

На правах рукописи

**МАЛЬХАНОВ Алексей Олегович**

**ДИСПЕРСИЯ, ЗАТУХАНИЕ И НЕЛИНЕЙНАЯ  
ЛОКАЛИЗАЦИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2010

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Национальный исследовательский университет) и в Нижегородском филиале Учреждения Российской академии наук Института машиноведения им. А.А. Благоднарова РАН

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор

**Ерофеев Владимир Иванович**

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор

**Глушков Евгений Викторович**

доктор физико-математических наук, профессор

**Волков Иван Андреевич**

**Ведущая организация:** Учреждение Российской академии наук Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

Защита состоится 29 декабря 2010 г. в 11-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете по адресу: 603950, ГСП 1000, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан 23 ноября 2010 года

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физ.-мат.наук

Игумнов Л.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Магнитоупругость как научное направление возникла в середине 50-х годов на стыке механики деформируемого твердого тела, электродинамики и акустики. Первые работы были инициированы проблемами геофизики – потребностью описать волновую динамику глубинных слоев Земли с учетом ее электропроводности и взаимодействия с геомагнитным полем.

С тех пор динамические процессы при взаимодействии электромагнитных и деформационных полей активно изучаются. Это связано с многочисленными физическими, техническими и технологическими приложениями. Среди них проблемы прочности конструкций и механизмов, эксплуатируемых в условиях сильных магнитных полей.

В связи с моральным и физическим износом эксплуатируемой техники, возросла актуальность задач дефектоскопии. При этом с помощью индуктора в проводящем материале, находящемся в постоянном магнитном поле, создаются вихревые токи. Возникающая распределенная амперова сила возбуждает колебания. Наличие дефектов определяется по отклонению собственных и резонансных частот от эталонных.

Такой же механизм используется в виброобработке. Виброобработка расплавов способствует улучшению структуры получающегося при затвердевании материала. Виброобработка при сварке металла плавящимся электродом улучшает прочность сварного шва и устраняет остаточные напряжения. Использование электродинамических способов при дефектоскопии и виброобработке решает многие технологические проблемы за счет бесконтактности возбуждения колебаний.

Энергия электромагнитного поля наиболее удобна при промышленной термообработке, использующей индукционный нагрев при диссипации электромагнитного поля.

Включение полей различной физической природы в механические системы открывает новые возможности для развития техники и технологии. Эффекты магнитоупругости проявляются в сильных магнитных полях, если создаваемые нагрузки способны заметно повлиять на волновые и диссипативные свойства среды, или в тонких телах: стержнях, пластинах и оболочках. Для безграничной магнитоупругой среды характерна создаваемая магнитным полем анизотропия свойств. Магнитное поле в среде с конечной проводимостью приводит к дополнительному механизму диссипации. Эти свойства магнитоупругих систем открывают новые возможности практического применения.

Основные результаты диссертации были получены в ходе выполнения работ по теме "Разработка моделей и методов расчета нелинейных волновых процессов, хаотической синхронизации и формирования кластерных структур в машинах, создание высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты",

включенной в план основных заданий Нф ИМАШ РАН (2009 – 2012 г.г. Гос.рег. № 01200957044, руководитель проф. Ерофеев В.И.)

и при поддержке:

– Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009 – 2013 г.г.)

– гранта РФФИ «Нелинейные упругие волны в структурированных и поврежденных материалах и элементах конструкций. Теория. Эксперимент, Приложения в технической диагностике». (РФФИ № 09-08-00827, 2009 – 2011, рук. проф. Ерофеев В.И.);

– гранта РФФИ, полученного в рамках конкурса «Мобильность молодых ученых» (РФФИ № 09-01-16035-моб\_з\_рос, рук. Мальханов А.О.).

**Цель работы** состоит в изучении влияния внешнего постоянного магнитного поля на дисперсионные, диссипативные и нелинейные свойства упругих волн, распространяющихся в электропроводящих материалах и элементах конструкций.

### **Научная новизна.**

В диссертации получила развитие теория магнитоупругости электропроводящих деформируемых неферромагнитных тел, находящихся в постоянном внешнем магнитном поле.

– Впервые предложена система уравнений магнитоупругости для стержня, с учетом кинетической энергии толщинных колебаний и потенциальной энергии сдвиговых деформаций.

– Исследовано влияние внешнего магнитного поля и конечной электропроводности материала на дисперсионные и диссипативные характеристики продольной упругой волны, распространяющейся в стержне, выражающееся, в частности, в формировании ускоренной и замедленной волн по отношению к волне, соответствующей материалу с бесконечной проводимостью.

– Системы динамических уравнений магнитоупругости для стержня, пластины и упругой трехмерной среды приведены к эволюционным уравнениям относительно продольной деформации, в частных случаях представляющих собой известные модельные уравнения нелинейной волновой динамики (Кортевега-де Вриза-Бюргерса, Кортевега-де Вриза, Бюргерса, Римана, двумерные уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова и Кадомцева-Петвиашвили, трехмерное уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова).

– Исследована эволюция магнитоупругой волны Римана в стержне. Показано, что внешнее магнитное поле стабилизирует простую волну, увеличивая время формирования резкого фронта.

– В результате аналитических исследований и численного моделирования продемонстрирована возможность формирования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн (уединенные волны деформации в стержне; двумерные квазиплоские волновые пучки в пластине; трехмерные квазиплоские волновые пучки в упругой проводящей среде).

### **Практическая значимость**

Результаты исследований могут найти применение при разработке методик акустического и вихретокового контроля материалов и элементов конструкций. Они могут быть использованы при расчетном сопровождении технологий виброобработки материалов с целью снятия в них остаточных напряжений и технологий магнито-акустического разогрева материалов.

### **Методы исследования**

При проведении исследований использованы аналитические методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн. При получении эволюционных уравнений использован метод многих масштабов.

**Достоверность** полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики и электродинамики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

### **На защиту выносятся:**

- Нелинейные эволюционные уравнения, описывающие магнитоупругие волны в стержне, пластине и упругой трехмерной среде.
- Результаты исследования дисперсионных зависимостей для магнитоупругих волн.
- Результаты исследования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн.

### **Апробация работы**

Результаты работы докладывались и обсуждались: на XXXVII международной конференции «The International Summer School “Advanced Problems in Mechanics” (APM-2009)», (June 30 - July 5, 2009, St. Petersburg, Russia), на международной конференции «Young scientists’ school-conference “Modern Ways in Mechanics” (MWM-2009)», (July 4, 2009, St. Petersburg, Russia), на XVI симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» (“DYVIS – 2009”) (25 – 29 мая, 2009, Звенигород), на XIV Нижегородской сессии молодых ученых (физика, химия, медицина, биология), (Нижний Новгород 19-24 апреля, 2009г.), на всероссийской научно-технической конференции «Современные технологии в кораблестроительном и авиационном образовании, науке и производстве», (17-20 ноября, 2009, Нижний Новгород), на XVI международном симпозиуме «Динамические и технологические

проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова», (15-19 февраля, 2010, Ярополец), на XXII сессии Российского акустического общества (Сессия научного совета РАН по акустике) (15-17 июня, 2010, Москва), на «Четырнадцатая научная конференция по радиофизике, посвященная 80-й годовщине со дня рождения Ю.Н. Бабанова» (7 мая, 2010, Нижний Новгород), на международной конференции «The 2010 International Conference of Mechanical Engineering» (London, U.K., 30 June - 2 July, 2010), на международной конференции «1<sup>st</sup> International Conference on Mechanical Engineering (ICOME 2010 - VF) virtual forum», (June 7 - 21, 2010).

Работа была поддержана стипендией академика Г.А. Разуваева (2009-2010), а так же отмечена дипломом «За лучший доклад молодого специалиста в секции «Нелинейная акустика» на XXII сессии Российского акустического общества (Москва, 2010 г.).

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 19 работ, 6 из которых [1 – 6] – статьи из перечня журналов, рекомендуемых ВАК РФ.

### **Личный вклад соискателя**

Основные результаты диссертации получены лично Мальхановым А.О. путем проведения аналитических исследований и численного моделирования. Ерофееву В.И. [1 - 4, 6 - 15, 18, 19] принадлежит постановка задач и общее руководство исследованиями. Землянухин А.И. и Катсон В.М. [3, 7, 8] произвели адаптацию полунеевной псевдоспектральной схемы вычисления к анализу эволюции ударной волны в пластине. Морозов А.Н. [4] принимал участие в обсуждении результатов и в формулировке возможных практических приложений. Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. [9] провели качественный анализ динамического поведения осциллятора, содержащего нелинейное слагаемое в отрицательной степени – этот материал в диссертацию не включен. Кузнецов С.И., Урман Ю.М. [5, 17] определили область изменения параметров подвеса, соответствующих устойчивому равновесию ротора в поле магнитов – этот материал в диссертацию не включен.

### **Структура и объем диссертации**

Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем составляет 142 страницы, включая 76 рисунков, 6 таблиц, 24 страницы библиографии, содержащей 246 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

*Во введении* дана общая характеристика работы, сформулирована ее цель, основные положения работы, выносимые на защиту, определены научная новизна и практическая значимость работы.

### *Глава 1. Магнитоупругость. Обзор публикаций и основные уравнения*

Первый параграф главы (*п. 1.1*) носит обзорный характер, в нем обосновывается актуальность темы диссертации, приводится ряд областей науки и техники, которые нуждаются в исследовании процессов колебаний и распространения волн с учетом электромагнитных эффектов. Отмечаются основные направления развития теории электромагнитоупругого взаимодействия:

- магнитоупругость (и магнитотермоупругость) электропроводящих неферромагнитных тел в постоянном внешнем магнитном поле;
- магнитоупругость магнитоактивных, в том числе пьезомагнитных, ферромагнитных и магнитострикционных сред;
- электроупругость пьезоэлектрических и электрострикционных сред;

Дан обзор литературы по каждому из направлений теории. Отмечено, что большой вклад в развитие магнитоупругости и ее приложений внесли: Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Багдоев А.Г., Бардзокас Д., Белубекян М.В., Бурак Я.И., Калиский С., Кейлис-Борок В.И., Киселев М.И., Кнопофф Л., Кондрат В.Ф., Короткина М.Р., Кудрявцев Б.А., Можен Ж., Новацкий В., Партон В.З., Подстригач Я.С., Саркисян В.С., Саркисян С.О., Селезов И.Т. и другие. Линейные магнитоупругие волны изучались многими авторами, в нелинейной постановке рассматривались, в основном, квазигармонические волновые процессы (Багдоев А.Г., Шекоян А.В., Донато А., Селезов И.Т., Корсунский С.В. и другие). Диссертация выполнена в рамках первого (из перечисленных выше) направления теории электромагнитоупругого взаимодействия и ориентирована, главным образом, на изучение нелинейных магнитоупругих волн.

В *п. 1.2* дается вывод системы уравнений магнитоупругости в рамках первого направления теории электромагнитоупругого взаимодействия. Предполагается, что упругое деформируемое электропроводящее тело находится в начальном постоянном магнитном поле и электромагнитное взаимодействие между телом и полем осуществляется посредством пондеромоторных сил Лоренца. Токами смещения пренебрегается. Считается, что свободные электрические заряды отсутствуют.

входящих в уравнения движения упругой среды:

Таким образом, уравнения магнитоупругости имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}_{\text{нел}} + \frac{1}{4\pi} \left( \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} \right),$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{u}$  – вектор перемещений;  $\lambda, \mu$  – модули упругости (константы Ламе) второго порядка;  $\rho$  – плотность материала;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\sigma$  – проводимость;  $c$  – скорость света в вакууме. Вектор  $\vec{F}_{\text{нел}}$  включает в себя слагаемые, обусловленные учетом упругой нелинейности.

Далее приведен явный вид системы уравнений магнитоупругости для трехмерной упругой среды.

Для однородной, нелинейно-упругой пластины, находящейся во внешнем магнитном поле, система уравнений магнитоупругости получается из общей системы (1) путем применения метода приведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям равновесия или динамики пластин. Этот метод заключается в выражении напряженно-деформированного состояния в произвольной точке тела через новые величины, заданные вдоль срединной поверхности пластины. При этом переход от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали  $\vec{x}_\perp = (y, z)$  к конечному числу степеней свободы (конечному числу мод) осуществляется путем аппроксимации смещений многочленами. Она производится, как правило, по степеням поперечных координат, и в качестве малого параметра выступает относительная толщина пластины  $2k_z h$ , где  $h$  – полутолщина пластины,  $k_z$  – нормальная компонента волнового вектора.

Система уравнений магнитоупругости (1) для модели, описывающей продольные колебания стержня (в этом случае преобладает продольная компонента вектора перемещений  $u_x$ ) и учитывающей как кинетическую энергию толщинных колебаний, так и потенциальную энергию сдвиговых деформаций, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + \frac{6\alpha_1}{E} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - v^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} \left[ H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} + H_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + H_z \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$



Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $R = \sqrt{J_0/F}$  – полярный радиус инерции,  $J_0 = \iint_F (y^2 + z^2) dF$  – полярный момент инерции,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$  – модуль Юнга,  $\alpha_1 = \frac{E}{2} + \frac{3\lambda}{2} + A + B(1 - 2\nu) + \frac{C}{3}(1 - 6\nu)$  – коэффициент упругой нелинейности,  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольной волны в стержне,  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость распространения сдвиговой волны в стержне.

## Глава 2. Линейные и нелинейные магнитоупругие волны в стержне

**П.2.1** посвящен исследованию влияния магнитного поля и электропроводности материала на дисперсионные и диссипативные характеристики волны, распространяющейся в стержне. Направление вектора напряженности внешнего постоянного магнитного поля предполагается перпендикулярным направлению распространения волны деформации. Связь волнового числа и частоты продольной волны деформации, описываемой с помощью линейной модели Бернулли, выражается комплексным биквадратным по волновому числу уравнением.

На Рис. 1 представлена зависимость, связывающая волновое число и частоту продольной волны деформации при наличии магнитного поля в случае бесконечной проводимости стержня ( $\Sigma = \infty$ ).

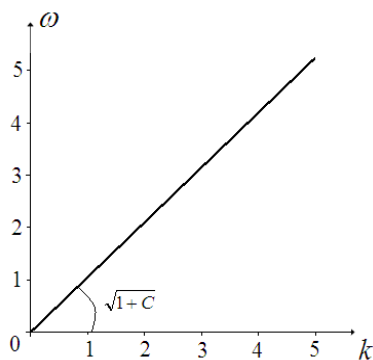


Рис. 1

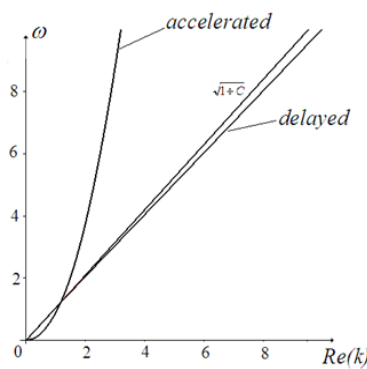


Рис. 2

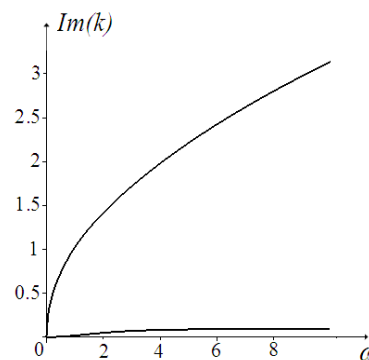


Рис. 3

Магнитное поле определяет величину фазовой скорости  $V_\phi = \sqrt{1+C}$ , чем больше величина магнитного поля, тем больше фазовая скорость волны.

Здесь  $k, \omega$  – волновое число и частота,  $C = \frac{c_A^2}{c_0^2}$  – безразмерный квадрат скорости,  $\Sigma = \frac{\sigma}{\sigma_0}$  – безразмерная проводимость,  $c_A = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}}$  – скорость волны Альфвена.

Конечная проводимость среды ( $\Sigma \neq \infty$ ) приводит к появлению мнимой части волнового числа, которая характеризует затухание волны. Результат численного решения дисперсионного уравнения представлен на Рис. 2-3.

На Рис. 2 наряду с решениями уравнения (8) представлена так же зависимость волнового числа от частоты для материала с бесконечной проводимостью. Из рисунка видно, что в случае конечной проводимости материала имеется две волны, причем одна из них замедлена, а вторая ускорена относительно волны, соответствующей стержню с бесконечной проводимостью ( $\Sigma = \infty$ ).

Первая волна распространяется почти без затухания и, с ростом частоты, действительная часть волнового числа значительно преобладает над мнимой. Вторая волна распространяется почти без затухания, но с ростом частоты преобладание действительной части волнового числа над мнимой уменьшается.

В *п. 2.2* представлено сравнение зависимости затухания и скорости продольной магнитоупругой волны от напряженности магнитного поля с данными эксперимента, где затухание и скорость продольной магнитоупругой волны с частотой от 5 до 90 МГц в магнитном поле, перпендикулярном направлению распространения волн, измерялись для монокристаллов никеля.

Показано, что зависимость затухания первой волны от величины внешнего магнитного поля качественно не соответствует экспериментальным данным. Затухание же второй волны имеет участок качественного совпадения с экспериментом. Зависимость же фазовых скоростей для обеих волн от величины внешнего магнитного поля качественно соответствует экспериментальным данным.

В *п. 2.3* рассматривается распространение магнитоупругих волн в стержне согласно нелинейным моделям.

Предполагается, что суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций:

$$\vec{H} = H_0 \vec{n} + \vec{h}, \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности стержня,  $\vec{h}$  – малое возмущение магнитного поля.

Полагая, что внешнее магнитное поле перпендикулярно направлению распространения продольной магнитоупругой волны в стержне, для вектора перемещений, вектора малого возмущения магнитного поля и вектора суммарного магнитного поля имеем:

$$\vec{u} = (u_x, 0, 0), \quad \vec{H} = (0, 0, H_0 + h_z) \quad (4)$$

Методом многих масштабов система уравнений магнитоупругости (2) сводится к эволюционному уравнению, относительно продольной деформации ( $U$ ):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков.

Уравнение (5) носит название уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Оно имеет решение в виде локализованной волны (кинка):

$$U = A \exp(\xi) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right), \xi = \xi_0(x - 2at), \xi_0 = \sqrt{-\frac{a}{3\beta}},$$

$$a = -\frac{3\delta^2}{25\beta}, A = -\frac{a}{\alpha}, V_k = 2a, \Delta = \frac{2}{\xi_0}. \quad (6)$$

На Рис. 4 изображены зависимости амплитуды ( $A$ ), скорости ( $V_k$ ) и ширины ( $\Delta$ ) этой волны от напряженности магнитного поля.

Для конденсированных сред в магнитных полях до 10 Тл скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны, поэтому изменение параметров представлено на интервале  $0 \leq c_A^2/c_0^2 < 1$ . Все графические построения были выполнены для алюминиевого образца.

Как видно из рисунка, с увеличением напряженности внешнего магнитного поля амплитуда и скорость локализованной волны убывают, в то время как ее ширина возрастает.

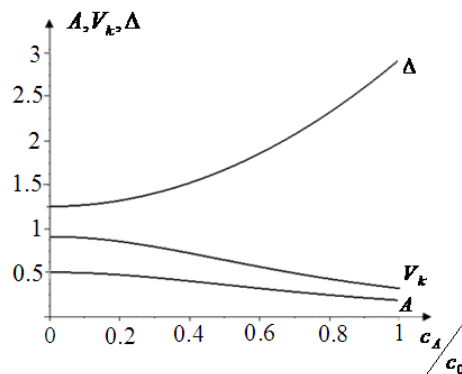


Рис. 4

Если стержень является идеальным проводником, то в эволюционном уравнении (5) можно пренебречь слагаемым с коэффициентом  $\delta$ , поскольку значение проводимости  $\sigma$  близко к бесконечности. Эволюция магнитоупругой волны в этом случае будет описываться уравнением Кортевега – де Вриза, допускающим локализованное решение в виде солитона отрицательной полярности:

$$U = -\frac{A}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}, \xi = x - V_s t, A = \frac{3V_s}{\alpha}, \Delta = \sqrt{\frac{12\beta}{A\alpha}} \quad (7)$$

Зависимости амплитуды ( $A$ ), скорости ( $V_s$ ) и ширины ( $\Delta$ ) солитона от напряженности магнитного поля показаны на Рис. 5

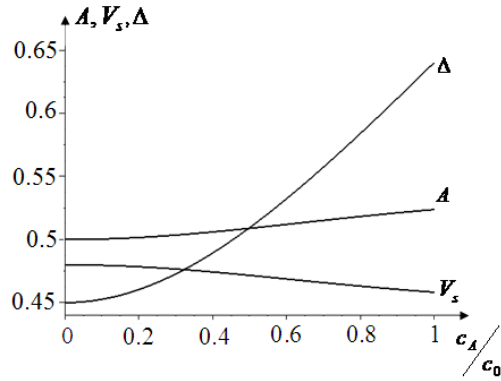


Рис. 5

Из рисунка видно, что с ростом напряженности амплитуда (при постоянной скорости) солитона возрастает, в то время, как его скорость (при постоянной амплитуде) убывает. Ширина солитона с ростом напряженности магнитного поля возрастает.

При исследовании волновых процессов в низкочастотном диапазоне, в исходной системе уравнений магнитоупругости (2) можно пренебречь кинетической энергией поперечных движений и потенциальной энергией сдвиговых деформаций. В этом случае эволюционное уравнение (5) преобразуется в уравнение Бюргерса ( $\beta = 0$ ), допускающее локализованное решение в виде:

$$U = V_b - Ath \left[ \frac{A(x - V_b t)}{2\delta} \right], \quad (8)$$

$$\xi = x - V_b t, A = \frac{U(-\infty) - U(+\infty)}{2}, V_b = \frac{U(-\infty) + U(+\infty)}{2}, \Delta = \frac{2\delta}{A}$$

На Рис. 6 представлена зависимость ширины уединенной волны от напряженности внешнего магнитного поля

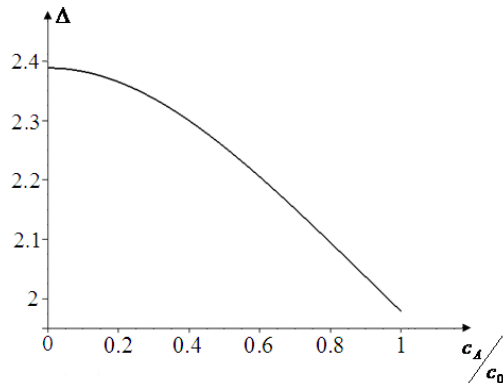


Рис. 6

Из рисунка видно, что с ростом напряженности внешнего магнитного поля ширина волны уменьшается.

В низкочастотном диапазоне для идеального проводника ( $\beta = 0, \delta = 0$ ) уравнение (5) сводится к уравнению Римана, имеющему решение в виде простой волны.

Исследована нелинейная эволюция волны, заданной в начальный момент времени в виде синусоиды  $U(x,0) = U_0 \sin(kx)$ , показано, что у такой волны в

момент времени  $t_* = \frac{1}{k\alpha U_0}$ , формируется резкий фронт. Это время зависит от напряженности внешнего магнитного поля (Рис.7).

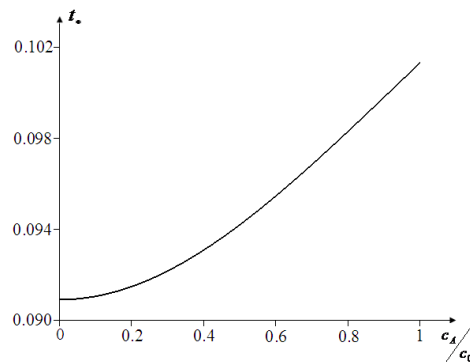


Рис. 7

Из рисунка видно, что магнитное поле увеличивает время опрокидывания, то есть стабилизирует волну.

Далее рассмотрен случай, когда внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью  $H_0$  направлено под произвольным углом  $0 \leq \varphi < 2\pi$  к направлению распространения продольной волны. Тогда соотношение для вектора перемещений, вектора поправки к магнитному полю и вектора суммарного магнитного поля примет вид:

$$\vec{u} = (u_x, 0, 0), \vec{h} = (h_x, h_y, h_z), \vec{H} = (H_0 \cos \varphi + h_z, h_y, H_0 \sin \varphi + h_z) \quad (9)$$

Система (2) и в этом случае сводится к уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса (5), но теперь его коэффициенты будут зависеть еще и от угла  $\varphi$ .

### **Глава 3. Двумерные и трехмерные локализованные нелинейные магнитоупругие волны**

В *п. 3.1* рассматривается распространение продольной волны в однородной, нелинейно-упругой пластине, находящейся во внешнем магнитном поле. Предполагается, что пучок продольных волн распространяется вдоль оси  $x$ . Пучок считается ограниченным, слаборасходящимся и близким к плоской волне. Рассматривается область, в которой параметры нелинейности, дисперсии и дифракции имеют одинаковый порядок ( $\sim \varepsilon$ ). В начале предполагается, что внешнее магнитное поле перпендикулярно направлению распространения волнового пучка. Вектор перемещений, вектор малого возмущения магнитного поля и вектор суммарного магнитного поля имеют вид:

$$\vec{u} = (u, v, 0), \vec{h} = (h_x, h_y, h_z), \vec{H} = (h_x, h_y, H_0 + h_z) \quad (10)$$

где  $u, v$  - проекции вектора перемещений на оси  $x$  и  $y$ . Вводятся лучевые координаты:

$$\xi = x - \tilde{c}t; \eta = \varepsilon x; \chi = \sqrt{\varepsilon}y, \quad (11)$$

и новые функции:

$$\begin{aligned} u &= u; v = \sqrt{\varepsilon}v; \\ h_z &= h_z; h_x = \sqrt{\varepsilon}h_x; h_y = \sqrt{\varepsilon}h_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Позволяющие привести систему уравнений магнитоупругости в первом приближении по  $\varepsilon$  к эволюционному уравнению относительно продольной деформации  $U = \partial u / \partial \xi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} = 0, \quad (13)$$

где коэффициенты содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков.

Уравнение (13) соединяет в себе известные модельные уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова (получается при  $\beta = 0$ ) и Кадомцева-Петвиашвили (при  $\delta = 0$ ).

Было найдено аналитическое решение уравнения (13):

$$U(\xi, \chi, \eta) = -\frac{3}{25} \frac{\delta^2}{\alpha\beta} \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_0 \xi + k_1 \chi + k_2 \eta}{2} \right) \right)^2, \quad (14)$$

где  $k_0 = \frac{1}{5} \frac{\delta}{\beta}$ ,  $k_2 = -\frac{6}{125} \frac{\delta^3}{\beta^2} + \frac{5\beta\gamma k_1^2}{\delta}$ ,  $k_1$  - произвольная постоянная, при этом

$k_1^2 > \frac{6}{625} \frac{\delta^4}{\gamma\beta^3}$ . С помощью (14) проанализированы изменения амплитуды и

ширины волнового пучка вдоль каждой из координат в зависимости от величины внешнего магнитного поля (Рис. 7-8).

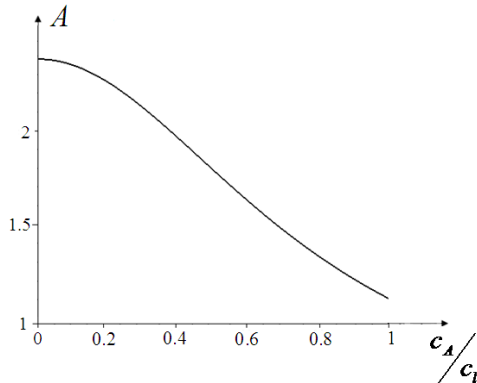


Рис. 7

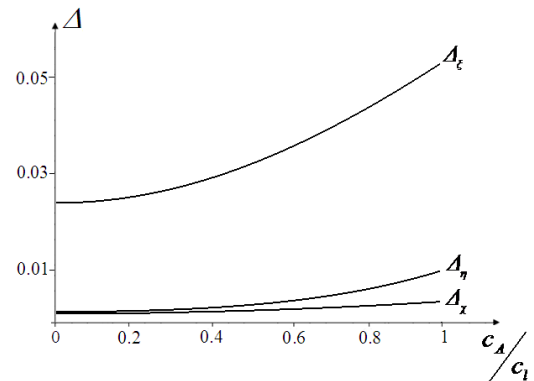


Рис. 8

Из Рис.7 видно, что ростом напряженности внешнего магнитного поля амплитуда волнового пучка убывает. В то же время ширина пучка вдоль каждой из координатных осей возрастает с увеличением величины магнитного

поля, причем вдоль продольной координаты  $\xi$  ширина пучка на порядок больше, чем вдоль поперечной  $\chi$  (Рис. 8).

Далее рассмотрен случай, когда внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью  $H_0$  имеет произвольную ориентацию в пространстве, определяемую углами  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Вектор суммарного магнитного поля в этом случае имеет следующий вид:

$$\vec{H} = (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x, H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y, H_0 \cos \theta + h_z) \quad (14)$$

где  $h_x, h_y, h_z$  - компоненты вектора малого возмущения магнитного поля.

Система уравнений магнитоупругости в первом приближении по  $\varepsilon$  и в этом случае сводится к эволюционному уравнению относительно продольной деформации (13), объединяющему в себе уравнения Кадомцева – Петвиашвили и Хохлова – Заболотской – Кузнецова, но теперь его коэффициенты будут зависеть еще и от углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Проанализированы изменения амплитуды  $A$  и ширины пучка вдоль каждой из координатных осей в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля.

На Рис. 9 изображена поверхность  $A$ , которая представляет собой зависимость амплитуды волны от углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

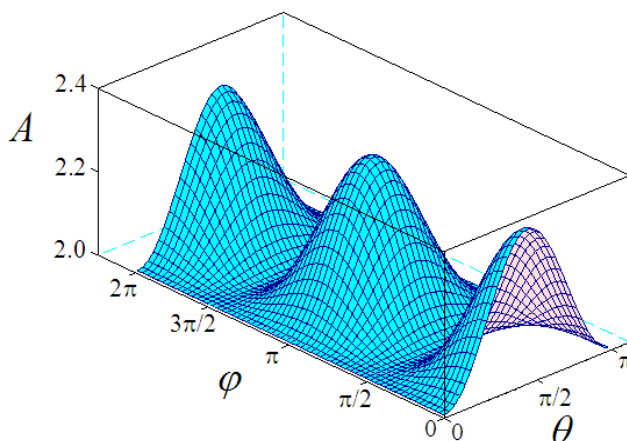


Рис. 9

Из рисунка видно, что с ростом угла  $\varphi$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  амплитуда волны убывает. При  $\theta = 0, \pi$  она принимает минимальное значение и не зависит от величины угла  $\varphi$ . При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  амплитуда волны принимает максимальное значение. С ростом угла  $\theta$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  амплитуда волны возрастает, а в зависимости от угла  $\varphi$  принимает свое максимальное значение при  $\varphi = 0, \pi$ . Амплитуда при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  принимает минимальное значение и не зависит от величины угла  $\theta$ .

Соответствующие графики для ширин волнового пучка вдоль координатных осей качественно похожи на приведенные выше, с той лишь разницей, что значения углов, при которых ширины принимают минимальные и максимальные значения могут не совпадать с этими значениями для амплитуды.

Следует отметить, что в отличие от стержня, для пластины относительная оценка степени влияния ориентации магнитного поля к его напряженности существенно больше.

В **п.3.2** рассматривается распространение продольной волны трехмерной упругой среде. Для квазиплоского слаборасходящегося волнового пучка введены безразмерные переменные

$$u = \frac{u_x}{\varepsilon\Lambda d}, v = \frac{u_y}{\varepsilon\Lambda d}, w = \frac{u_z}{\varepsilon\Lambda d}, x' = \frac{x}{\Lambda d}, y' = \frac{y}{\Lambda d}, z' = \frac{z}{\Lambda d}, t' = \frac{c_1 t}{\Lambda d} \quad (15)$$

и лучевые координаты:  $\xi = x' - \tilde{c}t', \eta = \varepsilon x', \chi = \sqrt{\varepsilon}y', \zeta = \sqrt{\varepsilon}z'$ , позволяющие привести систему уравнений магнитоупругости (1) в первом приближении по  $\varepsilon$  к одному скалярному уравнению для осевой деформации  $U = \partial u / \partial \xi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] + \gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (16)$$

где коэффициенты содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков,  $\Lambda$  – безразмерный масштаб волны,  $\Lambda d$  – длина волны, где  $\tilde{c}$  – характерная скорость, заранее неизвестная.

Уравнение (16) совпадает с известным в теории нелинейных волн трехмерным уравнением Хохлова – Заболотской – Кузнецова. Решение этого уравнения имеет вид:

$$U = A - Bth \left[ -\frac{\alpha B}{2\beta} \xi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_1}} \chi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_2}} \zeta + \frac{2\beta^2 + \alpha^3 AB^2}{2\alpha\beta B} \eta \right] \quad (17)$$

где  $A, B$  – произвольные постоянные.

С ростом напряженности внешнего магнитного поля, ширина волнового пучка (17) вдоль оси  $\xi$  уменьшается, в то время как вдоль координатных осей  $\eta, \zeta$  возрастает. Ширина вдоль поперечной координаты  $\chi$  сначала убывает, затем начинает возрастать. Однако, в силу сказанного выше об интервале изменения величины  $c_A/c_1$ , практический интерес представляет только участок, где ширина пучка вдоль оси  $\chi$  убывает. Отметим, что значения ширины волнового пучка вдоль оси  $\xi$  на три порядка больше, чем значения ширины волнового пучка вдоль осей  $\chi$  и  $\zeta$ , и на шесть порядков больше чем значения



ширины (которую можно рассматривать, как поправку порядка  $\varepsilon$  к ширине вдоль оси  $\xi$ ) вдоль оси  $\eta$ .

Если внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью  $H_0$  имеет произвольную ориентацию в пространстве, которая определяется углами  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , то вектор суммарного магнитного поля в рассматриваемом случае имеет компоненты (14).

Система уравнений магнитоупругости в первом приближении по  $\varepsilon$  и в этом случае сводится к трехмерному уравнению Хохлова – Заболотской – Кузнецова (16), но теперь его коэффициенты будут зависеть еще и от углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

На Рис. 10, 11 изображены сечения поверхности  $\Delta_\xi(\varphi, \theta)$ , которая представляет собой зависимость ширины волнового пучка вдоль оси  $\xi$  от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , плоскостями  $\varphi = const$  и  $\theta = const$ :

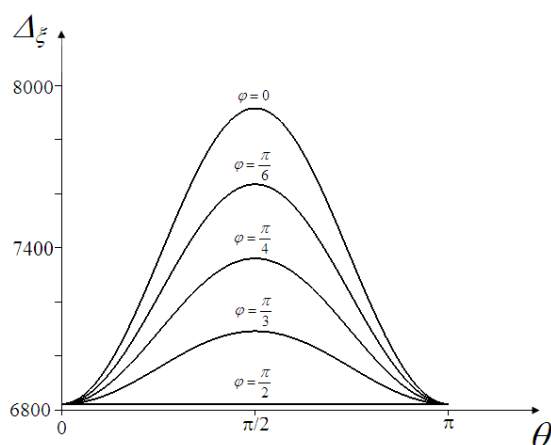


Рис. 10

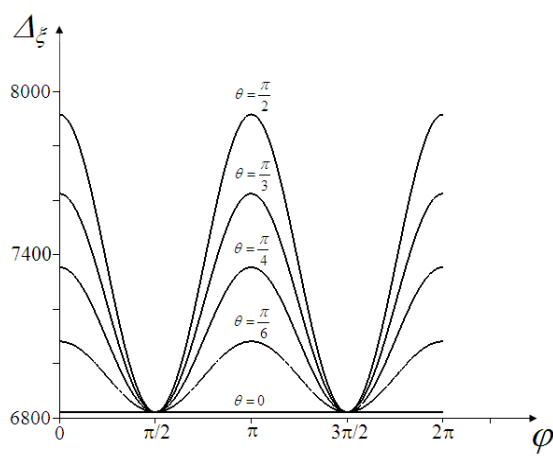


Рис. 11

Из Рис. 10 видно, что с ростом угла  $\varphi$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ширина волнового пучка вдоль оси  $\xi$  убывает. При  $\theta = 0, \pi$  она принимает минимальное значение и не зависит от величины угла  $\varphi$ . При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ширина волнового пучка вдоль оси  $\xi$  принимает максимальное значение.

Из Рис. 11 видно, что с ростом угла  $\theta$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ширина волнового пучка вдоль оси  $\xi$  возрастает, а в зависимости от угла  $\varphi$  принимает свое максимальное значение при  $\varphi = 0, \pi$ . Ширина пучка вдоль оси  $\xi$  при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  принимает минимальное значение и не зависит от величины угла  $\theta$ .

Соответствующие графики для ширин волнового пучка вдоль остальных координатных осей качественно похожи на приведенные выше, с той лишь разницей, что значения углов, при которых ширины принимают минимальные и максимальные значения могут не совпадать с этими значениями для амплитуды.

Для упругой среды, как и для пластины, относительная степень влияния ориентации магнитного поля к его напряженности существенно больше, чем для стержня.

*В Заключении* приводятся основные результаты и выводы по работе.

### **Основные результаты диссертации**

1. Впервые предложена система уравнений магнитоупругости для стержня, с учетом кинетической энергии толщинных колебаний и потенциальной энергии сдвиговых деформаций.

2. Исследовано влияние внешнего магнитного поля и электропроводности материала на дисперсионные и диссипативные характеристики продольной упругой волны, распространяющейся в стержне.

Показано, что для стержня из идеально проводящего материала влияние магнитного поля сводится к изменению фазовой скорости волны: чем больше напряженность магнитного поля, тем больше фазовая скорость волны.

Конечная проводимость материала приводит к появлению мнимой части волнового числа, которая характеризует затухание волны. В случае конечной проводимости имеется две волны, причем одна из них замедлена, а вторая ускорена относительно волны, соответствующей материалу с бесконечной проводимостью. Первая волна распространяется почти без затухания и, с ростом частоты, действительная часть волнового числа значительно преобладает над мнимой. Вторая волна распространяется почти без затухания, но с ростом частоты преобладание действительной части волнового числа над мнимой уменьшается.

3. Система динамических уравнений магнитоупругости для стержня, пластины и упругой трехмерной среды приведены к эволюционным уравнениям относительно продольной деформации, в частных случаях представляющих собой известные модельные уравнения нелинейной волновой динамики.

В случае стержня система уравнений магнитоупругости сводится к одному из уравнений: Кортевега-де Вриза-Бюргерса, Кортевега-де Вриза, Бюргерса и уравнению Римана в зависимости от учета проводимости материала и модели, описывающей упругие колебания стержня.

Если рассматриваемым объектом является пластина, то система уравнений магнитоупругости сводится к уравнению, соединяющему в себе известные двумерные модельные уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова и Кадомцева-Петвиашвили.

Для трехмерной упругой среды эволюционное уравнение представляет собой трехмерное уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова.

4. Исследована эволюция магнитоупругой волны Римана в стержне. Показано, что внешнее магнитное поле стабилизирует простую волну, увеличивая время формирования резкого фронта.

5. В результате аналитических исследований и численного моделирования продемонстрирована возможность формирования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн:
- уединенные волны деформации в стержне;
  - двумерные квазиплоские волновые пучки в пластине;
  - трехмерные квазиплоские волновые пучки в упругой проводящей среде.

Установлены зависимости волновых параметров (амплитуда, скорость, ширина) от величины и пространственной ориентации внешнего магнитного поля, показывающие, что с помощью магнитного поля можно управлять характеристиками локализованных волн.

### **Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах**

*В журналах, рекомендуемых ВАК РФ*

1. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 95 – 100.
2. Мальханов А.О., Ерофеев В.И. Магнитоупругая волна Римана в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т.7. №12. С. 933 – 936.
3. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. №4.
4. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой среде // Электронный журнал «Труды МАИ», 2010, Выпуск № 40.  
(<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=22860>).
5. Кузнецов С.И., Мальханов А.О., Урман Ю.М. Влияние периодических изменений формы сверхпроводящего тела на его динамику в неконтактном магнитном подвесе // Журнал технической физики. 2008. Т. 78. № 12. С. 1– 6.
6. Erofeyev V.I., Malkhanov A.O. Localized magnetoelastic waves formation // International Review of Mechanical Engineering. 2010. Vol. 4. №5. P. 581–585.

*В других изданиях*

7. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Продольные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2010. №1(16). С. 35 – 45.
8. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Двумерные нелинейные магнитоупругие волны в пластине // Труды XXII сессии

Российского акустического общества и научного совета по акустике РАН. М.: Изд-во «Геос». 2010. Т. 1. С. 154 –157.

9. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Мальханов А.О., Семерикова Н.П. Сильно нелинейные магнитоупругие волны в стержне // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2009. №2(15). С.113 – 121.
10. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2009. №2(15). С. 10 – 15.
11. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Воздействие магнитного поля на характер распространения продольных волн в стержне // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2008. №2(13). С. 128 – 138.
12. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Локализация волны деформации под влиянием магнитного поля // Материалы XVI Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова (15-19 февраля, 2010, Ярополец). Чебоксары : ГУП ИПК «Чувашия». 2010. Т.1. С. 66 – 70.
13. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Формирование магнитоупругой волны Римана в стержне // Материалы Всероссийской научно-технической конференции “Современные технологии в кораблестроительном и авиационном образовании, науке и производстве”. Нижний Новгород: Изд-во НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2009. С. 397– 401.
14. Erofeyev V.I., Malkhanov A.O. Nonlinear magnetoelastic waves in rods // Book of abstracts XXXVII Summer School “Advanced Problems in Mechanics”, St. Petersburg, Russia. 2009. P. 59.
15. Erofeyev V.I., Malkhanov A. O. The Impact of the Magnetic Field on the Transmission of Longitudinal Waves in a Rod // Proceedings of the World Congress on Engineering 2010. London. U.K. 2010. Vol. 2. P. 1438 – 1443.
16. Malkhanov A.O. The impact of magnetic field on nonlinear magneto-elastic waves in rods described with Bishop model // Book of abstracts of XXXVII Summer School “Advanced Problems in Mechanics”, St. Petersburg, Russia. 2009. P. 59.
17. Кузнецов С.И., Мальханов А.О., Урман Ю.М. О возможности потери устойчивости пульсирующего сверхпроводящего тела в неконтактном магнитном подвесе // Труды Нижегородского государственного педагогического университета. Серия «Естественные науки». 2008. №1.

18. Erofeyev V.I., Malkhanov A.O. Localized magnetoelastic waves formation // Proceedings of 1<sup>st</sup> International Conference on Mechanical Engineering – ICOMÉ 2010. Virtual Forum. 2010. P. 13 –17.
19. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние ориентации магнитного поля на распространение квазиплоской магнитоупругой волны в пластине // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2010. №2(17). С. 147 – 157.