На правах рукописи

САФОНОВ Алексей Владимирович

КИНЕТИКА ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ДАЛЕКИХ ОТ РАВНОВЕСИЯ

01.04.03 - радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико - математических наук

Нижний Новгород – 2006

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского (ННГУ).

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук Агудов Н.В.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, проф. Музычук О.В.

доктор физ.-мат. наук Силаев А.М.

Ведущая организация: Физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (г.Москва).

Защита диссертации состоится "13" декабря 2006 г. в 15 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского по адресу:

603600, Н.Новгород, ГСП-20, пр. Гагарина, 23, корп.1,
радиофизический факультет, ауд. 420

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан "9" ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.В.Черепенников

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Во многих разделах радиофизики (например, физика джозефсоновских переходов и СКВИДов, бифуркационные переходы под действием флуктуаций и шумов, кинетика многомодовых или мультистабильных систем, эволюция стохастических систем и др.) возникает задача о статистических и временных характеристиках флуктуационных нелинейных динамических систем, находящихся в сильно неравновесных состояниях. Большой интерес и физическую значимость представляют исследования таких неравновесных состояний и кинетики переходных процессов в соответствующих системах. Кроме того, использование моделей неравновесных динамических систем, находящихся под действием флуктуаций, находит свое применение в целом ряде задач химии и биологии (нейробиология, динамика популяций, динамика обмена веществ в клетках).

Фундаментальная научная проблема, на решение которой направлена данная работа, может быть сформулирована в следующем общем виде: рассматривается макроскопическая нелинейная динамическая система, представленная заданным эквивалентным потенциальным профилем, определяющим ряд локально устойчивых состояний системы, и находящаяся под воздействием флуктуаций. Известно (см., напр., Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Статистическая физика, Ч1. – М.: «Наука». – 1976), что в случае достаточно малой интенсивности шума в системах с единственным устойчивым состоянием равновесия флуктуации приводят лишь к незначительным отклонениям некоторой физической величины от ее среднего значения. При наличии же внешних воздействий или в случае неравновесных начальных условий динамическая система выходит из равновесного состояния, в ней возникают различные потоки (массы, заряда, тепла и др.), и ее поведение резко меняется. Изменяются, прежде всего, статистические характеристики движения, появляются качественно новые особенности ее усредненного и флуктуационного поведения: возникают индуцированные шумом переходы от одного состояния к другому, задержки распада метастабильных состояний, появляются новые стационарные неравновесные состояния, зависящие от внешних воздействий, и т.д., изучение которых представляет в настоящее время значительный интерес. Примерами подобных неравновесных состояний нелинейных динамических систем могут служить различные амплитуды колебаний напряженности электромагнитного поля в лазерах, разность фаз двух генераторов в системах фазовой автоподстройки частоты, нестабильные и метастабильные состояния, возникающие при бифуркационных переходах, различные фазовые состояния вещества и др.

Эффективной моделью для исследования особенностей поведения описанных систем является модель движения броуновской частицы (представляющей изображающую точку динамической системы в фазовом пространстве) в заданном потенциальном профиле в сильно-вязкой среде при наличии тех или иных воздействий. В данной модели координата броуновской частицы $x(t)$ подчиняется уравнению Ланжевена (1):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{dU(x)}{h dx} + x(t), \tag{1}$$

где $U(x)$ – потенциал, описывающий систему, η – коэффициент эквивалентной вязкости, $\xi(t)$ – белый гауссовый шум, $<\xi(t)> = 0$, $<\xi(t)\ \xi(t+\tau)> = D\delta(\tau)$, D – интенсивность шума, обычно принимаемая пропорциональной некоторой эквивалентной температуре $D = 2kT/\eta$.

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию статистических характеристик движения броуновских частиц, однако, несмотря на это, на данный момент существует целый ряд открытых вопросов, связанных с особенностями поведения описываемых данной моделью систем. В частности, при исследовании времен достижения броуновскими частицами поглощающих границ или времен переходов через потенциальные барьеры, являющихся в присутствии флуктуаций случайными величинами, большинство авторов в своих работах ограничивалось изучением лишь средних значений указанных величин, оставляя в стороне вопрос об их высших статистических характеристиках. В результате оставался невыясненным вопрос о возможности экспериментального обнаружения полученных данных, поскольку в реальном эксперименте возможно получить лишь некоторую оценку среднего значения случайной величины, состоятельность которой определяется ее дисперсией.

Помимо этого, в работах, опубликованных в последние годы (см., напр., P.Reimann, C.Van den Broeck, H.Linke, P.Hanggi, M.Rubi, and A.Perez-Madrid, Phys.Rev.Lett. -2002. -V.87. -P.010602 и B.Linder, M.Kostur, and L.Schimanky-Geier, Fluct.Noise Lett. -2001. -V.1. -P.R25), при исследовании эффективного коэффициента диффузии в наклонных периодических потенциалах, являющихся адекватной моделью, успешно используемой, например, при исследованиях в твердотельной и джозефсоновской электронике, впервые было показано, что он выражается не только через среднее, но и через дисперсию времени жизни метастабильных или нестабильных состояний, описываемых периодическим потенциалом. Таким образом, знания лишь среднего значения временных характеристик движения броуновских частиц для решения данной задачи недостаточно.

Еще одной проблемой является, например, задача выяснения особенностей поведения времен жизни динамических систем, находившихся в начальный момент времени в неустойчивом состоянии. В самом общем виде данная задача была решена еще в 1933 году в работе Понтрягина и др., однако результатом данной работы являются довольно громоздкие квадратурные формулы, в которые как параметры входят нелинейный потенциальный профиль, описывающий систему, интенсивность флуктуаций и начальное положение броуновской частицы. Непрозрачность выражений для статистических характеристик индуцированных шумом переходных процессов привела к тому, что хотя сами точные формулы известны уже давно, некоторые принципиальные особенности поведения времен переходов через барьер, времен жизни нестабильных и метастабильных состояний и связанных с ними физических величин были обнаружены сравнительно недавно. Так, например, долгое время считалось, что присутствие аддитивного шума способно лишь уменьшать время жизни нестабильного состояния так же, как это происходит в случае распада метастабильного состояния. И лишь несколько лет спустя в ряде работ было продемонстрировано, что при определенных условиях аддитивный шум может стабилизировать нелинейную систему, увеличив среднее время жизни описываемого ею нестабильного состояния, что получило название эффекта задержки распада шумом нестабильных состояний (ЗРШ).

Целью настоящей работы является:

- детальное исследование поведения статистических характеристик индуцированных шумом переходных процессов (как среднего, так и дисперсии времен переходов) аналитическими и численными методами, изучение их зависимости от формы потенциальных профилей, интенсивности флуктуаций и начальных положений броуновских частиц.
- разработка метода получения времен установления стационарной неравновесной концентрации броуновских частиц в системах с источниками и стоками частиц, описываемых потенциальными профилями произвольной формы.
- применение полученных результатов для исследования зависимости эффективного коэффициента диффузии в наклонном потенциале от формы потенциального профиля и интенсивности флуктуаций.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

Детально проанализировано поведение среднего времени первого достижения (СВПД), нелинейного времени релаксации (НВР) и дисперсии времени первого достижения (ДВПД) поглощающих границ броуновскими частицами из неустойчивых состояний, описываемых потенциальными профилями, в которых возникает эффект ЗРШ. Обнаружено различие между теорией и результатами численного эксперимента в случае распада нестабильного состояния, описываемого потенциальным профилем с ямой в той области интенсивности флуктуаций, где наблюдается эффект ЗРШ. Предложен физический механизм для объяснения этого различия. Найдены оптимальные условия для наблюдения эффекта ЗРШ, когда среднее время распада нестабильного состояния максимально, а дисперсия времени распада - минимальна.

Выявленные при исследовании СВПД и ДВПД особенности их поведения позволили обнаружить эффект ускорения диффузии броуновских частиц в ступенчатом кусочно-линейном потенциальном профиле и предложить физический механизм его возникновения. Кроме того, полученное аналитическое выражение для эффективного коэффициента диффузии в ступенчатом кусочно-линейном потенциале для случая малого шума и большого наклона дало возможность вычислить максимальное значение эффективного коэффициента диффузии при возникновении эффекта ускорения диффузии, получить условия на параметры потенциала и интенсивность шума, при которых данный эффект возникает, и обобщить полученные результаты на случай произвольной формы потенциального профиля.

Ранее известный метод нахождения точных временных характеристик нестационарной броуновской диффузии (см., напр., Н.В.Агудов, А.Н.Малахов, Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1993, Т.36, С.148) обобщен на случай систем с источниками и стоками частиц. С помощью этого метода в данной работе впервые определены времена установления стационарной, неравновесной концентрации броуновских частиц в ряде потенциальных профилей.

В дополнение к этому, на основе выявленной связи между временными характеристиками систем нулевым и ненулевым стационарным потоком частиц предложена модификация хорошо известного метода Крамерса для нахождения СВПД и НВР в системах с потенциалом произвольной формы, справедливая для произвольного соотношения высоты потенциального барьера и интенсивности флуктуаций.

Практическая ценность.

Данная работа посвящена изучению поведения статистических характеристик флуктуационных процессов в нелинейных динамических системах. Аналитическими и численными методами исследованы их зависимость от формы потенциального профиля, описывающего конкретную физическую систему, интенсивности флуктуаций и начального положения броуновских частиц.

Полученные результаты имеют как теоретическую, так и практическую значимость. Они могут могут быть использованы при анализе широкого круга физических (а так же химических и биологических) нелинейных систем, описываемых с помощью модели броуновской диффузии в потенциальных полях.

Известно, например, что наличие флуктуаций в устройствах джозефсоновской электроники приводит к конечному времени жизни единицы информации, записанной в джозефсоновскую ячейку памяти, к случайным срабатываниям логических элементов и к разбросу времени прихода сигналов по джозефсоновским линиям передачи, к ошибкам измерения магнитного потока, к конечности ширины линии и падению мощности джозефсоновских генераторов. Поэтому проведенное в настоящей работе исследование зависимости среднего и дисперсии времени переходов, а так же эффективного коэффициента диффузии броуновской частицы в наклонных периодических потенциалах, являющейся часто используемой моделью при изучении джозефсоновских контактов, от величины интенсивности теплового шума может быть использовано производителями устройств джозефсоновской электроники с целью улучшения их свойств. Кроме этого, модель броуновской диффузии в наклонных периодических потенциалах используется при исследовании влияния шумов на работу систем фазовой автоподстройки частоты. Таким образом, полученные в данной диссертации результаты могут быть использованы так же для оптимизации параметров данных систем.

В дополнении к этому, предложенный в настоящей работе метод получения точных временных характеристик в системах с источниками и стоками частиц может быть использован для исследования времен установления неравновесных стационарных состояний в подобных системах, а так же для решения проблемы с их численным моделированием, возникающей вследствие невозможности их описания с помощью уравнения Ланжевена.

Апробация результатов работы.

Основные результаты работы доложены диссертантом на четырех научных конференциях по радиофизике в ННГУ (2000-2004 гг.) и трех международных конференциях SYNCRO-2002 (Саратов, Россия), Noise in Condensed Matter and Complex Systems (Palermo, Italy), Complexity, Metastability and Nonextensivity (Erice, Italy). Результаты докладов опубликованы в Трудах конференций.

По теме диссертации опубликованы: две статьи в журнале “Fluctuations and Noise Letters” (2003, 2005), одна статья в журнале “Journal of Physics Letters A” и одна статья в журнале “Изв. ВУЗов. Радиофизика” (2003).

Публикации.

Основные результаты диссертации изложены в работах [1]-[14].

Структура и объем работы: Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем работы составляет 100 страниц печатного текста, включая 45 рисунков и список литературы из 81 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* сформулирована постановка задачи в общем виде, освещено современное состояние проблемы изучения флуктуационных процессов в нелинейных динамических системах, обоснована актуальность темы исследования и кратко изложено содержание работы.

В первой главе диссертации аналитическими и численными методами проведено исследование эффекта ЗРШ нестабильных состояний, описываемых полиномиальными потенциалами.

В *разделе 1.1* дано определение эффекта ЗРШ, заключающегося в увеличении среднего времени жизни нестабильного состояния с ростом интенсивности шума в системе, и приведены примеры простейших систем, в которых он возникает.

В *разделе 1.2* для систем, описываемых симметричными потенциальными профилями вида

$$U(x) = -\frac{ax^k}{k}, \qquad \text{где } a > 0,\ k - \text{четное}, \qquad (2)$$

вычислены точные значения СВПД и НВР, выраженные через гипергеометрические и гамма функции и справедливые для произвольной интенсивности шума и любого начального положения системы. Показано, что времена распада нестабильных состояний, для которых $x_0 \neq 0$, являются немонотонными функциями интенсивности флуктуаций, и содержат участки, где с ростом интенсивности шума происходит увеличение среднего времени жизни этих состояний. В случае большой интенсивности флуктуаций для СВПД и НВР получены асимптотические выражения в виде ряда по параметру $1/q$, где q – интенсивность шума. Проведено сравнение полученных результатов с данными численного эксперимента, показано их полное согласование.

В *разделе 1.3* аналогичные результаты получены для систем, описываемых антисимметричными потенциальными профилями вида

$$U(x) = -\frac{ax^k}{k}, \qquad \text{где } a > 0,\ k - \text{нечетное}. \qquad (3)$$

В *разделе 1.4* рассмотрен особый класс систем с метастабильным состоянием, описываемых потенциальным профилем с барьером вида

$$U(x) = -\frac{x^3}{3} + x \quad (4)$$

Известно, что СВПД и НВР, как функции интенсивности флуктуаций, в подобных системах при определенных начальных условиях имеют особенность поведения: при интенсивности шума, стремящейся к нулю, времена распада начального нестабильного состояния такой системы стремятся к бесконечности. В *разделе 2.4* показано, что для такого случая возникает расхождение между данными численного эксперимента и теоретическими предсказаниями и предложен физический механизм его возникновения. На основе полученных результатов сделан вывод о том, что эффект ЗРШ, предсказанный теоретически, не всегда может быть обнаружен в реальном эксперименте.

С целью выяснений условий, при которых такое обнаружение возможно, в *разделе 1.5* проводится исследование зависимости ДВПД от интенсивности флуктуаций и начального положения системы на примере эффекта ЗРШ, возникающего параболическом потенциале

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} \quad (5)$$

и в кусочно-линейном потенциальном профиле с барьером вида:

$$U(x) = \begin{cases} hx, & x \le a, (h > 0), \\ -hx + 2a, & a \le x \le L. \end{cases} \quad (6)$$

В обоих случаях показано, что ДВПД может быть немонотонной функцией интенсивности шума, причем для случая кусочно-линейного потенциального профиля это возможно даже, если первоначально частица располагалась внутри потенциального барьера. Для потенциального профиля (6) получены асимптотические выражения для ДВПД в пределе малого шума для различных начальных положений броуновской частицы. Это дало возможность обнаружить ту область начальных условий, где стандарт времени первого достижения значительно превосходит СВПД в области малого шума, что позволяет объяснить отсутствие в численном эксперименте эффекта ЗРШ, который, должен был возникнуть согласно теоретическим расчетам. Так же в настоящем разделе найдены такие начальные положения броуновских частиц, при которых условия наблюдения эффекта ЗРШ становятся оптимальными.

В *разделе 1.6* приведены выводы к первой главе.

Во второй главе проведено исследование временных характеристик в системах с источниками и стоками частиц, в которых при определенных условиях могут возникать стационарные неравновесные распределения плотности вещества. Подобные системы, описываемые неоднородным уравнением Фоккера-Планка (УФП) используются в качестве моделей при описании, например, процессов ядерного синтеза, диффузии протеинов в микропорах, фотопроцессов на поверхности раздела "газ - твердое тело" и пр.

В *разделе 2.1* получено точное нестационарное решение неоднородного УФП в модельной задаче с постоянным потенциалом, и с его помощью определены времена установления стационарной плотности и потока частиц в подобной системе.

В *разделе 2.2* рассмотрены системы, описываемые потенциальным профилем произвольной формы. В этом случае общее нестационарное решение УФП неизвестно, поэтому в данном разделе для нахождения временных характеристик разработан метод, являющийся обобщением и дальнейшим развитием подхода, предложенного ранее в работах Малахова А.Н., позволяющий находить точные времена установления стационарной плотности частиц без использования нестационарного решения неоднородного уравнения УФП.

В *разделе 2.3* на основе выявленной связи временных характеристик в системах с фиксированным числом частиц и с постоянным во времени источником частиц, предложена модификация хорошо известного метода Крамерса, позволяющая отыскивать времена перехода броуновских частиц через потенциальный барьер. Упомянутый метод справедлив лишь в случае малой по сравнению с высотой барьера интенсивности шума, в то время как предложенная модификация дает точное значение времени перехода для произвольного соотношения между интенсивностью флуктуаций и высотой потенциального барьера.

В *разделе 2.4* проведены вычисления времен установления стационарных неравновесных плотностей броуновских частиц в конкретных потенциалах.

В *разделе 2.5* приведены выводы ко второй главе.

В третьей главе исследован эффективный коэффициент диффузии D_{eff}, описывающий расплывание броуновских частиц, диффундирующих в наклонных периодических потенциалах. В работах Л.Шеманского-Гейера (L.Schimansky-Geier) и П.Хенгги (P.Hanggi), опубликованных в последние годы, впервые было получено точное выражение для D_{eff}, связывающее его со средним и дисперсией времен перехода броуновских частицам через барьер, описываемый наклонным периодическим потенциалом. Кроме того, в указанных работах было продемонстрировано, что эффективный коэффициент диффузии в некоторых случаях может иметь немонотонную зависимость от величины наклона периодического профиля и интенсивности флуктуаций. Однако вследствие математической сложности задачи авторам работ не удалось найти ни условия возникновения обнаруженной немонотонности, ни механизма ее появления.

В *разделе 3.1* сформулирована постановка задачи исследования эффективного коэффициента диффузии в модельном кусочно-линейном наклонном потенциале $U(x) = V(x)\text{-}Fx$, где $V(x)$ – периодическая функция с периодом L:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ E, & a < x < a+b, \\ 0, & a+b \le x \le L. \end{cases} \tag{7}$$

В *разделе 3.2* найдено асимптотическое выражение для D_{eff} в случае малой интенсивности шума и большой величины наклона потенциального барьера. Предложен физический механизм возникновения немонотонности в поведении эффективного коэффициента диффузии, как функции интенсивности флуктуаций, сформулированы условия на параметры потенциала, при которых немотонность возникает и вычислено максимально возможное значение эффективного коэффициента диффузии, как функции интенсивности шума, превосходящее значение коэффициента диффузии в свободном пространстве.

В *разделе 3.3* полученные результаты обобщены на случай потенциального профиля произвольной формы.

В *разделе 3.4* приведены выводы к третьей главе.

В *заключении* приведены основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Выведены точные аналитические выражения для среднего времени первого достижении (СВПД) и нелинейного времени релаксации (НВР) распада неустойчивых состояний, описываемых полиномиальными потенциальными профилями, в которых возникает эффект ЗРШ. Обнаружено различие между теорией и результатами численного эксперимента в случае распада нестабильного состояния, описываемого потенциальным профилем с ямой. Предложен физический механизм для объяснения этого различия.

2. Исследована дисперсия времени первого достижения (ДВПД) для ряда конкретных потенциалов, в которых возникает эффект ЗРШ. Показано, что ДВПД является немонотонной функцией интенсивности флуктуаций. Предложен физический механизм для объяснения этой немонотонности. Найдены оптимальные условия для наблюдения эффекта ЗРШ, когда среднее время распада нестабильного состояния максимально, а дисперсия времени распада - минимальна.

3. Получено точное нестационарное решение неоднородного уравнения диффузии в модельной задаче с постоянным потенциалом, источником и стоком частиц. На основе полученного решения исследованы времена установления стационарных неравновесных плотности и потока броуновских частиц в системе с постоянным потенциалом, источником и стоком частиц. Показано, что во внутренних точка среды поток устанавливается быстрее, чем плотность частиц.

4. Получены точные аналитические выражения для времен установления стационарных неравновесных плотностей броуновских частиц, диффундирующих в произвольном потенциале в присутствии источника и стока частиц.

5. На основе выявленной связи между временными характеристиками систем нулевым и ненулевым стационарным потоком частиц предложена модификация хорошо известного метода Крамерса для нахождения СВПД и НВР в системах с потенциалом произвольной формы, справедливая для произвольного соотношения высоты потенциального барьера и интенсивности флуктуаций.

6. Обнаружен эффект ускорения диффузии броуновских частиц в ступенчатом кусочно-линейном потенциальном профиле и предложен физический механизм его возникновения.

7. Получено аналитическое выражение для эффективного коэффициента диффузии в ступенчатом кусочно-линейном потенциале для случая малого шума и большого наклона. Для данного потенциала вычислено максимальное значение эффективного коэффициента диффузии при возникновении эффекта ускорения диффузии и получены условия на параметры потенциала и интенсивность шума, при которых данный эффект возникает. Полученные результаты обобщены на случай произвольной формы потенциального профиля.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Агудов Н.В., Сафонов А.В. Связь временных характеристик в системах с нулевым и ненулевым стационарным потоком. // Актуальные проблемы статистической радиофизики. -2002. -Т.1. -С.89-94.
2. Агудов Н.В., Сафонов А.В. Время установления стационарной неравновесной плотности броуновских частиц в среде с источником и стоком. // Изв. ВУЗов. Радиофизика -2003. -Т.46. -С.82-90.
3. Агудов Н.В., Сафонов А.В. Среднее и дисперсия времени неустойчивых и метастибильных состояний //Актуальные проблемы статистической радиофизики. -2003. -Т.2. -С.118-124.
4. Agudov N.V. and Safonov A.V. Relaxation times in systems with zero and non-zero stationary flow // Fluct.Noise Lett. -2003, – V.3. – P.L107-L112.
5. Agudov N.V., Mannella R., Safonov A.V., Spagnolo B. Noise delayed decay of unstable states: theory versus numerical simulations // J.Phys. A: Math.Gen. –2004. –V.37. –P.6213-6218.
6. Agudov N.V. and Safonov A.V. Acceleration of diffusion in subcritically tilted periodic potentials. // Fluct.Noise Lett. –2005. –V.5. – P.L283-L290.
7. Агудов Н.В., Сафонов А.В. Времена установления стационарного неравновесного распределения броуновских частиц // Труды (пятой) научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения А.А.Андронова. Ред. А.В.Якимов. - Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2001. -2001. -С.201-202.
8. Агудов Н.В., Сафонов А.В., Маннелла Р., Спаньоло Б. Увеличение времени жизни неустойчивых состояний под действием шума // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике. 7 мая 2002 года. Ред. А.В.Якимов. - Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2002. -С. 270–272.
9. Agudov N.V. and Safonov A.V. Relaxation time characteristics in systems with zero and non-zero stationary flow // Proceedings of the International

Conference on Synchronization of Chaotic and Stochastic Oscillations 2002. September 22-28, 2002 Saratov, Russia, p.51.

10. Agudov N.V., Mannella R., Safonov A.V., Spagnolo B. Noise delayed decay of unstable states: theory versus numerical simulations // Proceedings of the International Conference on Synchronization of Chaotic and Stochastic Oscillations 2002. September 22-28, 2002 Saratov, Russia, p.13.
11. Агудов Н.В., Сафонов А.В., Якимов А.В. Среднее и дисперсия времени распада неустойчивого состояния линейной системы // Труды (седьмой) научной конференции по радиофизике. 7 мая 2003 года. Ред. А.В.Якимов. - Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2003. - С. 218–220.
12. Агудов Н.В., Сафонов А.В. Коэффициент диффузии в наклонном переодическом потенциале // Труды (восьмой) научной конференции по радиофизике. 7 мая 2004 года. Ред. А.В.Якимов. - Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2004. - С.160-161.
13. Agudov N. and Safonov A. Diffusion coefficient in tilted potentials in a small noise limit // Proceedings of the International Workshop on Noise in Condensed Matter and Complex Systems. July 26-29, 2005 Palermo, Italy, p.20.
14. Safonov A. Influence of shape of barrier on diffusion in periodic potentials // Proceedings of the 31st International Workshop on Complexity, Metastability, and Nonextensivity. July 20-26, 2005 Erice, Italy, p.20.

ОГЛАВЛЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ