На правах рукописи

ФЕДОТКИН АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ ГНЕДЕНКО—КОВАЛЕНКО

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2010

Работа выполнена в Нижегородском госуниверситете им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент **Зорин Владимир Александрович**
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор **Ушаков Владимир Георгиевич**
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),
доктор технических наук, профессор **Федосенко Юрий Семенович**
(ФГОУ ВПО «Волжская государственная академия водного транспорта»)

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов (г. Москва)

Защита состоится «____» ______________ 2010 г. в ____ час.____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.13 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 2, конференц-зал ННГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского http://www.unn.ru. Отзывы на автореферат просьба направлять по адресу диссертационного совета Д 212.166.13.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.116.13
кандидат физико-математических наук, доцент В.П. Савельев

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Первые задачи теории массового обслуживания или теории очередей описаны на физическом уровне в 1907 г. Ф.В. Иоханнсеном и были успешно рассмотрены сотрудником Копенгагенской телефонной компании, датским математиком А.К. Эрлангом в период между 1908 и 1923 годами. Фундаментальные исследования в этой области, которые уже стали классическими, выполнены А.Н. Колмогоровым, А.Я. Хинчиным, Ф. Поллачеком, Б.В. Гнеденко, С.Н. Бернштейном, К. Пальмом, Д. Кендаллом, Л. Такачем, Ю.В. Прохоровым. Важные теоретические и практические результаты в теории массового обслуживания получены Г.П. Башариным, Ю.К. Беляевым, А.А. Боровковым, Н.П. Бусленко, О.В. Висковым, Н. Джейсуолом, В.М. Золотаревым, Л. Клейнроком, Г.П. Климовым, И.Н. Коваленко, Д.Р. Коксом, В.С. Королюком, А. Кофманом, Н. Прабху, Т.Л. Саати, Б.А. Севастьяновым, У.Д. Смитом, А.Д. Соловьевым и др.

В последнее время возрос интерес к теории массового обслуживания благодаря ее многочисленным приложениям к анализу и организации работы: 1) реальных компьютерных и коммутационных сетей; 2) информационно-вычислительных систем; 3) автоматизированных систем управления; 4) различных транспортных систем и т. д. Сети массового обслуживания служат, как правило, адекватными моделями для такого рода систем. Каждая сеть массового обслуживания включает несколько связанных между собой узлов (систем массового обслуживания). Поэтому при рассмотрении конкретной сети массового обслуживания всегда необходимо изучить вероятностные свойства выходного потока одного узла (одной системы обслуживания), который затем будет входным потоком для следующего узла (другой системы обслуживания).

Первые исследования по теории выходных потоков появились в середине XX века и связаны с публикациями П.Дж. Берка (P.J. Burk), Дж.В. Коэна (J.W. Cohen), Е. Рейча (E. Reich) и П.Д. Финча (P.D. Finch). Результаты этих авторов касались в основном простейших систем: рассматривались одноканальные системы обслуживания с неограниченной очередью, входные потоки полагались пуассоновскими, обслуживание требований осуществлялось по показательному закону. В нашей стране выходными потоками, но уже с некоторыми усложнениями вероятностной структуры входного потока, дисциплины формирования очереди и механизма обслуживания, в разное время занимались Б.В. Гнеденко, И.И. Ежов, И.Н. Коваленко, М.А. Федоткин, Г.Ш. Цициашвили и др. Дальнейшие исследования выходного потока для систем, которые незначительно отличаются от классического случая, не приводили к сколько-нибудь существенным результатам. Отсюда и возникла известная в литературе проблема выходного потока. Поэтому имеет большое значение и актуально получение как новых, так и нетрадиционных теоретических и практических результатов в этой области.

Цель работы. В диссертационной работе рассматриваются неклассические системы массового обслуживания с ожиданием, в которых осуществляется управление m конфликтными потоками Гнеденко—Коваленко в классе циклических алгоритмов. Основной целью диссертационной работы является разработка и исследование математических моделей входных и выходных процессов конфликтных систем обслуживания с переменной структурой. Наряду с решением проблемы выходных потоков особое внимание уделяется использованию полученных теоретических результатов для создания компьютерной имитационной модели управляемых систем обслуживания с целью их оптимизации.

Методы исследования. Построение моделей выходных потоков и проведенные исследования опираются на теорию управляемых конфликтных систем обслуживания с переменной структурой, теорию векторных управляемых марковских последовательностей со счетным фазовым состоянием, на эргодическую теорию марковских цепей. В работе так же используются методы функционального анализа, теории систем линейных дифференциальных уравнений, теории систем линейных алгебраических уравнений, теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы являются новыми и могут быть сформулированы следующим образом: 1) предложен простой механизм динамики образования неординарных потоков требований и, тем самым, дано обоснование использования потока Гнеденко—Коваленко для адекватного описания процесса транспортного движения на автомагистрали с учетом его пространственных и временных характеристик; 2) поставлена и решена задача нелокального описания выходных потоков в циклических системах управления потоками Гнеденко—Коваленко; 3) разработан итеративно-мажорантный метод изучения особенностей и эргодических свойств систем управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов; 4) создан специальный метод определения квазиоптимальных параметров циклического управления конфликтными потоками Гнеденко—Коваленко по условию минимума среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольного требования в стационарном режиме.

Основные результаты, которые выносятся на защиту. Наиболее существенные результаты, защищаемые в работе, являются: *a*) способ описания потоков неоднородных требований; *b*) метод построения математической модели выходного процесса циклической системы управления конфликтными потоками; *c*) метод исследования арифметических и предельных свойств векторных управляемых марковских последовательностей, которые являются математическими моделями выходных потоков; *d*) метод получения простых формул стационарного распределения для состояний системы обслуживания; *e*) методику решения задачи оптимизации с использованием теоретических результатов и средств имитационного компьютерного моделирования.

Теоретическая и практическая ценность. Научная значимость работы заключается в разработке единого подхода к построению и анализу математической модели выходных процессов в циклических системах управления конфликтными потоками требований. Этот подход важен для дальнейших исследований в области изучения выходных потоков более сложных управляющих систем обслуживания, например, для систем адаптивного управления конфликтными потоками Бартлетта. Теоретические исследования этой работы были инициированы необходимостью адекватного описания выходных процессов функционирования локальных компьютерных сетей, сетей связи и передачи данных, информационно-вычислительных сетей, транспортных сетей, производственных сетей и т. п. Практическая значимость результатов работы состоит в том, что для такого класса управляемых систем обслуживания установлены не только легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования стационарного режима, но и получены в явном виде аналитические формулы стационарных распределений вероятностей состояний. Это обстоятельство очень важно как для определения ограничений на исходные данные системы, так и для эффективного решения задачи оптимизации ее выходных характеристик.

Научные результаты работы используются при чтении специальных курсов для студентов, специализирующихся по кафедре прикладной теории вероятностей и по кафедре численного и функционального анализа ННГУ. Разработанный в работе программный комплекс имитационной модели может применяться для определения численных оценок характеристик выходных потоков реальных систем, например, для расчета квазиоптимальных длительностей фаз светофоров, регулирующих транспортное движение в классе простейших алгоритмов с фиксированным ритмом переключения.

Данная работа была выполнена на факультете вычислительной математики и кибернетики ННГУ и в НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ в рамках следующих госбюджетных НИР: “Математическое моделирование, оптимизация и разработка информационных технологий” (номер госрегистрации 01.2.00 1 07703), “Синтез и сложность алгоритмов для задач конфликтного обслуживания и диагностики” (номер госрегистрации 01.2.00 1 00352), “Математическое моделирование и создание новых методов анализа динамических систем и систем оптимизации” (номер государственной регистрации 01.2.00 1 07703), “Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций” (номер госрегистрации 01.2.00 6 02598).

Публикации и личный вклад автора. Результаты по теме диссертации автором опубликованы в [1—11], в том числе 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Постановка задачи и основные методы исследования принадлежат соавтору в пяти совместно опубликованных работах и научному руководителю. Вывод формул для числовых характеристик потока Гнеденко—Коваленко в [4] принадлежит соавтору. Вкладом диссертанта являются: а) формулировка и доказательства утверждений; б) теоретические расчеты и вывод формул для распределений и их числовых характеристик стационарного режима; в) получение оценки для загрузки системы по потокам; г) компьютерная реализация имитационной модели; д) разработка и обоснование методики исследования имитационной модели с целью определения квазиоптимальных параметров циклического управления потоками требований; е) интерпретация результатов исследований на имитационной модели.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы были представлены на Международной конференции «Модели долговечности, старения, и деградации в теории надежности, здравоохранения, медицине и биологии» (Санкт-Петербург, СПбГПУ, 2004 г.), на VI Международном конгрессе по математическому моделированию (Нижний Новгород, ННГУ, 2004 г.), на VI Международной конференции «MMR 2009 — Математические методы в теории надежности: Теория. Методы. Приложения» (Москва, РУДН, 2009 г.), на X Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 2010 г.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, численных результатов имитационного моделирования в виде таблиц и графиков и заключения. Список цитированной литературы включает 158 наименований на 12 страницах. Объем текста работы составляет 150 страниц.

2. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обзор литературы по изучаемому вопросу и краткую характеристику работы с указанием цели, методики исследований и основных научных результатов. Приведены также сведения об апробации и практическом использовании результатов.

В первой главе предложен способ описания потоков неоднородных требований. Эффективность такого подхода показывается на примере построения вероятностной модели пространственного движения машин по свободной от перекрестков магистрали. При удовлетворительном состоянии дорожного полотна и хороших метеорологических условиях движение неоднородных автомобилей по магистрали может оказаться беспрепятственным и пуассоновским. При плохих погодных условиях (туман, снег, гололед и т. д.) обгон быстрыми машинами медленных является уже рискованным, зависимым и занимает значительное время. В этом случае на интенсивных магистралях будут возникать автоколонны (группы) машин или транспортные пачки. Обозначим через $\eta_0(t)$ случайное число быстрых машин, которые поступают по закону Пуассона с параметром λ_0 в транспортную пачку за промежуток времени $[0, t)$. При этом случайная величина $æ_0(t)$ измеряет число всех типов машин в транспортной пачке в момент времени $t \geq 0$, размер которой всегда не превышает постоянной величины $N > 1$. Пусть $\xi_0(t, \Delta t)$ есть случайное число быстрых машин, которые совершают обгон медленной машины за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$.

Естественно предположить, что при малых $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, которые порождаются случайной величиной $\xi_0(t, \Delta t)$, определяются соотношениями: $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 | æ_0(t) = 1, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = 1$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 | æ_0(t) = 1, \eta_0(t, \Delta t) = 1) = 1 - O(\Delta t)$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 | æ_0(t) = 2, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = 1 - \mu_{1,0}\Delta t + o(\Delta t)$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 | æ_0(t) = 2, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = \mu_{1,0}\Delta t - o(\Delta t)$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 | æ_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = 1 - \mu_{2,0}\Delta t + o(\Delta t)$; $\mu_{2,0}\Delta t - o(\Delta t) = \mathbf{P}(\xi_0(t,\Delta t) = 1 | æ_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = 0)$ для всех $3 \leq k \leq N - 1$; и, наконец, $1 - \mu_{2,0}\Delta t + o(\Delta t) = \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 | æ_0(t) = N, \eta_0(t, \Delta t) = 0)$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 | æ_0(t) = N, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = \mu_{2,0}\Delta t - o(\Delta t)$; $\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 | æ_0(t) = N, \eta_0(t, \Delta t) = 1) = 1$. Таким способом моделируется механизм обгона, и зависимость среднего времени обгона от числа машин в транспортной пачке. Параметры $\mu_{1,0}$ и $\mu_{2,0}$ будем называть интенсивностями обгона. При любых фиксированных $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \ldots, N$ обозначим через функцию $Q(t, k)$ вероятность $\mathbf{P}(æ_0(t) = k)$. Принятый механизм обгона позволяет получить для функций $Q(t, k)$ дифференциальные уравнения

$$dQ(t, 1)/dt = -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_{1,0}Q(t, 2),\ dQ(t, 2)/dt = \lambda_0 Q(t, 1) - (\lambda_0 + \mu_{1,0})Q(t, 2) + \mu_{2,0}Q(t, 3),$$
$$dQ(t, k)/\Delta t = \lambda_0 Q(t, k - 1) - (\lambda_0 + \mu_{2,0})Q(t, k) + \mu_{2,0}Q(t, k + 1),\ k = 3, 4, \ldots, N - 1,$$
$$dQ(t, N)/dt = \lambda_0 Q(t, N - 1) - \mu_{2,0}Q(t, N),$$

которые определяют динамику распределения числа $æ_0(t)$ машин в транспортной пачке.

В первой главе рассмотрен весьма важный для практики частный случай, когда интенсивность λ_0 поступления быстрых машин в транспортную пачку существенно меньше как интенсивности $\mu_{1,0}$ обгона, так и интенсивности λ медленных машин. В этом случае можно допустить, что $æ_0(t) \leq 2$. Изучены эргодические свойства случайного процесса $\{æ_0(t)\colon t \geq 0\}$, например, получены предельные равенства: $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t, 1) = \mu_{1,0}(\lambda_0 + \mu_{1,0})^{-1} = p$, $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t, 2) = \lambda_0(\lambda_0 + \mu_{1,0})^{-1} = q$. Получены условия, при которых транспортный поток неоднородных машин с учетом пространственной и временной характеристик можно описать потоком Гнеденко—Коваленко, т. е. стационарным потоком без последействия, когда в любой вызывающий момент случайным образом поступает не более двух заявок.

Теорема 1. Пусть $\eta(t)$ — число всех типов машин, которые пересекают некоторую поперечную линию автомагистрали за промежуток $[0, t)$. Тогда вероятности $\mathbf{P}(\eta(t) = k) =$ $= \exp\{-\lambda t\} \sum_{i=0}^{[k/2]} C_{k-i}^{i} p^{k-2i} q^{i} \dfrac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!}$, $t \geq 0$, $k \geq 0$, определяют одномерные распределения потока Гнеденко—Коваленко с параметрами λ пуассоновского прибытия медленных машин и $p = \mu_{1,0}(\lambda_0 + \mu_{1,0})^{-1}$, где $q = 1 - p$ есть вероятность поступления сразу двух заявок.

Лемма 1. Пусть λ_j и p_j являются параметрами исходного потока Гнеденко—Коваленко с номером $j = \overline{1, m}$. Тогда сумма m независимых такого типа потоков будет потоком Гнеденко—Коваленко с параметрами $\lambda = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j$ и $p = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j p_j$.

Получены в явном виде формулы для вычисления таких основных числовых характеристик потока Гнеденко—Коваленко, как математического ожидания, дисперсии, начальных и центральных моментов, коэффициента асимметрии и эксцесса.

В последнем разделе этой главы рассмотрен метод нелокального описания потока неоднородных требований. При $i = 1, 2, \ldots$ обозначим через τ'_i момент i-го появления в систему требования с номером i. Последовательности $\{\tau'_i;\ i \geq 1\}$ взаимно однозначно соответствует считающий случайный процесс $\{\eta(t)\colon t \geq 0\}$, в котором $\eta(t)$ определяет случайное число неоднородных требований, поступающих в систему за промежуток $[0, t)$. Как правило, случайные интервалы $\tau'_{i+1} - \tau'_i$, $i \geq 1$, являются зависимыми и имеют различные функции распределения. В этом случае практически не удается определить конечномерные распределения считающего случайного процесса $\{\eta(t)\colon t \geq 0\}$.

В работе рассматривается именно такая сложная ситуация. Строится последовательность случайных точек τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ на оси времени с помощью выбора функциональной зависимости каждого элемента τ_i от моментов τ'_i, $i \geq 1$. На содержательном уровне это означает, что происходит разбиение потока $\{\tau'_i;\ i \geq 1\}$ моментами τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ с целью более простого его описания. Тогда нелокальное описание входного потока представляется в виде векторной случайной последовательности $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$, где случайная величина η_i задает число поступивших заявок за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Предложены и изучены четыре способа разбиения потока $\{\tau'_i;\ i \geq 1\}$ или получения маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$. Для примера рассмотрим четвертый способ разбиения $\{\tau'_i;\ i \geq 1\}$.

Пусть при фиксированном $c = 0,1,\ldots$ моменты $\tau_i^{(c)}$, $i \geq 0$, на оси времени $[0, \infty)$ совпадают с некоторыми моментами τ'_i, $i \geq 1$ поступления требований в систему. Другими словами, моменты $\tau_i^{(c)}$, $i \geq 0$, совпадают с некоторыми точками разрыва исходного считающего случайного процесса $\{\eta(t)\colon t \ge 0\}$, т. е. $\tau_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,i}}$, $k_{c,\,i} \in \{1, 2, \ldots\}$. Тогда при каждом $c \ge 0$ величина $\eta_i^{(c)} = k_{c,\,i+1} - k_{c,\,i}$ задает число поступивших требований на промежутке $[\tau_i^{(c)}, \tau_{i+1}^{(c)})$ первоначального потока и является величиной i-ой группы виртуального потока $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \ge 0\}$. Величина $\delta_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,\,i+1}} - \tau'_{k_{c,\,i+1}-1}$ определяет временной интервал между последовательными группами с номерами i и $i+1$ исходного входного потока $\{\eta(t)\colon t \ge 0\}$ при его нелокальном описании в виде векторной последовательности $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \ge 0\}$. Тогда при каждом фиксированном $c \ge 0$ элементы $\tau_i^{(c)}$, $i \ge 0$, потока $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \ge 0\}$ будем строить с помощью рекуррентных соотношений вида:

$$k_{0,\,i+1} = \inf\,\{k\colon\ \ k > k_{0,\,i},\ \ \tau'_k - \tau'_{k-1} \ge h_0\},$$

$$s_c = \inf\{k\colon k \ge 0,\ \ \eta_k^{(c)} \le d,\ \ \eta_{k+1}^{(c)} \le d,\ \ \delta_k^{(c)} < h_1, \eta_k^{(c)} = \eta_{k-1}^{(c)}\},$$

$$\tau_i^{(c+1)} = \begin{cases} \tau_i^{(c)} & \text{при } i \le s_c, \\ \tau_{i+1}^{(c)} & \text{при } i > s_c. \end{cases}$$

В этих формулах $\eta_{-1}^{(c)} = 1$ при каждом $c \ge 0$, $k_{0,0} = 1$, d — некоторое натуральное число, и постоянные величины h_0, h_1, удовлетворяют условию $h_0 < h_1$. Подбирая соответствующим образом параметры h_0, h_1, d разбиения, как правило, удается построить последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i;\ i \ge 0\}$ и $\{\eta_i;\ i \ge 0\}$, каждая из которых составлена из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Разработан комплекс компьютерных программ, который позволяет не только проверить выдвинутые теоретические предположения нелокального описания, но и применить предложенные формальные методы статистического анализа входного потока неоднородных требований к обработке данных наблюдений за реальными потоками.

Метод нелокального описания проиллюстрирован на примере потока машин, который реально наблюдал Бартлетт вблизи Лондона в 1963 г. Исследования статистических данных Бартлетта, которые приведены в виде конечной реализации последовательности $\{\tau'_{i+1} - \tau'_i;\ i \ge 1\}$ из интервалов, позволяют определить конечную реализацию последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i;\ i \ge 0\}$, и сделать следующий вывод. Во-первых, последовательность $\{\tau_{i+1} - \tau_i;\ i \ge 0\}$ составлена из независимых случайных величин, каждая из которых имеет смещенное экспоненциальное распределение $\mathbf{P}(\tau_{i+1} - \tau_i < t) = 1 - \exp\{-(t-h)/\sigma\}$, $t > h$ с параметром смещения $h = 0{,}0006$ и параметром масштаба $\sigma = 23{,}9312$. Во-вторых, последовательность $\{\eta_i;\ i \ge 0\}$ составлена из независимых случайных величин, каждая из которых распределена по закону Бернулли с параметром p, т. е. принимает значение единица с вероятностью $p = 441/841$ или значение два с вероятностью $q = 400/841$. Так как параметр смещения h приближенно равен нулю, то наблюдаемый Бартллетом вблизи Лондона транспортный поток можно нелокально описывать потоком Гнеденко—Коваленко.

Во второй главе решена задача построения и анализа математической модели выходных процессов в системах массового обслуживания при управлении m конфликтными независимыми потоками $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, …, $\overline{\Pi}_m$ Гнеденко—Коваленко в классе циклических алгоритмов с переналадками. На содержательном уровне конфликтность входных потоков $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, …, $\overline{\Pi}_m$ означает, что обслуживание различных потоков должно происходить в непересекающиеся промежутки времени и, более того, указанные промежутки должны быть разделены промежутками, в которые запрещается обслуживание требований каких-либо потоков. Общая схема таких управляемых систем массового обслуживания с переменной структурой приведена на рис. 1.

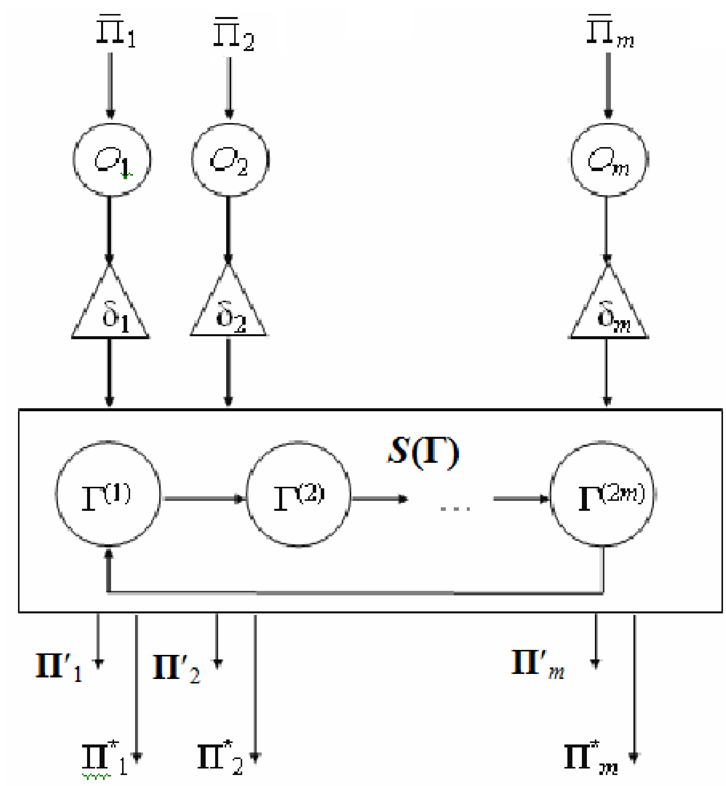

Рис. 1

На этой схеме исходными составляющими элементами являются: 1) входные потоки $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, …, $\overline{\Pi}_m$; 2) стратегии δ_1, δ_2, …., δ_m механизмов обслуживания требований из неограниченных накопителей очередей O_1, O_2, …, O_m по потокам соответственно; 3) структура $S(\Gamma)$ обслуживающего устройства, которая включает набор $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, …, $\Gamma^{(2m)}$ его состояний и циклический алгоритм смены этих состояний; 4) потоки насыщения Π^*_1, Π^*_2, … , Π^*_m (выходные потоки системы при максимальной загруженности системы и ее эффективном функционировании). Основными искомыми составляющими элементами системы являются выходные потоки $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$.

Пусть вызывающие моменты потока $\overline{\Pi}_j$ с номером $j = \overline{1,m}$ представляют собой пуассоновский процесс с параметром λ_j, и в каждый из этих моментов появляется одна заявка с вероятностью p_j или появляются две заявки с вероятностью $q_j = 1 - p_j$. Из рис. 1 видно, что обслуживающее устройство меняет свои состояния согласно периодической последовательности вида: $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ \ldots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)}, \ldots$ При этом для любого $s = \overline{1,2m}$ в состоянии $\Gamma^{(s)}$ обслуживающее устройство находится $T_s > 0$ единиц времени. Будем полагать, что для каждого фиксированного $j = \overline{1,m}$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ в течение времени T_{2j-1} происходит акт обслуживания только требований потока $\overline{\Pi}_j$ и в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ в течение времени T_{2j} потоки не обслуживаются. На оси времени выберем момент $\tau_0 > 0$. В этот момент случайным образом включаем одно из состояний обслуживающего устройства. Тогда на оси времени получим случайную последовательность $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ из моментов окончаний переключений состояний обслуживающего устройства.

При $j = \overline{1,m}$, $X = \{0, 1, \ldots\}$ и $i \in X$ введем следующие случайные величины и элементы: *a*) $\eta_{j,i}$ — случайное число заявок потока $\overline{\Pi}_j$, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\eta_{j,i} \in X$; *b*) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число заявок потока $\overline{\Pi}_j$, которые система может обслужить на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\xi_{j,i} \in \{0, l_j\}$ и l_j есть заданное натуральное число; *c*) Γ_i — состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$; *d*) $æ_{j,i}$ — число требований потока $\overline{\Pi}_j$, находящихся в системе в момент τ_i, где $æ_{j,i} \in X$; *e*) $\xi'_{j,i}$ — число заявок потока $\overline{\Pi}_j$, которые в действительности покидают систему на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$; *f*) $\xi'_{j,-1}$ — число заявок потока $\overline{\Pi}_j$, которые реально покидают систему на промежутке $[0, \tau_0)$, где $\xi'_{j,-1} \in Y_j$.

По величине $æ_{j,i}$ очереди в накопителе O_j, входному потоку $\overline{\Pi}_j$ и потоку насыщения Π^*_j требования из этого накопителя в порядке поступления отбираются на обслуживание в соответствии с экстремальной стратегией δ_j, т. е. имеет место соотношение вида $\xi'_{j,i} = \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}$ для $j = \overline{1,m}$ и $i \in X$. Для случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ установлено фундаментальное рекуррентное по $i \in X$ соотношение $(\Gamma_{i+1}, æ_{j,i+1}, \xi'_{j,i}) = (u(\Gamma_i), \max\{0, æ_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\})$, в котором функция $u(\Gamma^{(s)})$ принимает значение $\Gamma^{(s+1)}$ при $s \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}$ и значение $\Gamma^{(1)}$ при $s = 2m$. Заметим, что первая компонента этой последовательности определяет динамику состояний обслуживающего устройства, вторая компонента задает флуктуацию длины очереди по потоку $\overline{\Pi}_j$ и третья компонента отвечает за выходной поток Π'_j. В нелокальное описание $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \geq 0\}$ выходного потока включены описания таких важных характеристик системы, как функционирование состояний обслуживающего устройства и изменение длины очереди. Первые две компоненты последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});$ $i \geq 0\}$ играют роль меток. Так как время $T_s > 0$ пребывания обслуживающего устройства в каждом состоянии $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$ можно выбирать, то математической моделью процесса обслуживания по потоку $\overline{\Pi}_j$ является управляемая случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Обозначим теперь условную вероятность $\mathbf{P}(\eta_{j,i} = n|\Gamma_i = \Gamma^{(s)})$ через $\varphi_j(n; T_s)$, где функция $\varphi_j(n; t) = e^{-\lambda_j t} \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k p_j^{\,n-2k} q_j^{\,k} \frac{(\lambda_j t)^{n-k}}{(n-k)!}$, $n \in X$, $t > 0$, и вероятность $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(s)}, æ_{j,i} = x, \xi'_{j,i-1} = y)$ через $\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s)}, x, y)$ для любых $j = \overline{1,m}$, $i \in X$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x \in X$ и $y \in Y_j$. В силу периодической смены состояний обслуживающего устройства естественно допустить, что $\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}$, $\Gamma^{(2m+1)} \equiv \Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2m+2)} \equiv \Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(2m+3)} \equiv \Gamma^{(3)}$, ..., $\Gamma^{(4m-2)} \equiv$ $\equiv \Gamma^{(2m-2)}$ и $T_0 \equiv T_{2m}$, $T_{2m+1} \equiv T_1$, $T_{2m+2} \equiv T_2$, $T_{2m+3} \equiv T_3$, ..., $T_{4m-2} \equiv T_{2m-2}$. Основные результаты доказаны в следующих утверждениях.

Лемма 3. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, æ_{j,0}, \xi'_{j,-1})$ векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ является управляемой однородной марковской цепью со счетным числом состояний.

Теорема 3. Пусть условное распределение $\mathbf{P}(\xi_{j,i} = b|\Gamma_i = \Gamma^{(s)})$ случайной величины $\xi_{j,i}$ равно единице при $b = l_j$ и $\Gamma^{(s)} = \Gamma^{(2j-1)}$ или при $b = 0$ и $\Gamma^{(s)} \in \Gamma \setminus \Gamma^{(2j-1)}$, и равно нулю в остальных случаях. Тогда для одномерных распределений векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 1, 2, \ldots\}$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y - v; T_{2j-1}),$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(x + l_j - v; T_{2j-1}),$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) = \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\varphi_j(x; T_{2j}) + \sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j)\varphi_j(x - v; T_{2j}),$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)}, x, 0) = \sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)}, v, 0)\varphi_j(x - v; T_{r-1}),$$

где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}$, $x \in X$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j - 1\}$.

Теорема 4. При любых $j=\overline{1,m}$, $i \ge 1$, $|z| \le 1$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$ для производящих функций $\mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)z^x$, $\mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0)z^x$, $\mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(r)}, z, 0) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(r)}, x, 0)z^x$, которые соответствуют одномерным распределениям выходного потока Π'_j, выполняются рекуррентные по i соотношения

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = z^{-l_j}\mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0)\Psi_j(T_{2j-1}, z) -$$

$$- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1}),$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = \mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\, \Psi_j(T_{2j}, z) + \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\, \Psi_j(T_{2j}, z),$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)}, z, 0) = \mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)}, z, 0)\Psi_j(T_{r-1}, z),$$

где $\Psi_j(T_s, z) = \exp\{\lambda_j T_s(p_j z + q_j z^2 - 1)\}$ и $T_s = T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$.

Теорема 5. При $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$ и $|z| \le 1$ для производящих функций $\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$ выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\mathbf{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) +$$

$$+ z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\} \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) -$$

$$- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1}),$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\mathbf{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) + \Psi_j(T_{2j}, z) \times$$

$$\times \Big[\sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1})\Big],$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0) = z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\mathbf{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0) -$$

$$- z^{-l_j}\Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j-1}, z) \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1}) +$$

$$+ \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j-1}, z) \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\Psi_j(T_{2j}, z),$$

где $s = r - 2j - 1$, если $r > 2j + 1$, или $s = r + 2m - 2j - 1$, если $r < 2j$.

В третьей главе изучаются арифметические и предельные свойства одномерных распределений выходных потоков рассматриваемой управляемой системы обслуживания с переменной структурой. Используя полученные во второй главе рекуррентные соотношения для одномерных распределений выходных потоков, проведена классификация по Колмогорову пространства состояний каждого из m выходных потоков системы. При $j=\overline{1,m}$ и $\Gamma^{(s)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}\}$ введем теперь такие обозначения: $E_j(\Gamma^{(s)}) = \{(\Gamma^{(s)}, x, 0)\colon x \in X\}$, $E_j(\Gamma^{(2j)}) = \{(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)\colon x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\colon y = 0, 1, \ldots, l_j - 1\}$ и $E_j = \bigcup\limits_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$.

Теорема 6. Пространство $\Gamma \times X \times Y_j$ состояний управляемой векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \text{æ}_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ разбивается на незамкнутое подмножество $D_j = \{(\Gamma^{(r)}, x, y)\colon \Gamma^{(r)} \in \Gamma \setminus \Gamma^{(2j)}, x \in X,\ y=\overline{1,l_j}\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, x, y)\colon x > 0, y = 0, 1, \ldots, l_j - 1\}$ несущественных состояний и на единственное замкнутое подмножество E_j существенных периодических состояний с периодом $2m$.

В этой главе получены легко проверяемые ограничения на параметры входных потоков, потоков насыщения и на параметры циклического алгоритма изменения состояний обслуживающего устройства, при которых в системе обслуживания существует стационарное движение и не происходит неограниченное увеличение размера очереди по каждому из потоков. Итеративно-мажорантным методом доказываются следующие теоремы.

Теорема 7. Для существования единственного стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \text{æ}_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ необходимо выполнение следующего неравенства $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$.

Теорема 8. Для существования единственного стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \text{æ}_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ достаточно выполнение неравенства вида $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$.

Интересно отметить, что если рассматривать векторную последовательность вида $\{(\Gamma_i, \boldsymbol{\text{æ}}_i, \boldsymbol{\xi}'_{i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$, где случайный вектор $\boldsymbol{\text{æ}}_i = (\text{æ}_{1,i}, \text{æ}_{2,i}, \ldots, \text{æ}_{m,i})$ и случайный вектор $\boldsymbol{\xi}'_{i-1} = (\xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}, \ldots, \xi'_{m,i-1})$, то имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. Для существования стационарного распределения управляемой марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \boldsymbol{\text{æ}}_i, \boldsymbol{\xi}'_{i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенств $\lambda_j T(1+q_j) - l_j < 0,\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Из теорем 8 и 9 следует, что в рассматриваемой модели возможно существование стационарного распределения как для отдельного потока $\overline{\Pi}_j$, так и во всей системе. Это обстоятельство зависит от выполнения неравенства $\lambda_j T(1+q_j) - l_j < 0$ только лишь для потока $\overline{\Pi}_j$ при каком-либо значении j, или от выполнения всех неравенств $\lambda_j T(1+q_j) - l_j < 0$, $j=\overline{1,m}$. Более того, этот факт является следствием независимости входных потоков, потоков насыщения и циклической смены состояний обслуживающего устройства или автомата-светофора для конкретной задачи об управлении транспортом на перекрестке. Аналогичный вопрос постоянно рассматривается в классической теории сетей массового обслуживания, когда в некоторых случаях сеть удобно представить в виде m независимо функционирующих систем массового обслуживания. При этом каждая из m таких виртуально функционирующих систем массового обслуживания как бы моделирует работу конкретного узла сети в стационарном режиме. Это дает возможность представить стационарное распределение векторного случайного процесса, который определяет флуктуацию количества заявок по всем узлам сети, в мультипликативном виде. Однако в общем случае компоненты указанного векторного случайного процесса могут оказаться зависимыми и принцип мультипликативности уже не выполняется.

В нашей задаче мы имеем дело с другой ситуацией, а именно, очереди требований в накопителях возникают в результате обслуживания m конфликтных потоков одним обслуживающим устройством, а не в результате последовательного обслуживания требований через сеть узлов. Здесь удается независимо изучить реальный процесс обслуживания и управления по каждому потоку и численно решить задачу оптимизации. Доказательство возможности представления стационарного распределения векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \boldsymbol{æ}_i, \boldsymbol{\xi}'_{i-1}); i \ge 0\}$ в мультипликативном виде представляет значительные трудности, хотя бы в чисто техническом плане. Более того, даже получение стационарного распределения каждой последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ связано с выполнением большого объема вычислений. Заметим, что последовательности $\{(æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \ge 0\}$ и $\{(\boldsymbol{æ}_i, \boldsymbol{\xi}'_{i-1}); i \ge 0\}$, где $j=\overline{1,m}$, не являются марковскими. Ясно, что рассмотрение задачи управления конфликтными потоками неоднородных требований на сети узлов уже вызывает значительные трудности как теоретического, так и вычислительного характера.

В заключительной части третьей главы предложен алгебраический метод вычисления стационарных вероятностей состояний системы. Метод позволяет получить для стационарного режима формулы для математического ожидания величины очереди по каждому потоку, которые являются аналогом известной формулы Поллачека—Хинчина.

Лемма 5. Случайная последовательность $\{\Gamma_i; i \ge 0\}$ является марковской с конечным числом состояний из множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$ и с периодом $2m$.

Из этой леммы непосредственно следует, что для случая стационарного функционирования системы обслуживания справедливо равенство $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = 1/2m$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$.

Для вычисления стационарного распределения управляемой векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ имеет большое значение лемма 6.

Лемма 6. Пусть $\lambda_j T\,(1+q_j) - l_j < 0$ и δ — достаточно малое положительное число. Тогда внутри круга $\{z\colon |z| \leq 1+\delta\}$ существует l_j различных корней $z_0 = 1, z_1, \ldots z_{l_j-1}$ уравнения $(z^{l_j} - \Psi_j(T, z)) = 0$, где производящая функция $\Psi_j(T, z) = \exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}$.

Теорема 10. При $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$ стационарные вероятности $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(s)}, 0, 0)$ векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ вычисляются по формулам:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = (1-\exp\{-\lambda_j T\})^{-1}\exp\{-\lambda_j T\}\sum_{y=1}^{l_j}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+r)}, 0, 0) = (1-\exp\{-\lambda_j T\})^{-1}\exp\{-\lambda_j(T_{2j}+T_{2j+1}+\ldots+T_{2j+r-1})\}\sum_{y=1}^{l_j}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

где $r = \overline{1, 2m-1}$.

Теорема 11. Пусть $\lambda_j T(1+q_j) - l_j < 0$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $y \in Y_j$ и $|z| \leq 1$, то производящие функции $\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(s)}, z, y) = \sum_{x=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(s)}, x, y)z^x$ для стационарной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ определяются следующими равенствами:

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1}\sum_{w=0}^{l_j-1}(\Psi_j(T, z) - z^w)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(r)}, z, 0) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1}\Psi_j(T_{r-1}, z)\Psi_j(T_{r-2}, z)\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j}, z)\times$$

$$\times\sum_{w=0}^{l_j-1}(z^{l_j} - z^w)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w), \text{ где } \Gamma^{(r)} \in \Gamma \setminus \Gamma^{(2j)}.$$

Теорема 12. Если $\lambda_j T(1+q_j) - l_j < 0$, то стационарные вероятности $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$, $y \in Y_j$, векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ находятся однозначно из решения системы уравнений

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) - \exp\{-\lambda_j T\}\sum_{y=1}^{l_j}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)/(1-\exp\{-\lambda_j T\}) = 0,$$

$$2m\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(l_j - w) = l_j - \lambda_j T\,(1+q_j),$$

$$\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(z_k^{l_j} - z_k^{w}) = 0,\quad k \in \{1, 2, \ldots, l_j - 1\}.$$

При $l_j = 1$ были получены в явном виде формулы для стационарных вероятностей и для некоторых числовых характеристик состояний системы обслуживания неоднородных требований и управления конфликтными потоками. Этот случай важен в приложениях для управляемых систем с малыми значениями интенсивностей обслуживания или с малыми значениями длительностей пребывания обслуживающего устройства в состояниях. В качестве примера можно привести задачу о сортировке корреспонденций из m ячеек в отделении связи. Работник почты берет из j-ой ячейки одну корреспонденцию, читает адрес и переносит ее в соответствующий j-ый бункер для транспортировки. Затем он непременно переходит к ячейке с номером $(j+1)$ при $1 \le j < m$ и к первой ячейке при $j = m$. Корреспонденция в каждую ячейку поступает случайным образом и не зависит от поступлений корреспонденций в другие ячейки. Время на чтение корреспонденции из ячейки с номером j и перемещение ее в бункер с номером j равно T_{2j-1}. Время перехода от бункера с номером j к ячейке с другим номером равно T_{2j}. Основные теоретические результаты по этому вопросу содержатся в следующих утверждениях.

Лемма 7. Пусть $l_j = 1$ и $\lambda_j T(1+q_j) - 1 < 0$. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}, \quad \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 1) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} (\exp\{\lambda_j T\} - 1),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+r)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} \exp\{\lambda_j T\} \exp\{-\lambda_j (T_{2j} + T_{2j+1} + \ldots + T_{2j+r-1})\}, \quad r = \overline{1, 2m-1},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 1, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} \big(-1 + \lambda_j T_{2j}(q_j+1) + \exp\{\lambda_j T\} - \lambda_j T(q_j+1)\big) \times$$
$$\times \exp\{\lambda_j T\} \exp\{-\lambda_j T_{2j}\}.$$

Лемма 8. Если $l_j = 1$ и $\lambda_j T(1+q_j) - 1 < 0$, то для второй компоненты стационарной марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{P}(æ_{j,i} = 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} \big(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j (T - T_{2j})} + e^{\lambda_j (T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}\big),$$

$$\mathbf{P}(æ_{j,i} = 1) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} \big(e^{\lambda_j T} - \lambda_j T p_j - 1\big) \times \big(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j (T - T_{2j})} + e^{\lambda_j (T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}\big) +$$
$$+ \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m} \lambda_j p_j \big(T_{2j}\, e^{\lambda_j (T - T_{2j})} + (T_{2j} + T_{2j+1})\, e^{\lambda_j (T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + \lambda_j (T - T_{2j-1})\, e^{\lambda_j T_{2j-1}}\big).$$

Лемма 9. Если $l_j = 1$ и $\lambda_j T(1+q_j) - 1 < 0$, то для математического ожидания $Mæ_{j,i}$ второй компоненты стационарной марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ имеет место равенство: $Mæ_{j,i} = 2^{-1}\big(1 - \lambda_j T(1+q_j)\big)^{-1}\big(2\lambda_j T q_j + (\lambda_j T)^2 (1+q_j)^2\big) + (2m)^{-1}\lambda_j (1+q_j) \times$ $\times \big((2m-1)T_{2j} + (2m-2)T_{2j+1} + \ldots + T_{2j-2}\big)$.

В четвертой главе методами имитационного моделирования проведено численное исследование выходного процесса системы с целью определения квазиоптимальных параметров циклического управления конфликтными потоками Гнеденко—Коваленко. Для рассматриваемых в этой работе систем в общем случае аналитическим путем не удается получить такие ее важные вероятностные характеристики, как законы распределения длин очередей, времени ожидания начала обслуживания требований по потокам и законы распределения выходных потоков. Поэтому важно найти численные оценки этих и других характеристик. Принцип поэлементного строения управляемых систем обслуживания с переменной структурой позволяет построить имитационную модель такого рода систем. Результаты исследований на имитационной модели проинтерпретированы на задаче управления конфликтными транспортными потоками на пересечении магистралей. С использованием теоретических результатов первых трех глав и метода имитационного моделирования решается задача определения квазиоптимального управления транспортными потоками на изолированных перекрестках. В этом случае за счет укрупнения некоторых состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}$ светофора задача управления m потоками легко сводится к задаче управления двумя наиболее интенсивными потоками. Итак, в имитационной модели, ради простоты, полагаем, что $m = 2$ и интенсивными потоками будут $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$.

В разделах 4.1 и 4.2 приведена методика решения основных задач статистического исследования системы и на содержательном уровне дано описание имитационного эксперимента. В частности, рассматриваются вопросы определения подходящей оценки загрузки системы, времени переходного процесса и времени имитационного моделирования для вычисления оценок основных характеристик функционирования системы с заданной точностью и надежностью. Приводится краткое описание интерфейса программы имитационной модели управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов. Программа имитационной модели может работать в одном из трех режимов: 1) режим вычисления оценок основных статистических характеристик системы; 2) режим определения квазиоптимальных параметров циклического управления; 3) демонстрационный видеорежим, позволяющий наблюдать весь процесс обслуживания требований и управление конфликтными потоками на примере движения автомобилей на перекрёстке.

На имитационной модели в квазистационарном режиме вычислялись с заданной надежностью (доверительной вероятностью β) и заданной точностью следующие основные характеристики: a) оценки $\tilde{M}(\gamma_j)$ с точностью $\varepsilon_{1,j}$ и $\tilde{D}(\gamma_j)$ с точностью $\varepsilon_{2,j}$ для среднего значения и соответственно дисперсии времени γ_j ожидания начала обслуживания произвольной заявки потока $\overline{\Pi}_j$; b) оценка $\tilde{M}(\gamma) = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1+q_j))^{-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1+q_j) \tilde{M}(\gamma_j)$ среднего взвешенного времени γ ожидания начала обслуживания требования произвольного потока; *c*) оценки $\widetilde{\mathrm{M}}(æ_j)$ с точностью $\varepsilon_{3,j}$ и $\widetilde{\mathrm{D}}(æ_j)$ с точностью $\varepsilon_{4,j}$ для математического ожидания и соответственно дисперсии длины $æ_j$ очереди машин потока $\overline{\Pi}_j$ в произвольный момент начала его обслуживания; *d*) оценки $\widetilde{\mathrm{M}}(\xi'_j)$ с точностью $\varepsilon_{5,j}$ и $\widetilde{\mathrm{D}}(\xi'_j)$ с точностью $\varepsilon_{6,j}$ математического ожидания и соответственно дисперсии числа ξ'_j заявок, которые покидают систему за произвольный акт обслуживания потока $\overline{\Pi}_j$; *e*) статистический закон распределения и гистограмма относительных частот числа ξ'_j требований, которые покидают систему за произвольный акт обслуживания потока $\overline{\Pi}_j$; *f*) значение ρ_j^* оценки загрузки системы по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$ и значение $\rho_{1,2}^*$ оценки для общей загрузки системы по двум потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$. Динамика оценок $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma_1)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma_2)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(\gamma_1)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(\gamma_2)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(æ_1)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(æ_2)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(æ_1)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(æ_2)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(\xi'_1)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(\xi'_2)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(\xi'_1)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(\xi'_2)$ основных характеристик системы представлена в виде графиков.

В разделе 4.3 рассмотрено большое число примеров, которые иллюстрируются таблицами и графиками. Результаты исследований на имитационной модели и реальные наблюдения показывают, что с увеличением оценки загрузки управляемой системы обслуживания существенно увеличивается оценка времени переходного процесса для вхождения ее в квазистационарный режим и оценка среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания требования произвольного потока. При этом существенно уменьшается оценка средней взвешенной дисперсии выходного потока.

Рассмотрим теперь плоскость с прямоугольной системой координат вида T_1OT_3. На кривой равных оценок загрузок отдельно по потокам значение общей оценки $\rho_{1,2}^*$ для загрузки системы уменьшается с увеличением длительности T периода циклического управления потоками. При этом на кривой равных оценок загрузок отдельно по потокам максимальное значение оценки $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma)$ отличается от минимального значения оценки $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma)$ не более чем на 10%. На основании этих выводов предложен простой алгоритм поиска квазиоптимальных длительностей T_1^*, T_3^* фаз светофора с использованием модифицированного метода покоординатного спуска и сокращенного перебора. Этот алгоритм состоит из следующих этапов. Сначала специальным образом выбираем точки на кривой равных оценок загрузок отдельно по потокам. Затем методом перебора среди этих точек определяем такую точку $(T_1^{(1)}, T_3^{(1)})$, для которой величина $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma)$ принимает минимальное значение. Наконец, строим равномерную сетку на прямой $\{(T_1, T_3)\colon T_1 + T_3 = T_1^{(1)} + T_3^{(1)}\}$ с заданным шагом и среди узлов этой сетки выбираем квазиоптимальную точку вида (T_1^*, T_3^*) по условию минимума оценки $\widetilde{\mathrm{M}}(\gamma)$. Приведены рекомендации по определению квазиоптимальных параметров циклического управления конфликтными транспортными потоками на перекрестке и указаны свойства квазиоптимального управления. Установлено, что квазиоптимальное управление обеспечивает стандартизацию выходных потоков.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Впервые предложен нелокальный способ описания потоков неоднородных требований и на этой основе разработан метод анализа статистических данных о потоках.

2. Построена и изучена математическая модель выходных потоков при управлении конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов, адекватно отражающая характерные особенности регулирования транспорта на перекрестках. Таким образом, создается возможность рассмотрения сети управляемых процессов обслуживания, например, сети транспортных перекрестков.

3. Предложен итеративно-мажорантный метод анализа управляемых векторных марковских последовательностей со счетным числом состояний, позволяющий определить легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в циклических системах обслуживания требований и управления потоками Гнеденко—Коваленко.

4. Разработан алгебраический метод определения инвариантного распределения выходного потока в системах управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов.

5. На основе принципа поэлементного строения управляемых систем обслуживания с переменной структурой построена компьютерная исследовательская имитационная модель. Средствами имитационного моделирования проведен численный анализ как оценок основных числовых характеристик функционирования системы, так и свойств ее выходных потоков.

6. С использованием аналитических и численных исследований на имитационной модели предложен простой метод, который определяет квазиоптимальное циклическое управление потоками по условию минимума оценки среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольного требования. В результате еще раз был подтвержден часто выдвигаемый тезис для случайных экспериментов с управлением о том, что сравнительно большое значение дисперсии некоторой характеристики случайного эксперимента есть результат неоптимального управления.

4. СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации:

1.Федоткин, А.М. Свойства управляемой векторной марковской цепи со счетным числом состояний, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям / А.М. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. –2009. – № 3. – С. 152–161.

2. Федоткин, А.М. Определение стационарного режима рекуррентных марковских цепей итеративно-мажорантным методом / А.М. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. –2009. – № 4. – С. 130–140.

3.Федоткин, М.А. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко-Коваленко / М.А. Федоткин, А.М. Федоткин // Автоматика и телемеханика. РАН. – 2009. – № 12. – С. 92–108.

4. Федоткин, А.А. Изучение свойств потока Гнеденко-Коваленко / А.А. Федоткин, А.М. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. –2008. – № 6. – С. 156–160.

В иных печатных изданиях:

5. Fedotkin, A.M. Model for Refusals of Elements of a Controlling System / A.M. Fedotkin, M.A. Fedotkin // Transactions of the first French-Russian Conference on “Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology, LAD’ 2004”, St. Petersburg State Politechnical University, Saint Petersburg, 2004. – Vol. 2. – P. 136–151.

6. Fedotkin, M.A. Mathematical Models of a Flow of a Controlling System Refusals / M.A. Fedotkin, A.M. Fedotkin // Book of Abstracts of the VI International Congress on Mathematical Modeling, University of Nizhny Novgorod, Russia, 2004. – P. 80.

7. Федоткин, А.М. Математические модели транспортных потоков на автомагистрали и на управляемом по циклическому алгоритму перекрестке / А.М. Федоткин; Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород. 2009. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.09, № 5-В2009.

8. Федоткин, М.А. Статистический анализ потока отказов восстанавливаемых систем и проблема профилактики / М.А. Федоткин, А.М. Федоткин // Сборник научных статей VI Международной конференции “MMR 2009 –Математические методы в теории надежности: Теория. Методы. Приложения”, М.: РУДН, 2009. – С. 322–326.

9. Федоткин, А.М. Арифметические свойства распределений выходного процесса при циклическом управлении потоками Гнеденко — Коваленко / А.М. Федоткин; Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород. 2009. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.04.09, № 213-В2009.

10. Федоткин, А.М. Предельные свойства распределений выходного процесса при циклическом управлении потоками Гнеденко–Коваленко / А.М. Федоткин; Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород. 2009. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.06.09, № 389-В2009.

11. Федоткин, М.А. Кодирование потока сбоев и надежность управляющих систем / М.А. Федоткин, А.М. Федоткин // Сборник научных статей X Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”, М.: МГУ, 2010. – С 145–147.

Публикации, определенные ВАК России по смежным специальностям:

12. Федоткин, А.М. Способ автоматического управления аэрацией при культивировании микроорганизмов, культур клеток и тканей / А.М. Федоткин, Д.В. Зудин, С.Б. Котова, О.Ю. Гадалов // Авторское свидетельство СССР на изобретение № 1632045 А1 приоритет изобретения 20.06.1989 от 01.11.1990.

13. Федоткин, А.М. Об одной оптимизационной задаче для нелинейной системы с ограничениями / А.М. Федоткин // Материалы IV Научной конференции молодых ученых НИИ ПМК при ГГУ и факультета ВМК ГГУ, Горьковский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, Горький. 1985. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ.

14. Зудин, Д.В. Оптимальное управление одним классом биотехнологических процессов / Д.В. Зудин, А.М. Федоткин // Сборник тезисов докладов Совещания-семинара “Использование вычислительных средств в экологии, экономике медицине”, Горький: Горьковский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, 1986. – С. 43–45.

15. Федоткин, А.М. Идентификация математических моделей и управление процессом ферментации / А.М. Федоткин, Д.В. Зудин // Математическое моделирование, управление и оптимизация: Сборник статей / Под ред. А.В. Сергиевского. Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. Горький. 1988. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.07.88, № 5714-В88.

16. Федоткин, А.М. Синтез особой экстремали и ее оптимальность в одной задаче оптимального управления / А.М. Федоткин // Тезисы докладов Восьмой Всесоюзной конференции “Проблемам теоретической кибернетики”, Горький: ГГПИ, 1988. – Ч. 2. – С. 145–146.

17. Федоткин, А.М. Адаптивные алгоритмы управления для робототехнических систем научных исследований биотехнологических процессов / А.М. Федоткин, Д.В. Зудин // Сборник тезисов докладов V Всесоюзного совещания по робототехническим системам, Москва – Геленджик, 1990. – С. 148–149.

Федоткин Андрей Михайлович

Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко—Коваленко

В диссертации предложен простой механизм динамики образования неординарных потоков требований. Дано обоснование использования потока Гнеденко—Коваленко для адекватного описания процесса транспортного движения на автомагистрали с учетом его пространственных и временных характеристик. Поставлена и решена задача нелокального описания выходных потоков в неклассических системах массового обслуживания неоднородных требований. Разработан итеративно-мажорантный метод изучения особенностей и эргодических свойств вероятностной модели систем управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов с переналадками. Для такого рода систем предложен алгебраический метод получения аналитических выражений стационарных характеристик. Эти характеристики являются аналогами известных формул Поллачека—Хинчина для классических систем. С использованием теоретических результатов и средств имитационного моделирования решена задача оптимизации циклического управления по условию минимума среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольного требования в стационарном режиме.

Fedotkin Andrey Mikhajlovich

Simulation and optimization of output processes under cyclic control over conflict Gnedenko-Kovalenko flows

In this thesis we propose a simple mechanism for formation dynamics of nonordinary flows of demands. We justify the use of the Gnedenko-Kovalenko flow for an adequate description of the traffic on a highway with regard to its spatial and temporal characteristics. A problem of non-local description of output flows in the non-classical queueing systems with non-homogeneous demands has been posed and solved. An iterative majorating method for studying characteristics and ergodic properties of a probabilistic model of control systems with conflict flows in a class of cyclic algorithms with readjusments has been developed. An algebraic method of obtaining analytical expressions for stationary characteristics is proposed for such systems. These characteristics are analogous to the known Pollaczek-Khintchine formulas for classical systems. Using the theoretical results and means of computer-aided simulation an optimization problem for the cyclic control with the minimum weighted average waiting time for service start by an arbitrary demand in the steady state as an objective function has been solved.

Подписано в печать 03. 11. 2010. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № 681

Отпечатано в Центре цифровой печати

Нижегородского госуниверситета им.Н.И. Лобачевского

Лицензия № 18-0099

603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.