На правах рукописи

ФИЛИМОНОВ Владимир Александрович

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

01.04.03 – радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2010

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Саичев А. И.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Белых В. Н. доктор физико-математических наук, профессор Силаев А. М.
Ведущая организация:	Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Защита состоится «____» ____________ 2010 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского (603950, Н. Новгород, ГСП-20, пр. Гагарина, 23, корп. 1, ауд. 420).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.
Текст автореферата размещен на сайте www.unn.ru

Автореферат разослан «____» ____________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н., доц. Черепенников В. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Теория мультифрактальных случайных процессов появившаяся в результате переосмысления и обобщения каскадных моделей, впервые описанных в работах Л. Ричардсона и получивших широкое распространение благодаря феноменологическим теориям турбулентности А. Колмогорова K41 и K62, в настоящее время нашла широкое применение в различных областях науки. Основное развитие данная область теории случайных процессов получила в рамках гидродинамики, где она применяется для описания свойств самоподобия мелкомасштабной турбулентности [1–3]. Не менее важной областью применения мультифрактальных процессов является теория финансовых рынков, где фрактальные и мультифрактальные процессы с успехом используются для моделирования стохастических процессов котировок ценных бумаг [4, 5]. В последние годы большой интерес к мультифрактальным моделям был проявлен также в геофизике, где мультифрактальные процессы используются для описания и анализа последовательностей землетрясений и порожденных ими «афтершоков» [6]. В статистической теории колебаний мультифрактальные свойства были обнаружены, у распределений времен возврата [7], что позволило применить мультифрактальный анализ для диагностике синхронизации хаоса в динамике взаимодействующих автоколебательных систем [8]. Кроме того, явные мультифрактальные свойства были обнаружены в некоторых режимах стохастического резонанса. После работ П. Иванова и др. [9], экспериментально показавших, что мультифрактальные спектры сердечного ритма человека могут служить для диагностирования паталогий, теория мультифрактальных процессов вызвала интерес также и в биологии (см., например, работу [10] и ссылки в ней). Потенциальным приложением теории самоподобных процессов является также теория телетрафика, однако вопрос о наличии мультифрактальных свойств последнего в настоящий момент не решен однозначно. Лежащий в основе теории мультифрактальных процессов мультифрактальный формализм, изначально предложенный для статистического анализа особенностей масштабных свойств сингулярных мер, с успехом применялся в разных областях физики и радиофизики: при изучении диффузного роста кластеров, для описания разрушения материалов, при исследовании несоразмерных структур и квазикристаллов в физике твердого тела, для анализа структуры ДНК, для описания инвариантной вероятностной меры странных аттракторов, при изучении агрегационных свойств клеточных элементов крови в биологии и т.д. (см., например, обзоры в [11, 12])

Мультифрактальные сигналы, регистрируемые в натурных экспериментах, характеризуются наличием сложной структуры и нетривиальных свойств масштабной инвариантности. Простые или монофрактальные сигналы и процессы (например, $1/f$-шум, винеровский случайный процесс, полеты Леви́ и др.) обладают однородностью масштабно-инвариантных свойств, которые остаются неизменными в любом диапазоне масштабов и могут быть характеризованы одним показателем. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными свойствами масштабной инвариантности и требуют для описания гораздо большее число характеристик. Основные понятия современной теории мультифракталов и мультифрактальных процессов, являющейся расширением теории фрактальных множеств, были заложены в работах Б. Мандельброта [13] и окончательно оформились в строгую теорию в работах У. Фриша и Г. Паризи [14], а также Р. Бензи и др [15].

Ключевым вопросом теории мультифрактальности является разработка моделей, адекватно отражающих свойства реальных процессов. Первые модели А. Колмогорова (1962 г.) и Б. Мандельрота (1974 г.), упомянутые выше, а также другие модели дискретных каскадов обладали рядом существенных недостатков, таких как нестационарность приращений, отсутствие явной зависимости от времени и применимость лишь для дискретного набора масштабов. Тем не менее, относительная простота дискретных каскадных моделей, возможность аналитического описания и существование строгих мультифрактальных свойств послужили причиной значительного интереса к данным моделям. Позднее в 2002 г. Ж.-Ф. Музи и Э. Бакри, рассматривая мультифрактальные стационарные случайные меры, обобщили понятие каскада на непрерывный случай [16], избавившись от нестационарности приращений, но сохранив при этом строгие мультифрактальные масштабные свойства. Одной из попыток описания явной зависимости от времени, стали так называемые субординированные процессы, введенные в 1997 г. Б. Мандельбротом, Л. Кальветом и А. Фишером [17]. Широкую популярность в финансовых приложениях получила предложенная в 2004 г. марковская мультифрактальная модель (Markov Switching Multifractal, MSM) [5] благодаря простоте оценки параметров и наличию широких возможностей предсказания.

Первой и до настоящего времени единственной моделью, обладающей стационарными приращениями и содержащей явную зависимость от времени стала модель мультифрактальных случайных блужданий (Multifractal Random Walk, MRW), предложенная в 2000 г. Ж.-Ф. Музи, Э. Бакри и Ж. Делоур [18]. В ней мультифрактальный процесс представлялся в виде предела конечной суммы отсчетов некоторого случайного процесса, получаемого путем комбинации двух независимых гауссовых процессов. Для данной модели было показано наличие строгих мультифрактальных свойств не на всем диапазоне масштабов, а только в некотором интервале, ограниченном сверху так называемым интегральным масштабом. При этом модель мультифрактальных случайных блужданий несет в себе существенное внутреннее противоречие, которое заключается в частности в том, что модель теряет физический смысл при рассмотрении моментов приращений высоких порядков.

Более адекватной моделью непрерывного времени стала модель, предложенная в 2006 г. А. Саичевым и Д. Сорнетте [19]. Учитывая, что в реальных эффектах и явлениях свойства масштабной инвариантности проявляются на некотором (зачастую достаточно узком) интервале масштабов, как например инерционный интервал для турбулентности, авторы не стали требовать строгого выполнения мультифрактальных масштабных свойств, что привело к модели, не содержащей внутренних противоречий присущих модели случайных блужданий. Предложенная модель (позднее названная лог-нормальной мультифрактальной моделью) вводила в употребление несколько дополнительных существенных параметров, характеризующих продолжительность инерционного интервала и степень мультифрактальных свойств. Ограничением данной модели была возможность описания только монотонно растущих процессов, что не позволяло применять ее для моделирования процессов, обладающих знакопеременными приращениями, напрямую, а только в качестве мультифрактальной меры для субординированных процессов. Данное ограничение и явилось предпосылкой к разработке диффузионной квазимультифрактальной модели, описанию и изучению которой посвящена настоящая диссертационная работа.

Цели диссертационной работы:

1. Разработка диффузионной квазимультифрактальной модели случайных процессов;

2. Изучение статистических свойств диффузионного квазимультифрактального процесса, как-то: мультифрактальных спектров, функции корреляции, плотности распределения;

3. Модификация модели для количественного описания свойств аномально-диффузионных процессов и процессов (таких как турбулентные потоки), обладающих «эндогенной» обратной связью (таких как последовательности землетрясений и временные ряды в теории финансовых рынков)

Научная новизна работы заключается как в постановке ряда не решенных ранее актуальных задач статистической радиофизики, так и в полученных оригинальных результатах. Впервые разработана мультифрактальная модель, не содержащая внутренних противоречий и описывающая явный вид случайного процесса. Подробно изучены и описаны статистические свойства предлагаемого процесса. Показано, что процесс обладает такими характерными для гидродинамической турбулентности свойствами, как нелинейность мультифрактальных спектров, негауссовость функции распределение и наличие длинных корреляций. Анализ полученных в работе универсального закона перемежаемости и ансамблей реализаций процесса позволил показать возможность описания при помощи модели свойств широкого класса самоподобных процессов — от практически монофрактальных до сильно мультифрактальных.

В данной работе впервые предложена «эндогенная» (самовозбуждающаяся) мультифрактальная модель, содержащаая явную зависимость от времени. Показано, что описываемые ею процессы обладают обширным спектром свойств, характерных для финансовых и геофизических приложений, а сама модель, в отличие от «экзогенных» квазимультифрактальных моделей и моделей мультифрактального случайного блуждания, не теряет физического смысла и сохраняет мультифрактальные свойства для широкого класса ядер.

Методы исследования и достоверность научных результатов. Достоверность результатов, сформулированных в диссертации, подтверждается использованием хорошо известных методов анализа случайных процессов, а также путем сравнения результатов аналитических расчетов и численного моделирования. При выполнении численного моделирования особое внимание уделялось вопросам адекватности используемых методов, а также сходимости используемых алгоритмов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана диффузионная квазимультифрактальная модель, обладающая явно выраженными мультифрактальными свойствами на инерционном интервале;

2. Получены мультифрактальные спектры, функции корреляции, плотности распределения, инерционные интервалы и фрактальные размерности реализаций диффузионного квазимультифрактального процесса;

3. Получен универсальный закон перемежаемости и универсальный вид мультифрактального спектра предложенного процесса;

4. На основе совместного анализа реализаций и спектров процесса выделены три различных режима квазимультифрактального процесса: слабо мультифрактальный, умеренно мультифрактальный и сильно мультифрактальный;

5. Развита дробная мультифрактальная модель как обобщение диффузионной мультифрактальной модели для описания спектров развитой турбулентности и изучены ее статистические свойства;

6. Разработана «эндогенная» модель самовозбуждающегося мультифрактального процесса для описания финансовых временных рядов и изучены ее статистические свойства.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены на международных научных конференциях: «Modeling Anomalous Diffusion and Relaxation: from Single Molecules to the Flight of the Albatross?» (Иерусалим, Израиль, 2008), «International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF'2009)» (Пиза, Италия, 2009), всероссийских научных конференциях: «13-я Всероссийская Научная Конференция Студентов-Физиков и молодых ученых» (Таганрог, 2007), «Всероссийская молодежная научно-инновационная школа "Математика и математическое моделирование"» (Саров, 2008, 2010), «Технологии Microsoft в теории и практике программирования» (Нижний Новгород, 2007, 2008), а также на конференциях молодых ученых «Научная конференция по радиофизике» (Нижний Новгород, 2008, 2009) и «Нижегородская сессия молодых ученых (естественно-научные дисциплины)» (Нижний Новгород, 2008, 2009, 2010). Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры математики радиофизического факультета ННГУ, а также кафедры рисков факультета менеджмента, технологий и экономики Федерального технологического института г. Цюрих (Швейцария).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых физических журналах, 1 статья в сборнике трудов конференций и 8 тезисов докладов (отдельно вынесены в «Список публикаций по теме диссертации»).

Личный вклад автора. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в выборе направлений исследований и постановке основных задач. Все представленные результаты теоретического исследования, а также результаты численного моделирования получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитируемой литературы и списка публикаций по теме диссертации. Общий объем диссертации составляет 158 страниц, включая 55 рисунков и список литературы из 157 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая научная и значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** рассматриваются основные понятия и выражения составляющие математический аппарат, используемый в диссертационной работе для описания свойств квазимультифрактальных процессов.

В **разделе 1.1** даются основные определения, составляющие мультифрактальный формализм — размерностей Минковского и Хаусдорфа, моментных функций (обобщенных статистических сумм), скейлингового показателя, обобщенных фрактальных размерностей и мультифрактального спектра меры. Показывается связь между скейлинговыми показателями и мультифрактальным спектром меры.

В **разделе 1.2** рассматривается обобщение мультифрактального формализма и использование его для описания свойств масштабной инвариантности случайных процессов. Приводится определение мультифрактального спектра ζ_q случайного процесса $X(t)$, равного показателю в чисто степенном представлении моментов приращений процесса $X(t)$:

$$M_q(l) = \langle|\delta_l X(t)|^q\rangle = \langle|X(t+l) - X(t)|^q\rangle = K_q l^{\zeta_q}. \tag{1}$$

При этом процесс $X(t)$ называется монофрактальным, если его спектр линеен $\zeta_q = qH$, и мультифрактальным, если его спектр ζ_q — нелинейная функция порядка q. Отмечается связь приведенного определения с определением, используемым в рамках метода максимумов модулей вейвлет-преобразования. В разделе доказывается невозможность существования нелинейного мультифрактального спектра ζ_q на произвольно больших масштабах и обосновывается необходимость введения инерционного интервала.

В **разделе 1.3** описываются основные свойства и мультифрактальные спектры процесса мультифрактальных случайных блужданий и рассматриваются его недостатки, послужившие предпосылкой к созданию квазимультифрактальных моделей.

В **разделе 1.4** приведены краткие выводы по первой главе.

Во **второй главе** описывается диффузионная квазимультифрактальная модель и проводится аналитическое рассмотрение статистических свойств описываемых ею процессов, выводятся и анализируются строгие выражения для мультифрактальных спектров процессов.

Согласно определению, данному в **разделе 2.1**, диффузионным квазимультифрактальным случайным процессом называется случайный процесс

$X(t)$, обладающий стационарными приращениями вида

$$\delta_l X(t) = \int\limits_t^{t+l} \xi(t')e^{\omega(t')}dt', \tag{2}$$

где $\omega(t)$ — процесс вида

$$\omega(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \mu(t')h(t-t')dt', \tag{3}$$

ядро свертки имеет вид

$$h(t) = \frac{h_0}{(1+t/\tau)^{\varphi+1/2}}, \tag{4}$$

τ — некоторый характерный масштаб, названный масштабом вязкости, а $\xi(t)$ и $\mu(t)$ — два статистически независимых гауссовых белых шума. В разделе описываются основные параметры процесса — показатель скорости спадания ядра φ и комбинированный параметр σ^2. Отмечается, что добавка малого параметра $\varphi \ll 1$ в показателе степени в (4) по сравнению с ядром в модели мультифрактальных случайных блужданий, не разрушает мультифрактальных свойств процесса.

В **разделе 2.2** приводится вывод выражения для дисперсии приращений. Показывается, что дисперсия растет по классическому линейному закону $D[\delta_l X(t)] = D_{\text{diff}}\, l$, характерному для нормально-диффузионных процессов и приводится выражение для коэффициента диффузии D_{diff}.

В **разделе 2.3** выводятся строгие выражения для четных моментов приращений (1) квазимультифрактального процесса (2):

$$M_{2m}(l) = C_{2m}\int\limits_0^l dt_1 \int\limits_0^l dt_2 \ldots \int\limits_0^l dt_{2m} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=i+1}^{m} G\left(\frac{t_i - t_j}{\tau}\right), \tag{5}$$

где

$$G(y) = e^{\sigma^2(C(y)-1)}, \qquad C(y) = \frac{1}{\|h\|^2}\int\limits_0^\infty h(t)h\left(t+|y|\,\tau\right)dt. \tag{6}$$

Анализируется вид функций $G(y)$ и $C(y)$ и для случая $\varphi < 1/2$ выводится явное выражение для последних.

В **разделе 2.4** анализируются выражения для моментов приращений (5), для чего вводится понятие локального масштабного показателя $\zeta_q(l)$

$$\zeta_q(l) = \frac{d\ln M_q(l)}{d\ln l} \equiv \frac{l}{M_q(l)}\frac{dM_q(l)}{dl}. \tag{7}$$

В разделе показывается, что локальный масштабный показатель $\zeta_q(l)$ для диффузионного квазимультифрактального процесса (2) обладает двумя монофрактальными асимптотиками $\zeta_q(l) = q/2$ при $l \to 0$ и $l \to \infty$, а значит чисто степенное выражение (1) не может быть выполнено строго. Тем не менее, как показывают проведенные в разделе расчеты, существует достаточно продолжительная область масштабов l, в которой выражение для момента приращений (5) может быть аппроксимировано чисто степенной зависимостью (1). Для описания свойств масштабной инвариантности в этом случае имеет смысл ввести понятие эффективного масштабного показателя $\tilde{\zeta}_q$ и говорить о квазимультифрактальных свойствах процесса, имеющих место только внутри некоторого ограниченного инерционного интервала. В разделе рассматривается вопрос о способе определения эффективного масштабного показателя и делается вывод, что наиболее строгим с аналитической точки зрения является способ определения последнего через величину абсолютного минимума функции $\zeta_q(l)$: $\tilde{\zeta}_q = \min_l \zeta_q(l)$. Данное определение также позволяет дать количественное определение инерционного интервала масштабов $\tau_\delta < l < L_\delta$ как области масштабов, в которой график $\zeta_q(l)$ может быть аппроксимирован постоянным значением $\tilde{\zeta}_q$ с погрешностью δ.

Учитывая необходимость численного расчета моментов приращений (5) для вычисления локальных и эффективных масштабных показателей и возникающую при этом значительную вычислительную сложность задачи при $q \geqslant 4$, в **разделе 2.5** выводится «сокращенное» выражение для моментов (5) с помощью анализа симметричных свойств подынтегральных функций в (5). Также в разделе рассматривается вопрос выбора квадратурной формулы.

В **разделе 2.6** приводятся результаты расчетов локальных показателей $\zeta_q(l)$ и квазимультифрактальных спектров $\tilde{\zeta}_q$ процесса (2). Анализ графиков локальных показателей (см. пример на рис. 1) показал, что величина инерционного интервала диффузионного квазимультифрактального процесса существенно зависит от параметров процесса σ^2 и φ (рис. 2), причем чем сильнее выражены мультифрактальные свойства процесса, тем меньше инерционный интервал на котором они проявляются. Исключение составляет лишь сильно-мультифрактальный режим, отвечающий предельному значению локальных показателей $\zeta_q(l) = 1$. Анализ локальных показателей (рис. 1) позволил рассчитать мультифрактальные спектры процесса (рис. 3а, кружки).

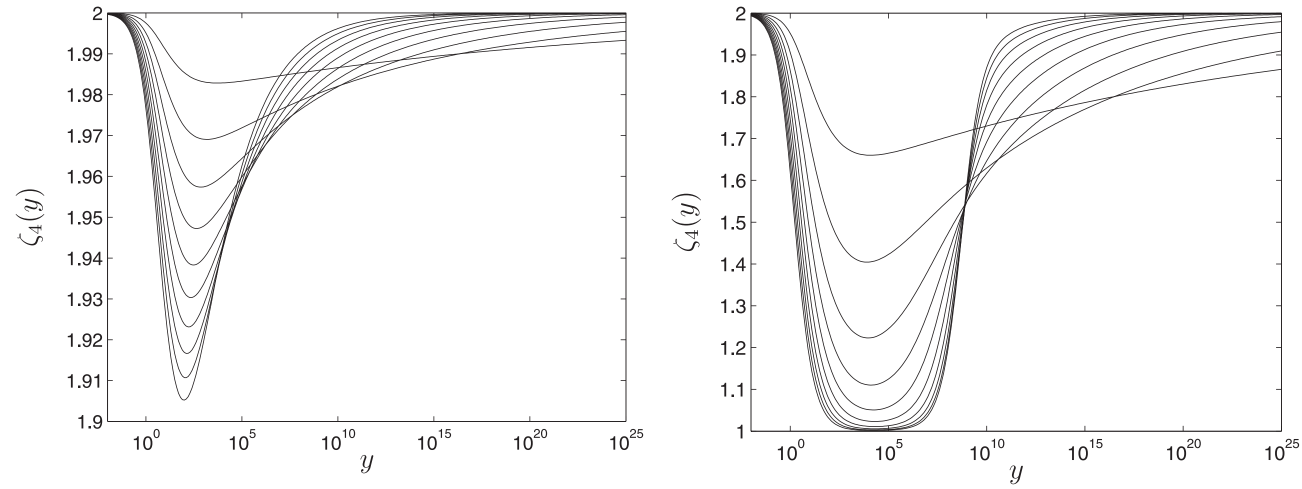


Рис. 1. График локального масштабного показателя $\zeta_4(y)$ процесса (2) для $\sigma^2 = 1$ (слева), $\sigma^2 = 20$ (справа) и и $\varphi = 0.01$; 0.02; 0.03; 0.04; 0.05; 0.06; 0.07; 0.08; 0.09; 0.1 (сверху–вниз)

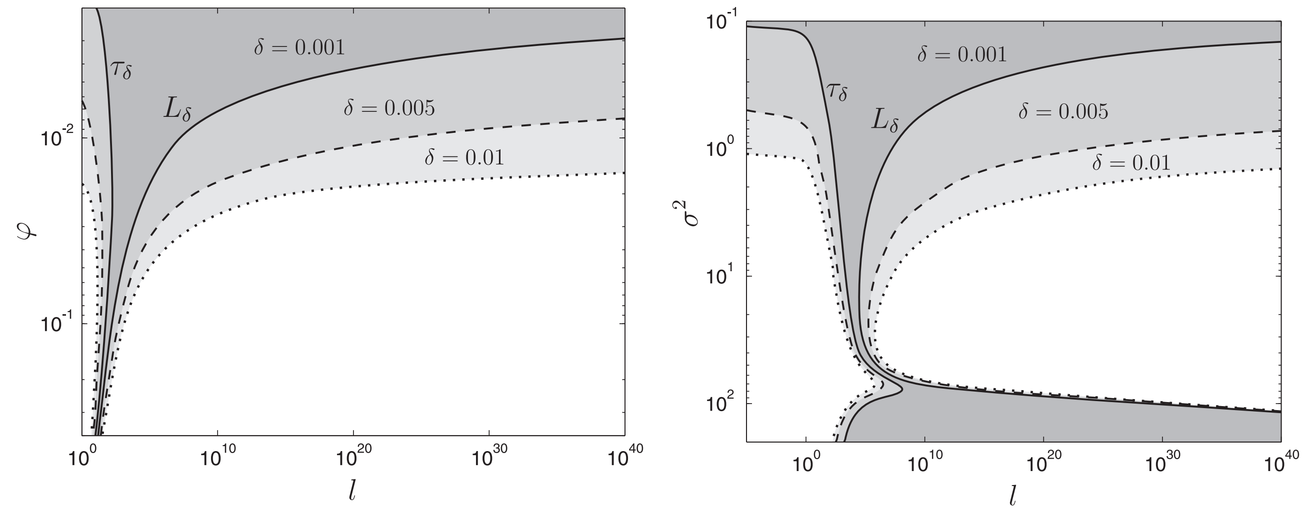


Рис. 2. Графики зависимостей инерционного интервала $(\tau_\delta; L_\delta)$ процесса (2) для $\sigma^2 = 1$ от параметра φ (слева) и для $\varphi = 0.01$ от параметра σ^2 (справа) для $\delta = 0.01$ (пунктир), $\delta = 0.005$ (штрихованная линия), $\delta = 0.001$ (сплошная линия)

В **разделе 2.7** проводится анализ коэффициента перемежаемости $\lambda^2 = -d^2\zeta_q(0)/dq^2$ и показывается, что λ^2 может быть представлен в виде

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\Lambda^2\left(4k_0\sigma^2\left(1+\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^a\right)^{-1/a}\right), \tag{8}$$

где k_0, φ_0 и a — параметры, а $\Lambda^2(x)$ — некоторая универсальная функция (рис. 3b). При этом ошибка аппроксимации составит менее 0.1% для большинства значений параметров σ^2 и φ, максимальное же значение ошибки аппроксимации — 2.8%. Универсальный вид коэффициента перемежаемости позволил также записать универсальное выражение для квазимульти-

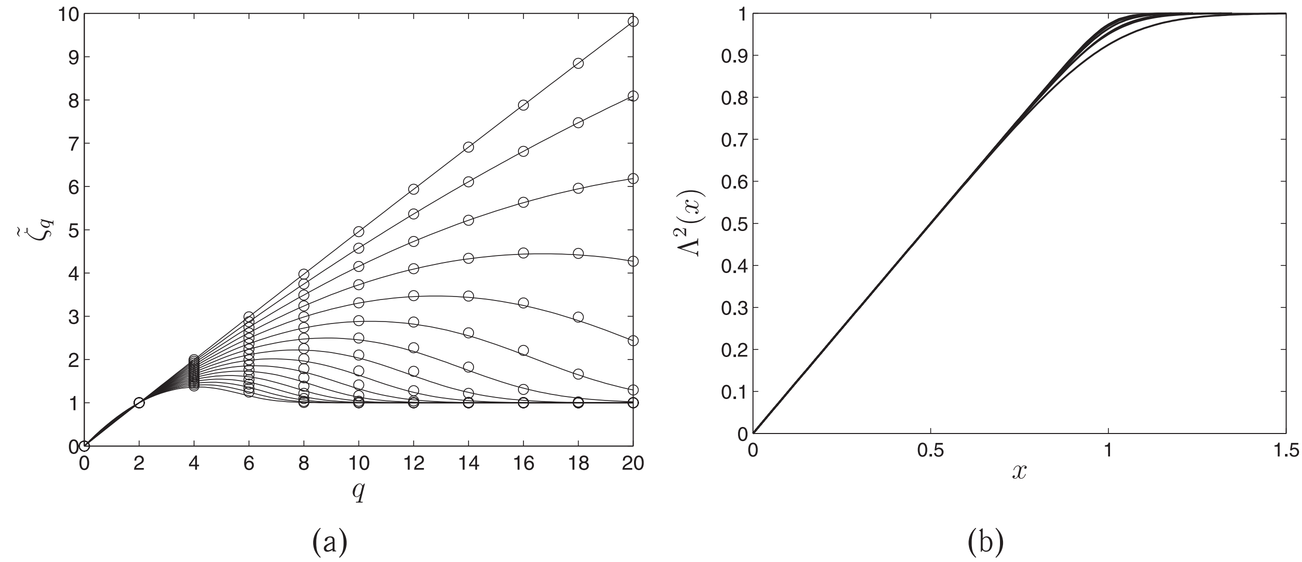


Рис. 3. (a) График квазимультифрактальных спектров $\tilde{\zeta}_q$ процесса (2) для $\varphi = 0.03$ и $\sigma^2 = 0.1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$ (сверху–вниз) рассчитанных строго (кружки) и полученных из универсального выражения (9) (сплошные линии)
(b) График универсальной функции $\Lambda^2(x)$ для $\varphi = 0.001$ и $q = 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18;\ 20$ (справа–налево)

фрактального спектра процесса (2) (рис. 3a, сплошные линии):

$$\tilde{\zeta}_q = \frac{q}{2} + \left(1 - \frac{q}{2}\right)\Lambda^2\left(k_0\sigma^2 q\left(1 + \left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^a\right)^{-1/a}\right). \tag{9}$$

В разделе также приводится аналитическое выражение для функции $\Lambda^2(x)$ и значения коэффициентов k_0, φ_0 и a.

В **разделе 2.8** приведены выводы по второй главе, а также обсуждается модель мультифрактальных случайных блужданий как предельный случай диффузионной квазимультифрактальной модели при $\varphi \to 0$.

В **третьей главе** рассматривается дискретный диффузионный квазимультифрактальный процесс и обсуждаются результаты численного моделирования методом Монте-Карло.

В **разделе 3.1** рассматривается дискретизация времени в непрерывной модели, рассмотренной во второй главе, и вводится дискретный аналог диффузионного квазимультифрактального процесса.

В **разделе 3.2** обсуждаются важные аспекты численного моделирования. По результатам тестирования различных генераторов равномерно распределенных случайных чисел, наиболее приемлемым генератором был признан «Вихрь Мерсенна» (Mersenne twister). Сравнение различных способов преобразования равномерно распределенных величин в случайные величины, распределенные по гауссовому закону, показало преимущество

«Зиккурат-алгоритма» (Ziggurat algorithm). Особое внимание в разделе было уделено вопросу моделирования гауссового процесса $\omega(t)$ (3), обладающего длинной памятью. Показана невозможность применения методов, основанных на фильтрации. Предложено использование метода циркулянтного встраивания (Circulant Embedding Method, CEM) и доказано выполнение необходимого и достаточного условия его применения для процесса $\omega(t)$.

В **разделе 3.3** рассматриваются результаты численного моделирования реализаций дискретного квазимультифрактального процесса. Для процесса показано наличие эффекта перемежаемости — чередования участков с большой и малой дисперсиями — характерного для приращений скорости в турбулентных потоках. Проведен анализ корреляционных функций приращений, показавший отсутствие линейных корреляций, но в то же время наличие медленно спадающих хвостов высших моментных функций. На основании совместного анализа мультифрактальных спектров (9), коэффициентов перемежаемости (8) и ансамблей реализаций дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса было выделено наличие трех различных режимов — слабо мультифрактальный ($\lambda^2 \lesssim 0.02$), в котором свойства квазимультифрактального процесса близки к свойствам винеровского процесса, а мультифрактальный спектр практически прямолинеен; умеренно мультифрактальный ($0.02 \lesssim \lambda^2 \lesssim 0.2$), в котором проявляется эффект перемежаемости; плотность вероятности становится существенно негауссовой, а спектр практически параболическим в большом диапазоне значений q; и сильно мультифрактальный ($0.2 \lesssim \lambda^2 \leqslant 0.25$), в котором доминирующую роль в динамике процесса играют «скачки» процесса, вызванные тяжелыми хвостами плотности вероятности, а спектр быстро выходит на асимптотическое значение $\tilde{\zeta}_q = 1$.

В **разделе 3.4** аналитически выводится строгое выражение для одномерной функции распределения приращений d_n дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса X_n:

$$f_d(d) = \frac{1}{\pi\sigma}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{d^2t^2}{2} - 2\frac{\ln^2 t}{\sigma^2}\right)dt. \tag{10}$$

Приводится численный анализ полученного выражения, показавший, что при $\sigma^2 \neq 0$ плотность вероятности обладает тяжелыми (спадающими медленнее, чем экспоненциальная функция) хвостами при $d \to \infty$. Если же рассматривать ограниченный интервал $d \lesssim 10^4 - 10^6$, то при малых значениях $\sigma^2 \lesssim 0.1$ плотность распределения является практически гауссовой, а с увеличением σ^2 приобретает тяжелые хвосты, которые при $\sigma^2 \gtrsim 10$ могут быть аппроксимированы степенной зависимостью $f(d) \sim d^{-\alpha}$, сохраняющейся на интервале достаточно продолжительном интервале значений d. Было проведено сравнение аналитически полученной зависимости для плотности вероятности (10) с гистограммами, полученными в численном эксперименте (рис. 4a), показавшее хорошее согласие последних.

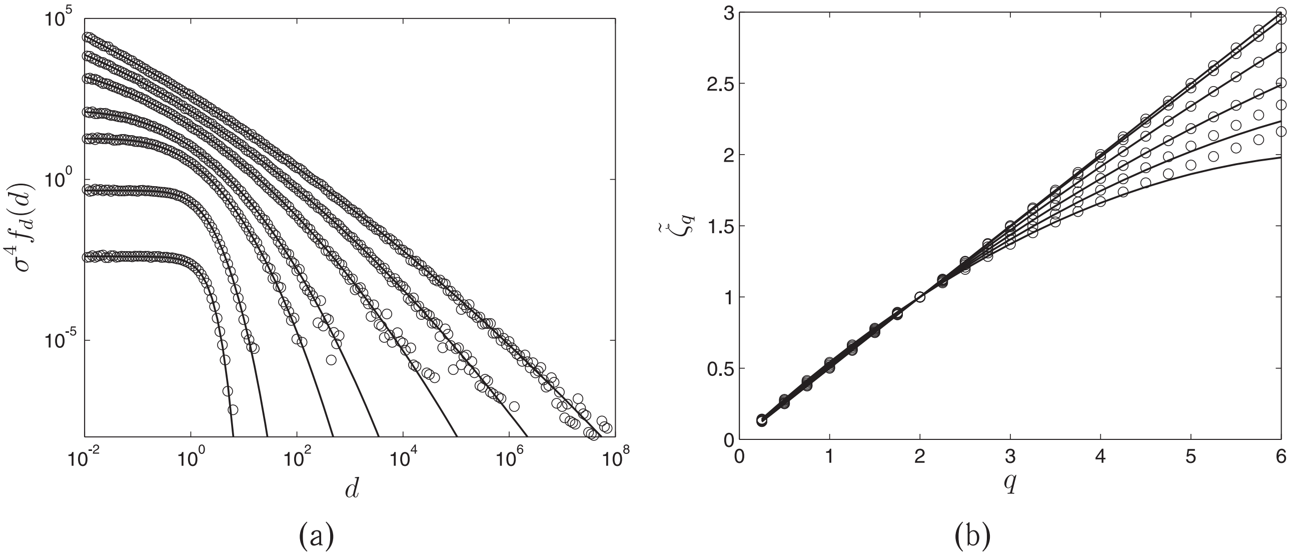


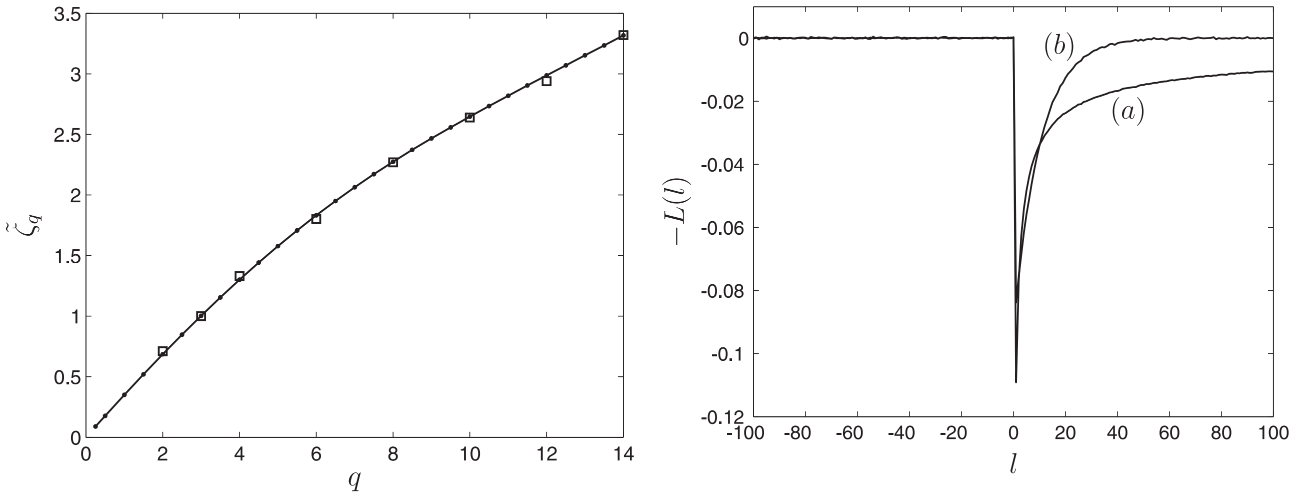
Рис. 4. **(a)** Графики плотностей вероятности $\sigma^4 f_d(d)$ приращений дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса для $\varphi = 0.01$ и $\sigma^2 = 0.1$; 1; 5; 10 25; 50; 100 (снизу–вверх), полученные из аналитического выражения (10) (сплошные линии) и из обработки результатов численного моделирования (кружки)
(b) Графики квазимультифрактальных спектров процесса X_n для $\varphi = 0.01$ и $\sigma^2 = 0.1$; 1; 5; 10; 15; 20, рассчитанных при помощи анализа реализаций процесса (кружки) и с использованием выражения (9) (сплошные линии)

В **разделе 3.5** приводятся анализ моментов приращений дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса на основе реализаций, полученных в численном моделировании. Результаты расчетов подтвердили существование двух монофрактальных асимптотик, а также продолжительного инерционного интервала, описанного аналитически во второй главе. Для расчета эффективных масштабных показателей в численном эксперименте использовался метод, используемый для анализа экспериментальных данных в гидродинамике, а именно — аппроксимация моментов приращений степенной зависимостью (1) на заданном интервале масштабов. Сравнение полученных результатов с результатами аналитических расчетов (рис. 4b) показало хорошую точность оценки мультифрактального спектра в большом диапазоне значений q для $\sigma^2 \lesssim 10$. Расхождение результатов при больших значений q для $\sigma^2 \gtrsim 20$ говорит о необходимости применения более точных методов оценки, например, таких как метод максимумов модулей вейвлет-преобразования. Результаты численных расчетов, подтвердившие наличие монофрактальной асимптотики локальных масштабных показателей при $l \to 0$ позволили также рассчитать фрактальную размерность реализаций диффузионного квазимультифрактального процесса $\dim_F(X(t)) = 3/2$, которая совпала с фрактальной реализацией винеровского процесса.

В **разделе 3.6** приведены краткие выводы по третьей главе.

В **четвертой главе** рассматриваются два расширения диффузионной квазимультифрактальной модели — модель обладающего аномально-диффузионными свойствами дробного квазимультифрактального процесса, предназначенная для количественного описания статистических свойств приращения скорости турбулентного потока жидкости, и самовозбуждающаяся мультифрактальная модель, обладающая явной обратной связью, характерной для последовательностей землетрясений, «афтершоков» и котировок акций на фондовых рынках.

В **разделе 4.1** рассматривается дробный квазимультифрактальный процесс, являющийся обобщением диффузионного процесса (2), где вместо дельта-коррелированного шума $\xi(t)$ используются обладающие дальними корреляциями приращения дробного броуновского движения $\xi_H(t;h) = B_H(t+h) - B_H(t)$. Также рассматривается дискретная модель процесса и обсуждаются вопросы численного моделирования. Показывается, что в силу гауссовости процесса $\xi_H(t;h)$ плотность вероятности приращений совпадет с выражением (10). В разделе выводится выражение для корреляционной функции приращений процесса, которая, в отличие от диффузионного квазимультифрактального процесса, обладает медленно спадающим хвостом, при этом приращения процесса положительно коррелированы при $H > 1/2$ и отрицательно при $H < 1/2$, характерными для исходного дробного броуновского процесса. Приводятся результаты численного моделирования реализаций процесса и анализируются моменты приращений, полученные на их основе. Показывается, что дробный квазимультифрактальный процесс обладает свойством расширенного самоподобия (Extended Self-Similarity, ESS), характерным для турбулентных потоков [20]. Согласно этому свойству моменты приращений $M_q(l)$ (в теории турбулентности — структурные функции) удовлетворяют соотношению $M_q(l) = M_p^{\zeta_q/\zeta_p}(l)$ на интервале масштабов, более широком, чем инерционный. Вычисляются мультифрактальные спектры процесса и проводится сравнение спектров процесса, полученных в рамках данной модели, с известными экспериментальными спектрами показателей структурной функции турбулентного потока жидкости (рис. 5а). В данном разделе приводится также аналитический вывод выражения для дисперсии приращений дробного квазимультифрактального процесса и показывается, что при $H > 1/2$ процесс обладает супердиффузионными свойствами, а при $H < 1/2$ — субдиффузионными.



(a) (b)

Рис. 5. (a) График полученного при помощи численного моделирования спектра дробного квазимультифрактального процесса X_n для $\varphi = 0.01$, $\sigma^2 = 4$ и $H = 0.31$ (сплошная линия) и полученных экспериментально показателей структурной функции турбулентного потока жидкости с числом Рейнольдса $R = 515$ [21] (квадраты)
(b) График функции $L(l)$ для самовозбуждающегося мультифрактального процесса (11) для $\sigma = 1$ и (a) степенного ядра $h_n = 0.05 \cdot n^{0.51}$ и (b) экспоненциального ядра $h_n = 0.04 \cdot \exp\{-0.04n\}$

В **разделе 4.2** рассматривается самовозбуждающаяся мультифрактальная модель в дискретном виде:

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} d_i, \qquad d_i = \sigma\xi_i \exp\left\{-\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{i-1} d_j h_{i-j-1}\right\}, \tag{11}$$

где ξ_i — «экзогенный» дискретный случайный процесс, который в финансовых приложениях может интерпретироваться как некоторый эффективный «поток новостей», а в геофизических — как амплитуды первичных толчков. Детерминированная последовательность h_i при этом представляет «эндогенное» ядро, отвечающее за память процесса. В разделе приводится также непрерывный аналог дискретного процесса (11) и показывается, что в отличие от квазимультифрактальной модели и модели мультифрактальных случайных блужданий, использование ядра $h(t)$, спадающего медленнее, чем $1/\sqrt{t}$ не лишает процесс физического смысла. Численное моделирование реализаций процесса (11) и рассмотрение его мультифрактальных спектров $\tilde{\zeta}_q$ показало также, что использование быстро спадающих ядер, например, экспоненциально спадающих ядер не разрушает мультифрактальные свойства. В разделе приводится анализ гистограмм, полученных из численного моделирования процесса (11), показывающий наличие у плотности вероятности приращений процесса промежуточной асимптотики $f_d(d) \sim d^{-\gamma}$ при $2\sigma \lesssim d \lesssim 20\sigma$ и тяжелого хвоста $f_d(d) \sim d^{-\alpha}\ln^{-\beta}$ при $200\sigma \lesssim d \lesssim 10^6\sigma$.

Рассмотрение корреляций приращений показало, что форма коэффициента ковариации совпадает с формой ядра h_n процесса. Отличительным свойством самовозбуждающегося мультифрактального процесса является возможность количественного описания в рамках модели упомянутого выше «эффекта рычага» (Leverage effect) — асимметрии корреляционной функции приращений процесса d_n и их абсолютных значений $|d_n|$. Данный эффект, играющий важную роль в финансовых приложениях, описывается количественно при помощи функции $L(l) = \left\langle d_n d_{n+l}^2 \right\rangle / \left[\left\langle d_n^2 \right\rangle\right]^{3/2}$. Было показано аналитически и подтверждено численным моделированием (рис. 5b), что для самовозбуждающегося мультифрактального процесса выполняется $L(l) = 0$ при $l < 0$ и $L(l) < 0$ при $l > 0$, причем вид функции $L(l)$ при $l > 0$ имеет тот же вид что и ядро h_n процесса (11) и соответствует результатам эмпирического анализа финансовых временных рядов [22].

В **разделе 4.3** приводятся выводы по четвертой главе и обсуждается вопрос моделирования «эффекта рычага» в диффузионной квазимультифрактальной модели и модели мультифрактальных случайных блужданий.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Основные результаты диссертационной работы

1. Предложены непрерывная и дискретная формы диффузионного квазимультифрактального процесса. Показано, что дисперсия приращений предлагаемого процесса растет по классическому линейному диффузионному закону.

2. Получены строгие выражения для высших моментов приращений диффузионного квазимультифрактального процесса. Показано наличие монофрактальных асимптотик последних на бесконечно малых и бесконечно больших масштабах, а также наличие инерционного интервала, внутри которого предложенный процесс обладает явно выраженными мультифрактальными свойствами. Изучена зависимость величины инерционного интервала от параметров диффузионного квазимультифрактального процесса.

3. Введены понятия локального и эффективного масштабных показателей. Изучена зависимость локальных показателей от параметров процесса. Получен мультифрактальный спектр предложенного процесса.

4. Получены универсальные выражения для коэффициента перемежаемости и мультифрактального спектра диффузионного квазимультифрактального процесса.

5. Построена численная схема моделирования дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса. Рассчитана фрактальная размерность реализаций процесса. На основе совместного анализа мультифрактальных спектров, коэффициентов перемежаемости и ансамблей реализаций выделено наличие трех различных режимов: слабо мультифрактального, умеренно мультифрактального и сильно мультифрактального.

6. Получено строгое выражение для плотности вероятности приращений диффузионного квазимультифрактального процесса. Обнаружена существенная негауссовость распределения и наличие тяжелых хвостов в умеренно мультифрактальном и сильно мультифрактальном режимах.

7. Построена модель дробного квазимультифрактального процесса. Изучены его диффузионные свойства. Показано, что дробный квазимультифрактальный процесс обладает свойством расширенного самоподобия. Проведено сравнение мультифрактальных спектров предложенного процесса с полученными экспериментально показателями структурной функции турбулентного потока жидкости.

8. Построена модель самовозбуждающегося мультифрактального процесса. Показано, что в отличие от квазимультифрактальных моделей и моделей мультифрактальных случайных блужданий, описываемый процесс не теряет физического смысла и сохраняет мультифрактальные свойства при использовании ядер, как быстрее, так и медленнее, чем степенное. Изучены плотности вероятности и корреляции предлагаемого процесса. Показано, что предлагаемая самовозбуждающаяся мультифрактальная модель количественно описывает «эффект рычага», характерный для финансовых временных рядов.

Список публикаций по теме диссертации

1. Саичев А. И., Филимонов В. А. О спектре диффузионного мультифрактального процесса // ЖЭТФ. 2007. Т. 132, № 5. С. 1235–1244.

2. Саичев А. И., Филимонов В. А. Изучение симметричного мультифрактального процесса // Вестник ННГУ – Радиофизика. 2007. Т. 3. С. 53–57.

3. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное моделирование диффузионного квазимультифрактального процесса // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 2. С. 381–389.

4. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное моделирование реализаций и спектры квазимультифрактального диффузионного процесса // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, № 9. С. 592–596.

5. Saichev A., Filimonov V. The Study of the Discrete Quasi-Multifractal Process // Proc. of the International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF'2009). AIP, 2009. P. 515–518.

6. Филимонов В. А. Моделирование симметричного мультифрактального процесса // Труды 13-й Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых. Таганрог: АСФ России, 2007. С. 576–577.

7. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное моделирование симметричного квазимультифрактального процесса // Труды 12-й научной конференции по радиофизике. 7 мая 2008 г / Под ред. проф. А. В. Якимова. Н. Новгород: 2008. С. 250–252.

8. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное исследование реализаций квазимультифрактального процесса // Технологии Microsoft в теории и практике программирования. Материалы конференции / Под ред. проф. Р. Г. Стронгина. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. С. 306–308.

9. Саичев А. И., Филимонов В. А. Дискретная модель симметричного квазимультифрактального процесса // 2-я всероссийская молодежная научно-инновационная школа «Математика и математическое моделирование». Тезисы докладов. Саров: Изд-во «Альфа», 2008. С. 14–15.

10. Саичев А. И., Филимонов В. А. Аналитический расчет спектра симметричного квазимультифрактального процесса // Тр. XIII нижегородской сессии молодых ученых. Естественнонаучные дисциплины: Тезисы докладов. Н. Новгород: Изд-во Гладкова О. В., 2008. С. 47–48.

11. Саичев А. И., Филимонов В. А. О применении метода циркулянтного встраивания для численного моделирования процессов с долгой памятью // Труды 13-й научной конференции по радиофизике. 7 мая 2009 г / Под ред. проф. А. В. Якимова. Н. Новгород: 2009. С. 210–212.

12. Саичев А. И., Филимонов В. А. К вопросу численного моделирования процессов с долгой памятью // Технологии Microsoft в теории и практике программирования. Материалы конференции / Под ред. проф. В. П. Гергеля. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. С. 385–387.

13. Филимонов В. А. Расчет фрактальной размерности реализаций квазимультифрактального процесса // 4-я всероссийская молодежная научно-инновационная школа «Математика и математическое моделирование». Тезисы докладов. Саров: Изд-во «Альфа», 2010. С. 20–22.

Цитированная в автореферате литература

1. Frisch U. Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, 1995.

2. Yakhot V. Probability densities in strong turbulence // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2006. Vol. 215, no. 2. P. 166–174.

3. Pandit R., Ray S., Mitra D. Dynamic multiscaling in turbulence // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. 2008. Vol. 64, no. 3. P. 463–469.

4. Lux T. The Markov-Switching Multifractal Model of Asset Returns // Journal of Business and Economic Statistics. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 194–210.

5. Calvet L. E., Fisher A. J. Multifractal Volatility: Theory, Forecasting, and Pricing. Academic Press, 2008.

6. Sornette D., Ouillon G. Multifractal Scaling of Thermally Activated Rupture Processes // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94, no. 3. P. 038501+.

7. Afraimovich V., Zaslavsky G. M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences // Physical Review E. 1997. Vol. 55, no. 5. P. 5418–5426.

8. Silchenko A., Hu C. K. Multifractal characterization of stochastic resonance // Physical Review E. 2001. Vol. 63, no. 4. P. 041105+.

9. Ivanov P. C., Amaral L. A., Goldberger A. L. et al. Multifractality in human heartbeat dynamics // Nature. 1999. Vol. 399, no. 6735. P. 461–465.

10. Ching E. S. C., Tsang Y. K. Multifractality and scale invariance in human heartbeat dynamics // Physical Review E. 2007. Vol. 76, no. 4.

11. Harte D. Multifractals: Theory and Applications. Chapman & Hall, 2001.

12. Sornette D. Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools. Second edition. Springer, 2006.

13. Mandelbrot B. B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // Journal of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 62, no. 2. P. 331–358.

14. Parisi G., Frisch U. On the singularity structure of fully developed turbulence // Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". 1985. P. 84–87.

15. Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1984. Vol. 17, no. 18. P. 3521–3531.

16. Muzy J. F., Bacry E. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws // Physical Review E. 2002. Vol. 66, no. 5. P. 056121+.

17. Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling In Finance. Springer, 1997.

18. Bacry E., Delour J., Muzy J. F. Multifractal random walk // Physical Review E. 2001. Vol. 64, no. 2. P. 026103+.

19. Saichev A., Sornette D. Generic multifractality in exponentials of long memory processes // Physical Review E. 2006. Vol. 74, no. 1. P. 011111+.

20. Benzi R., Ciliberto S., Baudet C. et al. Extended Self-Similarity in the Dissipation Range of Fully Developed Turbulence // Europhysics Letters. 1993. Vol. 24, no. 4. P. 275–279.

21. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E. J., Antonia R. A. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1984. Vol. 140. P. 63–89.

22. Bouchaud J.-P., Matacz A., Potters M. The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87, no. 22. P. 228701+.

Оглавление диссертации

Подписано в печать 29.04.2010 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100. Заказ № 306.

Типография Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского.
603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.