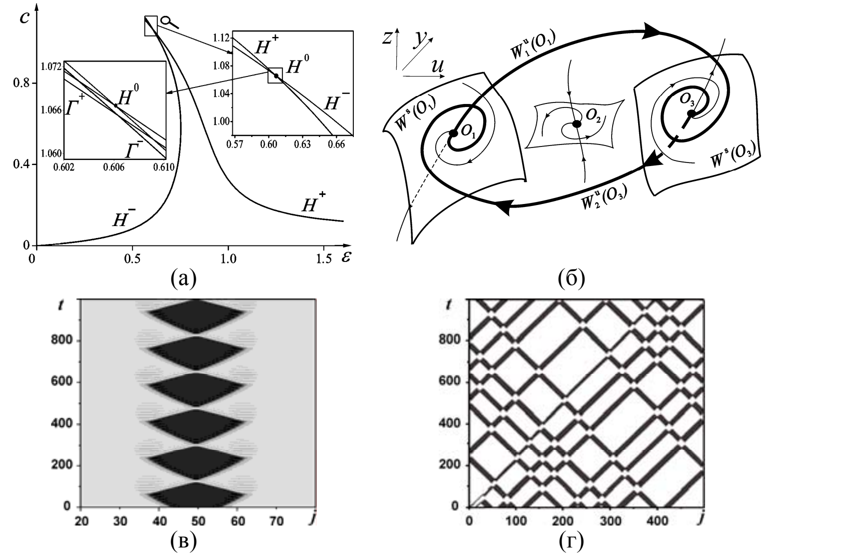


Рис. 3. (*а*) Бифуркационные множества H^+, H^- и Γ^+, Γ^-, отвечающие соответственно существованию гетероклинических и гомоклинических орбит в системе (3); (*б*) – гетероклинический контур, соответствующий бифуркационному множеству H^0 (ε^0=0.60593, c^0=1.0664); (*в*) – локализованная структура с нестационарными (осциллирующими) границами и (*г*) – сложная нестационарная колебательно-волновая “самовоспроизводящаяся паутинно-образная” структура. Структуры образуются в результате нетривиальной динамики волновых фронтов. Значения параметров: α=0.8, β=0.9; (*а*) I=0.024; (*в*) d=0.05, I=0.0314, ε=0.6; (*г*) d=1, I=0.024, ε=0.585.

С применением оригинального аналитико-численного метода, основанного на так называемых системах сравнения, доказано существование бифуркационных множеств H^+ и H^-, соответствующих двум видам гетероклинических орбит (см. рис. 3, *а*). Численно показано, что бифуркационные множества для гетероклинических траекторий имеют общую точку – H_0 (рис. 3, *а*). Точка H_0 отвечает бифуркации коразмерности 2 и существованию в фазовом пространстве системы (3) гетероклинического контура (рис. 3, *б*), образованного многообразиями седло-фокусов O_1 и O_3. Кроме того, в окрестности точки H_0 существуют бифуркационные множества, отвечающие существованию и гомоклинических орбит. Установлено, что на этих бифуркационных множествах седловая величина является положительной. В соответствии с теоремой

Шильникова данные гомоклинические орбиты ассоциируются с хаотической динамикой, так как в окрестности каждой из них (как в момент существования, так и при разрушении в обе стороны) существует нетривиальное гиперболическое множество, включающее бесконечное множество седловых периодических траекторий. Таким образом, для значений параметров, взятых в окрестности существования гетероклинического контура, система для бегущих волн демонстрирует чрезвычайно сложную динамику и можно ожидать, что и пространственно-временное поведение реакционно-диффузионной системы (2) в этом случае будет нетривиальным. Справедливость этого предположения была подтверждена численно. Установлено, что для параметров системы, выбранных в окрестности этого контура, волновые фронты показывают нетривиальные динамические свойства - отражаются друг от друга и от границ, подобно классическим солитонам, и могут формировать связанные состояния. В результате такого поведения в системе (2), в частности, могут образовываться различные пространственно-локализованные состояния (рис. 3, *в*) и сложные нестационарные колебательно-волновые структуры активности, обладающие свойством “самовоспроизводимости” (рис. 3, *г*). Исследование динамики импульсов возбуждения, показало, что при некоторых значениях параметров для них также характерно солитоноподобное поведение. Кроме того, наряду с отражением, при взаимодействии импульсов, могут генерироваться серии дополнительных импульсов, формирующие волновые составы. Показано, что такое поведение может приводить к формированию сложных волновых структур спайковой активности. Изучены динамические механизмы солитоноподобного поведения волн. Показано, что в его основе лежит наличие мультипороговых свойств у локальных элементов системы, связанных со сложным (колебательным) поведением пороговых сепаратрис и приводящих к нетривиальной динамике отклика на внешнюю стимуляцию.

В третьей главе приведены результаты исследования двумерной реакционно-диффузионной системы следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{u}_{j,k} = f(u_{j,k}) - v_{j,k} + d(u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1} - 4u_{j,k}), \\ \dot{v}_{j,k} = \varepsilon(g(u_{j,k}) - v_{j,k} - I), \end{cases} \qquad (4)$$

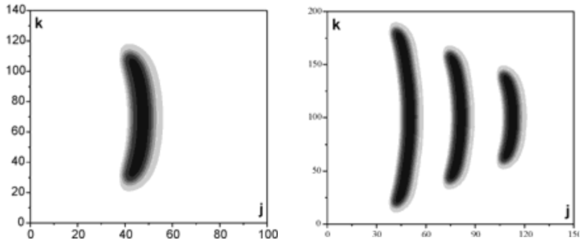
$$j = 1,2,..., N, k = 1,2,..., M,$$

где j и k – дискретные пространственные координаты, а d характеризует величину вертикальной и горизонтальной диффузионной связи в системе.

Численное исследование пространственно-временной динамики показало, что в такой системе возможно формирование разнообразных устойчивых неодномерных подвижных (волновых) пространственно-локализованных структур. Было обнаружено два класса таких структур, отличающихся поведением их интегральных характеристик (ширина, высота, профиль, скорость), – стационарных (регулярных) и нестационарных (полиморфных). Характеристики регулярных локализованных структур не зависят от времени. Напротив, характеристики полиморфных структур могут изменяться во времени, причем достаточно сложным образом.

Глава содержит три основных раздела. В первой части главы кратко рассматриваются базовые динамические свойства системы (4).

Во второй части главы детально изучаются регулярные локализованные структуры. Здесь, для удобства, система (4) рассматривается с периодическими граничными условиями по обеим координатам. Установлено, что регулярные структуры могут иметь вид как отдельных локализованных образований (рис. 4, *а*), так и связанных состояний (рис. 4, *б*), состоящих из нескольких таких образований. На плоскости параметров (ε, d) выделены области, отвечающие существованию простых (одиночных) структур. Показано, что система обладает высокой мультистабильностью таких структур.



(а) (б)

Рис. 4. Примеры простой (*а*) и связанной (*б*) регулярной структуры (градацией серого цвета выделена область, соответствующая возбужденным элементам системы). Значения параметров: α=0.9, β=0.8, I = –0.025, d=1, ε=0.648515.

Изучены основные динамические механизмы существования регулярных структур. В частности, показано, что локализация в направлениях перпендикулярных к направлению распространения структур связана с наличием осцилляторного порога у локальных элементов системы, а локализация вдоль направления распространения связана с наличием периодической или кратковременной колебательной активности. Установлена связь между локализованными структурами и траекториями в многомерном фазовом пространстве, ассоциированном с системой (4). Показано, что в многомерном фазовом пространстве регулярной локализованной структуре отвечает устойчивый предельный цикл. Потеря устойчивости предельного цикла и, соответственно, локализованной структуры происходит в результате касательной бифуркации (бифуркации двукратного предельного цикла). Было изучено взаимодействие регулярных структур друг с другом. Установлены три основных сценария их взаимодействия: аннигиляция, формирование плоских волн и частицеподобное поведение. Показано, что существует два вида частицеподобного поведения – упругое и неупругое. При упругом частицеподобном взаимодействии формирующиеся в результате регулярные структуры имеют ту же ширину и скорость, как и изначальные структуры до взаимодействия. Напротив, при неупругих взаимодействиях ширина и скорость формирующихся структур не совпадает с шириной и скоростью изначальных структур. В частности, оказалось, что их ширина может как уменьшаться, так и увеличиваться, на величину от одной до нескольких единиц.

Третья, заключительная часть главы посвящена изучению полиморфных локализованных структур. Здесь система (4) рассматривалась с граничными условиями Неймана по координате j и периодическими условиями по k.

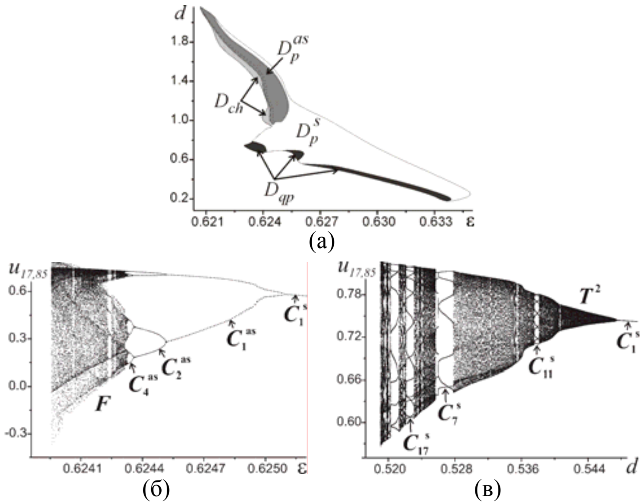


Рис. 5. (*а*) Области D_p^s (D_p^{as}), D_{qp} и D_{ch} в плоскости параметров (ε,d), отвечающие существованию периодических, квазипериодических и хаотических полиморфных структур соответственно; (*б*) и (*в*) – однопараметрические бифуркационные диаграммы. Значения параметров: α=0.9, β=0.8, I=-0.025; (*б*) d=1; (*в*) ε=0.627519.

Было обнаружено три основных типа полиморфных структур – периодические, квазипериодические и хаотические. На плоскости параметров (ε,d) выделены области, отвечающие существования таких структур (рис. 5, *а*). Изучены бифуркационные механизмы перехода от одного типа структур к другому. Показано, что хаотические структуры возникают в результате каскада бифуркаций удвоения периода (рис. 5, *б*) и соответствуют аттрактору Фейгенбаума. Квазипериодические структуры появляются за счет бифуркации Неймарка – Сакера (рис. 5, *в*) и соответствуют двумерному устойчивому тору. Изучены также основные динамические механизмы формирования полиморфных структур. Показано, что формирование таких структур есть результат некоторого баланса между процессами роста структур в стадиях распространения и процессами “диссипации” структур при их взаимодействиях с границами системы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Изучена динамика модели ФитцХью-Нагумо с нелинейным поведением восстанавливающей переменной. Проведен анализ локальных и нелокальных бифуркаций модели, построены карты возможных динамических режимов. Установлено, что модель обладает широким набором динамического поведения, включающим как достаточно простые режимы (классический триггерный – покой-покой, колебательный и возбудимый), так и более сложные режимы, одновременно совмещающие, например, возбудимые и колебательные свойства. Ответ модели на внешний стимул в таких режимах существенным образом зависит от его амплитуды. Выделены области параметров, соответствующие различному мультипороговому поведению, исследована зависимость свойств отклика от амплитуды внешнего воздействия.
2. Установлен механизм возникновения мультипороговых свойств. Показано, что такие свойства связаны со сложным (колебательным) поведением пороговых сепаратрис седлового состояния равновесия модели и возникают в окрестности кривых, отвечающих бифуркациям “большого” двукратного предельного цикла (охватывающего все три состояния равновесия) и “большой” петли сепаратрис седла, при разрушении которой происходит рождение устойчивого предельного цикла.
3. Изучена динамика одномерной РДСП системы. Показано, что такая система имеет широкий набор волновых и пространственно-локализованных структур, включающий стационарные бегущие волны (импульсы возбуждения, волновые фронты и связанные локализованные состояния волновых фронтов), нестационарные колебательно-волновые, в том числе спайковые, “ромбо”- и “паутинообразные”, структуры активности, а также связанные состояния волновых фронтов в виде неподвижных осцилляторных локализованных структур.
4. В системе для бегущих волн, соответствующей одномерной РДСП системе, изучены, ассоциирующиеся с импульсами возбуждения и волновыми фронтами, гомоклинические и гетероклинические орбиты. Получены бифуркационные множества, отвечающие существованию таких орбит. Установлено наличие у системы для бегущих волн бифуркационного множества, которому соответствует в трехмерном фазовом пространстве системы гетероклинический контур. Показано, что наличие такого контура свидетельствует о сложном пространственно-временном поведении реакционно-диффузионной системы.
5. Показано, что волновые фронты и импульсы возбуждения демонстрируют, не типичные для автоволн в реакционно-диффузионных системах, свойства – солитоноподобное поведение. При взаимодействии друг с другом и границами системы такие волны, вместо аннигиляции, отражаются или “переключаются” в новое состояние. Изучен динамический механизм такого по-

ведения волн, в основе которого лежат мультипороговые свойства локальных элементов системы.

6. Показано, что в двухкомпонентной двумерной системе реакционно-диффузионного типа возможно существование широкого класса неодномерных устойчивых локализованных структур. Структуры представляют собой уединенные группы элементов системы, находящихся в состоянии синхронной активности, на фоне остальных элементов, находящихся в состоянии относительного покоя. Параметры (ширина, высота, профиль) структур могут быть как постоянными (регулярные структуры), так и изменятся во времени (полиморфные структуры). Установлено, что ширина и высота полиморфных структур в зависимости от параметров системы могут меняться во времени периодически, квазипериодически и даже хаотически.

7. Установлено, что существование регулярных структур связано с наличием у локального элемента системы режима периодической (или кратковременной) колебательной активности и двух порогов возбуждения, а полиморфных структур – с балансом между процессами роста в стадии их распространения и процессами "диссипации" при их взаимодействии с границами системы.

8. Выделены области в пространстве параметров системы, отвечающие существованию различных типов неодномерных локализованных структур. Показано, что регулярные структуры (и связанные локализованные состояния) обладают высокой мультистабильностью, что не наблюдалось прежде для локализованных структур в других системах. Вследствие высокой мультистабильности регулярные структуры наряду с типичными сценариями взаимодействия (аннигиляция и упругое частицеподобное поведение) при определенных параметрах показывают неупругое частицеподобное поведение. Взаимодействие регулярных структур может приводить также к образованию связанных состояний, устойчивость которых является результатом их коллективного взаимодействия.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Dmitrichev A.S.* Pulse propagation and replication in the modified FitzHugh-Nagumo system // Book of Abstracts of the Int. Conference "Dynamic Days 2002". – Heidelberg, 2002. – P. 61-62.
2. *Дмитричев А.С.* Импульсы возбуждения в модифицированной системе ФитцХью-Нагумо // Труды 7-й научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: Изд-во ТАЛАМ, 2003. – С. 110-111.
3. *Dmitrichev A.S., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.* Wave fronts in a modified FitzHugh-Nagumo system // Proceedings of the Int. Symposium "Topical problem of Nonlinear Wave Physics". – Nizhny Novgorod, 2003. – P. 70-71.
4. *Дмитричев А.С., Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Волновые фронты в ансамбле взаимосвязанных модифицированных элементов ФитцХью – Нагумо // XII Научная школа "Нелинейные волны – 2004": Тез. докл. – Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2004. – С. 34-35.

5. *Дмитричев А.С., Щапин Д.С., Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Сложная волновая динамика в ансамбле взаимосвязанных элементов ФитцХью-Нагумо и сепаратрисные контура // 7-я международная школа "ХАОС – 2004": Тез. докл. – Саратов: Изд-во СГУ, 2004. – С. 119–120.
6. *Некоркин В.И., Дмитричев А.С., Щапин Д.С., Казанцев В.Б.* Динамика модели нейрона со сложно-пороговым возбуждением // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – N. 6. – С. 75-91.
7. *Дмитричев А.С.* Динамика ансамбля нейроноподобных элементов со сложно-пороговым возбуждением // Сборник трудов Десятой Нижегородской сессии молодых ученых (физика, химия, медицина, биология). – Н. Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2005. – С. 108-109.
8. *Дмитричев А.С., Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Перезапуск и инвертирование серий бегущих импульсов в одномерной нейронной сети со сложно-пороговым возбуждением // XIII Научная школа "Нелинейные волны – 2006": Тез. докл. – Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2006. – С. 38-39.
9. *Kazantsev V.B., Dmitrichev A.S., Shapin D.S., Nekorkin V.I.* Multi-threshold excitability in nonlinear network of neuron–like units // Proceedings of the 14th Int. Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES – 2006). – Dijon, 2006. – P. 69-72.
10. *Некоркин В.И., Щапин Д.С., Дмитричев А.С.* Сложная волновая динамика ансамбля нейроноподобных элементов и гетероклинические контура // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2007. – Т. 15. – N. 1. – С. 3-22.
11. *Дмитричев А.С., Некоркин В.И.* Локализованные структуры нейронной активности в двумерной модели ФитцХью-Нагумо // 8-я международная школа "ХАОС – 2007": Тез. докл. – Саратов: Изд-во СГУ, 2007. – С. 48.
12. *Nekorkin V.I., Shapin D.S., Dmitrichev A.S., Kazantsev V.B., Binczak S., Bilbault J.M.* Heteroclinic Contours and Self-Replicated Solitary Waves in a Reaction-Diffusion Lattice with Complex Threshold Excitation // Physica D. – 2008. – Vol. 237. – N. 19. – P. 2463-2475.
13. *Дмитричев А.С., Некоркин В.И.* Локализованные структуры активности в бистабильной нейроноподобной среде с осцилляторным порогом // XIV Научная школа "Нелинейные волны – 2008": Тез. докл. – Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2008. – С. 41-42.
14. *Дмитричев А.С., Некоркин В.И.* Стационарные локализованные структуры активности в двумерном ансамбле модельных нейронов ФитцХью-Нагумо с осцилляторным порогом // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2008. – Т. 16. – N. 3. – С. 71-86.
15. *Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I.* Localized patterns in a two-dimensional lattice of electrically coupled modified FitzHugh-Nagumo Neurons // Proceedings of the 16th Int. Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES – 2008). – Nizhny Novgorod, 2008. - P. 14.
16. *Дмитричев А.С.* Локализованные структуры активности в двумерной бистабильной модели ФитцХью-Нагумо с осцилляторным порогом // Труды 12-й научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: Изд-во ТАЛАМ, 2008. – С. 78-80.
17. *Дмитричев А.С., Некоркин В.И.* Нестационарные локализованные структуры активности в двумерной двухкомпонентной системе "реакция-диффузия" // Нелинейные волны – 2008. - Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2008. – С. 297-312.

ДМИТРИЧЕВ Алексей Сергеевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ СО СЛОЖНО-ПОРОГОВЫМИ СВОЙСТВАМИ

А в т о р е ф е р а т

Подписано к печати 26.02.10.

Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.

Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 17(2010)

Отпечатано в типографии Института прикладной физики РАН,
603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 46