На правах рукописи

ФЕДОТОВ ИГОРЬ АНАТОЛЬЕВИЧ

СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2011

Работа выполнена на кафедре численного и функционального анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой численного и функционального анализа факультета ВМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Баландин Дмитрий Владимирович

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук, профессор, зам. директора Института машиноведения РАН им. А.А. Благонравова (Нижегородский филиал)
Ерофеев Владимир Иванович

доктор технических наук, профессор, зав кафедрой прикладной математики факультета ВМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Комаров Валентин Николаевич

Ведущая организация Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Защита состоится «__» __________ 2011 г. в __:__ч. на заседании диссертационного совета Д 212.166.13 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «__» __________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент В.П. Савельев

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы

Проблема снижения колебаний конструкций и механизмов стоит достаточно давно и все более усложняется при переходе к большим скоростям, частотам и нагрузкам. Предложено значительное число технических решений, направленных на снижение вибраций, тем не менее, задача синтеза систем, обеспечивающих эффективную виброзащиту и обладающих ограниченными габаритами, остается актуальной до сих пор.

Существуют два принципиально различных способа виброзащиты: виброизоляция и динамическое гашение колебаний. В первом случае, защищаемый объект изолируется от виброактивного источника посредством специальных устройств, называемых изоляторами. Во втором случае к виброактивному источнику прикладываются дополнительные силовые воздействия с целью уменьшения амплитуды его колебаний.

Устройства, которые обеспечивают такие дополнительные воздействия, называются динамическими гасителями колебаний. Динамические гасители колебаний обычно подразделяют на активные и пассивные, то есть функционирующие либо за счет дополнительных источников энергии, либо за счет механической энергии самой системы. Пассивные динамические гасители более привлекательны из-за простоты технической реализации и отсутствия дополнительных энергозатрат, однако существенным их недостатком являются ограниченные возможности виброзащиты в широком диапазоне частот. Подробное изложение теории динамических гасителей приведено в монографии Б.Г.Коренева, Л.М.Резникова ("Динамические гасители колебаний", 1988), в которой показано, что пассивные динамические гасители обеспечивают эффективное гашение колебаний объекта в весьма узкой полосе частот. Дополнительные возможности по расширению полосы частот открываются в связи с применением так называемых полуактивных динамических гасителей, в которых предусмотрена возможность автоматической подстройки его параметров. Полуактивные динамические гасители (ПАДГ) в зависимости от способа изменения параметров подразделяются на несколько типов: ПАДГ с изменяемой жесткостью, в которых изменение жесткости реализуется либо посредством специальных механизмов, либо за счет использования новых специальных материалов; ПАДГ с варьируемым демпфированием, основанные на использовании магнитореологического или электрореологического эффекта; ПАДГ с изменяемой жесткостью и изменяемым демпфированием, основанные на использовании пьезоэлектрического эффекта.

Существенное повышение эффективности динамических гасителей возможно за счет применения систем управления (активные динамические гасители). Использование дополнительной энергии даёт возможность реализации более сложных законов управления, вследствие чего достигаются лучшие результаты. На первый план здесь выходят задачи синтеза активного динамического гасителя. Традиционно ставилась задача линейно-квадратичного регулятора, которая решается с использованием уравнений Рикатти, но этот подход не даёт решать более широкие задачи в силу присущих ему ограничений на вид функционала и свойств динамической системы. Применение в настоящей работе теории H_∞-управления и аппарата линейных матричных неравенств позволило поставить и решить более общую задачу, а именно задачу синтеза активного динамического гасителя колебаний, обеспечивающего эффективное гашение в широкой полосе частот. Помимо этого, данный подход позволяет синтезировать как активные, так и пассивные динамические гасители колебаний.

Работа опирается на труды известных авторов в области динамического гашения и гашения колебаний механических систем: Коренева Б.Г., Резникова Л.М., Тимошенко С.П., Коловского М.З., Синёва А.В., Гордеева Б.А., Ерофеева В.И., Баландина Д.В., Когана М.М., Spencer B.F. и др.

Цель работы

Цель настоящей работы состоит в создании единого методического и программного обеспечения для синтеза пассивных и активных динамических гасителей колебаний, эффективных в широкой полосе частот внешнего возмущения.

Задачи работы

На основе сформулированной выше цели были поставлены следующие задачи:

1. Постановка задачи виброгашения как задачи теории управления.
2. Решение поставленной задачи методами H_∞-управления, для учета широкой области частот внешнего возмущения.
3. Синтез динамических гасителей как регуляторов по состоянию и по измеряемому выходу.
4. Сравнение качества полученных динамических гасителей с известными ранее аналогами.
5. Выработка практических рекомендаций для реализации систем виброгашения.
6. Создание прикладного программного обеспечения для синтеза динамических гасителей колебаний на основе используемого подхода.

Методы исследования

Для теоретического исследования был использован подход H_∞-оптимизации с применением метода функции Ляпунова. Для решения поставленных задач использовались методы полуопределенного программирования, в частности, аппарат линейных матричных неравенств. При моделировании и численном анализе использовалась система Matlab с интерфейсным пакетом YALMIP и решателем SeDuMi. При построении программного обеспечения привлекался компилятор gcc для языков C/C++ и Fortran, а также библиотека линейной алгебры lapack.

Научная новизна

В данной работе получены и выносятся на защиту следующие результаты:

1. Математическая модель механической системы и постановка задачи синтеза активного динамического регулятора.

2. Метод синтеза динамических гасителей колебаний, как регуляторов пространства состояний с использованием теории H_∞-управления и аппарата линейных матричных неравенств.

3. Полученные гасители как регуляторы по состоянию и по измеряемому выходу, а также регуляторы пониженного порядка и статический регулятор по выходу.

4. Амплитудно-частотные характеристики для полученных регуляторов и проведенный анализ эффективности гасителей для систем с упруговязким инерционным основанием.

5. Созданный программный пакет для синтеза динамических гасителей колебаний.

Достоверность результатов

Достоверность результатов, достигнутых в работе, обеспечивается проверкой с помощью средств пакета Matlab и библиотеки линейной алгебры lapack. Для проверки полученных регуляторов строятся амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы, с последующим анализом эффективности полученных гасителей. Для проверки правильности используемого нами подхода рассмотрен пример с реализацией пассивного динамического гасителя, для которого ранее уже были получены оптимальные настройки. Полученный в этом случае гаситель совпал с классическим аналогом (абсолютная погрешность: $4 \cdot 10^{-5}$, относительная погрешность: $1.2 \cdot 10^{-3}$).

Точность результатов разработанного программного пакета зависит от точности используемого пакета lapack и точности решений линейных матричных неравенств. с помощью метода внутренней точки.

Практическая ценность

Практическая ценность работы состоит в описании способа настройки динамических гасителей колебаний, эффективных в широкой полосе частот внешнего возмущения, как H_∞ регуляторов. Показан способ повышения эффективности динамических гасителей, синтезированных на основе предложенной модели и основанный на использовании фильтра низких частот. Создано программное обеспечение для синтеза динамических гасителей колебаний, как в виде самостоятельного приложения, так и в форме подключаемого модуля в системе Matlab. В рамках создания программы для расчета динамических гасителей колебаний было создано программное обеспечение для операций над линейными матричными неравенствами с возможностью промышленного использования.

Апробация полученных результатов

Основные результаты были представлены на следующих научных мероприятиях:

1. Научная конференция учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 27-30 ноября 2007 г.

2. VIII Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 22–26 сентября 2008 г.

3. Международная конференция «Управление динамическими системами», Институт проблем механики Российской академии наук, Москва, 26-30 января 2009 г.

Публикации и личный вклад автора

По теме диссертации опубликовано 3 печатных работы в журналах из перечня ВАК. В совместных работах научному руководителю принадлежит постановка задачи и идея применения дополнительного фильтра для улучшения качества процессов управления. Разработка алгоритмов, программного обеспечения и численное моделирование принадлежит автору.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №07-01-00481), а также программы У.М.Н.И.К.-09(10) на проведение НИОКР по госконтракту

№6537р/8815, по теме «Разработка программного обеспечения для синтеза динамических гасителей колебаний».

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, 3 глав и заключения. Объём работы 100 страниц, в тексте содержится 26 рисунков, 7 таблиц; библиографический список включает 50 источников.

Результаты работы и их обсуждение

Во введении приводится обоснование работы, её актуальность, научная новизна и практическая ценность, представлена структура диссертации и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе дается введение в задачу виброизоляции и динамического гашения колебаний и ставится задача о динамическом гасителе колебаний. За основу взята задача динамического гашения для системы без вязкого трения (рис.1.б), поскольку для этого случая удается получить настройки гасителя, обеспечивающего полное гашения колебаний на выбранной частоте. Присутствие в системе вязкого трения не позволяет получить таких показательных результатов.

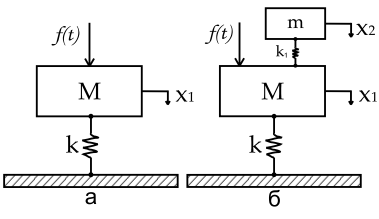

Рис. 1: Схема простейшей виброизоляции (а) и динамического гасителя(б).

Математическая модель для этой системы может быть записана как:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_1(x_1 - x_2) + f(t), \\ m\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1). \end{cases} \tag{1}$$

Нас в первую очередь будет интересовать сила, действующая на основание системы, обозначим её как $R(\omega)$. Если представить возмущающую силу как $f(t) = Fe^{i\omega t}$, а решение системы искать в виде $x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$, то значение для $R(\omega)$ можно записать в следующем виде:

$$R(\omega) = \frac{F\omega_1^2(\omega_2^2 - \mu\omega^2)}{\omega_1^2(\omega_2^2 - \mu\omega^2) - \omega^2(\omega_2^2 - \mu\omega^2) - \mu\omega^2\omega_2^2}, \tag{2}$$

где $\omega_1^2 = \frac{k}{M}$ и $\omega_2^2 = \frac{k_1}{M}$, $\mu = \frac{m}{M}$. Нас интересует в этой формуле условие достижения минимума этой функции, минимум в нуле обеспечивается при условии $\omega_2^2 = \mu\omega^2$. Таким образом, при любой частоте ω можно подобрать параметры k_1, m такие, что будет обеспечиваться полное гашение колебаний объекта. Такой эффект часто называют эффектом антирезонанса. На этом и основана методика настройки простейшего динамического гасителя.

Если переписать уравнение (2) в более удобной форме, введя новые переменные $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$ и $\Omega_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, получим:

$$R(\Omega) = \frac{F(\Omega_0^2 - \mu\Omega^2)}{(\Omega_0^2 - \mu\Omega^2) - \Omega^2(\Omega_0^2 - \mu\Omega^2) - \mu\Omega^2\Omega_0^2}. \tag{3}$$

При параметрах $\Omega_0^2 = 0.1, \mu = 0.1$, можно построить амплитудно-частотную характеристику системы с настроенным гасителем (рис.2). Из

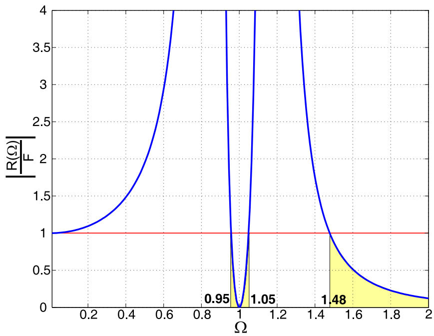

Рис. 2: Амплитудно-частотная характеристика системы с простейшим динамическим гасителем.

графика хорошо видно, что на выбранной частоте действительно достигается полное гашение, но отрицательным эффектом является появление в системе двух резонансных пиков по обе стороны от рабочей частоты. Данный эффект значительно препятствует широкому распространению динамических гасителей подобного рода. Из этого же рисунка можно оценить диапазоны эффективности динамического гасителя, это относительно узкая область около рабочей частоты $\Omega = 1$ и при некотором пороговом значении частоты $\Omega > 1.48$.

Исходя из недостатков представленного выше гасителя, можно сформулировать задачу синтеза активного динамического гасителя. Динамический гаситель колебаний будем рассматривать как некую управляющую систему, вырабатывающую сигнал управления, тогда уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -kx_1 + U + f(t), \\ m\ddot{x}_2 = -U, \end{cases} \tag{4}$$

где U-управление из класса линейных обратных связей, подлежащие в дальнейшем определению. При действии гармонического возмущения $f(t) = Fe^{i\omega t}$, как и ранее обозначим через $R(\omega)$ амплитуду силы, равной kx_1 и действующей на основание. Тогда управление U будем искать из класса линейных обратных связей по состоянию/выходу системы, минимизирующее величину

$$\eta = \max_{\omega \in [0,\infty)} \left| \frac{R(\omega)}{F} \right|. \tag{5}$$

В системе (4) введем новые безразмерные переменные и параметры по формулам:

$$t' = t\sqrt{\frac{k}{M}}, x_1' = \frac{k}{F}x_1, x_2' = \frac{k}{F}x_2, u = \frac{U}{F}, \mu = \frac{m}{M}, \Omega = \omega\sqrt{\frac{M}{k}}. \tag{6}$$

В новых переменных (с опусканием штрихов) система (4) при гармоническом воздействии $f(t) = Fe^{i\omega t}$ примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -x_1 + u + e^{i\Omega t}, \\ \mu\ddot{x}_2 = -u. \end{cases} \tag{7}$$

Сила, действующая на основание, в новых переменных представляется как Fx_1; амплитуду переменной x_1 при гармоническом воздействии обозначим

$h(\Omega)$. Итак, задача синтеза активного гасителя колебаний в новых переменных формулируется в виде: в классе обратных связей по состоянию/выходу системы (7) найти управление u, минимизирующее величину

$$\eta = \max_{\Omega\in[0,\infty)} |h(\Omega)|\,. \tag{8}$$

Заметим, что поскольку $h(0) = 1$, то при любом управлении справедливо неравенство $\eta \geq 1$.

Данную задачу далее предлагается решать как задачу H_∞-управления, методами линейных матричных неравенств, широко распространенными в настоящее время. В связи с чем в первой главе приводится также введение в линейные матричные неравенства.

Во второй главе дается решение поставленной выше задачи как задачи H_∞-управления. Для этого выражение (7) переписывается в стандартной управляемой форме:

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2e^{i\Omega t}, \tag{9}$$

где x- вектор с компонентами x_1, x_2, x_3, x_4, а матрицы A, B_1, B_2 таковы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Наряду с (9) рассмотрим систему с нулевыми начальными условиями:

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2\nu, \tag{11}$$

где $\nu = \nu(t)$- возмущение, действующее на управляемую систему, принадлежащее классу интегрируемых с квадратом функций. Определим для системы (11) управляемый выход

$$z = Cx + Du. \tag{12}$$

тогда стандартная задача H_∞-управления состоит в следующем: для системы (11) найти управление u в форме обратной связи такое, что для заданного значения γ выполняется неравенство

$$\tfrac{\|z\|}{\|\nu\|} < \gamma, \quad \forall\nu \neq 0, \tag{13}$$

где норма $\|\xi\|$ вектор-функции $\xi(t)$ определяется как

$$\|\xi\| = \sqrt{\int\limits_0^\infty \xi^T(t)\xi(t)dt}. \tag{14}$$

Известно, что задача H_∞-управления может быть поставлена следующим образом. Обозначим $H(s)$ передаточную матрицу от входа ν к выходу z системы (11), (12) при управлении u, тогда эквивалентная постановка задачи имеет вид: найти такую матрицу обратной связи Θ, что

$$\max_{\Omega\in[0,\infty)} \sigma[H(i\Omega)] < \gamma. \tag{15}$$

где σ обозначает максимальное сингулярное число матрицы $H(i\Omega)$. В частном случае, когда z- скалярный выход, а ν- скалярный вход, передаточная матрица $H(s)$ является скалярной функцией s и, следовательно, $\sigma[H(i\Omega)] = |H(i\Omega)|$. Наряду с указанной задачей часто рассматривают задачу оптимального H_∞-управления, состоящую в выборе матрицы обратной связи Θ, минимизирующей величину γ в неравенствах (13) и (15).

Вернемся к задаче о синтезе активного гасителя колебаний. Очевидно, в этой задаче $z = x_1$, т.е. в соответствие с общим выражением (12) в данном случае при вычислении управляемого выхода $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, D=0. Заметим также, что введенная выше амплитуда переменной x_1 при гармоническом воздействии, обозначенная $h(\Omega)$, удовлетворяет соотношению $h(\Omega) = H(i\Omega)$. Таким образом, согласно выражениям (8) и (15) задача о синтезе активного динамического гасителя колебаний может быть переформулирована как задача оптимального H_∞-управления.

Далее решается стандартная задача H_∞-управления и находятся динамические гасители как регуляторы по состоянию так и как регуляторы по измеряемому выходу.

Синтез оптимального H_∞ регулятора по состоянию сводится к поиску матрицы обратной связи Θ, такой, что управление $u = \Theta x$ обеспечивает выполнение неравенства (15), при минимально возможной величине γ. В терминах линейных матричных неравенств это требование обеспечивается, если разрешима следующая система линейных матричных неравенств (относительно матриц Y, Z):

$$\begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_1^T + B_1 Z & B_2 & YC^T \\ B_2^T & -\gamma & 0 \\ CY & 0 & -\gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{16}$$
$$Y = Y^T > 0.$$

Тогда параметры матрицы обратной связи определяются соотношением $\Theta = ZY^{-1}$. На рисунке 3 представлены амплитудно-частотные характеристики системы (11) с найденными матрицами регулятора по состоянию Θ и различными значениями параметра μ. где функция $(h_{uf}(\Omega))$ - переда-

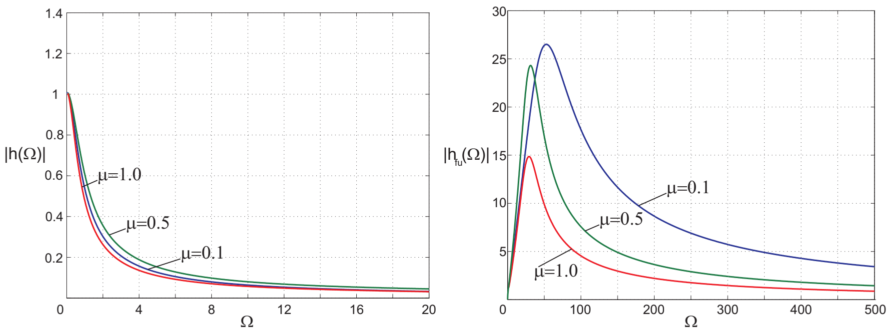

Рис. 3: Амплитудно-частотные характеристики системы с активным динамическим гасителем, как регулятором по состоянию.

точная функция управления к возмущению и записывается как:

$$h_{uf}(s) = \Theta(sI - (A + B_1\Theta))^{-1} B_2. \tag{17}$$

Как следует из этого рисунка, амплитуда силы, действующей на основание, меньше 1 при всех частотах $(0, \infty)$, т.е. активный динамический гаситель обеспечивает эффективную защиту основания во всей полосе частот. Однако, в области низких частот $\Omega \leq 1$, наиболее важной и сложной для виброзащиты, эффективность динамического гасителя невысока, т.к. $|h(\Omega)| \approx 1$ (амплитуда, силы действующей на основание, близка к амплитуде внешней силы). Для устранения этого эффекта добавим в исходную систему еще один динамический элемент, имеющий смысл фильтра низких частот. Другими словами, к системе уравнений (7) добавим уравнение вида

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - y + x_1, \tag{18}$$

где y- дополнительная переменная, описывающая динамику фильтра, на вход которого подается переменная x_1. Передаточная функция $w(\Omega)$ для системы (18) от входа x_1 к выходу, равному $\delta\dot{y}$, имеет вид

$$w(\Omega) = \frac{\delta i\Omega}{-\Omega^2 + 1 + \delta i\Omega}. \tag{19}$$

Теперь вместо задачи минимизации максимальной по всем частотам амплитуды силы, действующей на основание, будем рассматривать задачу синтеза активного динамического гасителя, минимизирующего величину

$$\xi = \max_{\Omega\in[0,\infty)} |w(\Omega)h(\Omega)|. \tag{20}$$

Эта задача также может быть сформулирована как задача оптимального H_∞-управления. Действительно, рассмотрим систему с дополнительным элементом (фильтром)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -x_1 + u + e^{i\Omega t}, \\ \mu\ddot{x}_2 = -u, \\ \ddot{y} = -\delta\dot{y} - y + x_1. \end{cases} \tag{21}$$

Для этой системы, представленной в стандартной форме управляемой системы (9), имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\delta \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\mu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Управляемый выход z представляется как $z = Cx$, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.Решение задач синтеза управления по измеряемому состоянию системы $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & y & \dot{y} \end{pmatrix}$ при $\mu = 0.1$, с использованием техники линейных матричных неравенств дает результаты, представленные на (рис. 4). На каждом из рисунков для различных значений параметра δ представлены две амплитудно-частотные характеристики. Одна характеристики (штриховая линия) показывает амплитуду переменной $\delta\dot{y}$, а другая (сплошная линия) - амплитуду переменной x_1. Как следует

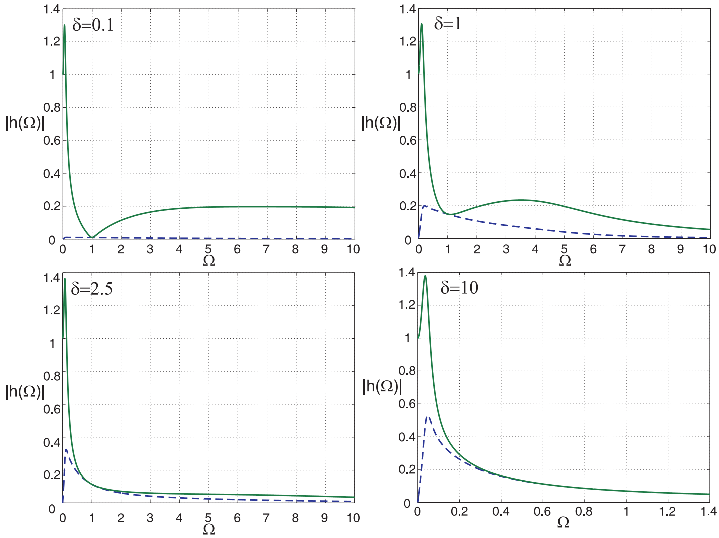

Рис. 4: Амплитудно-частотные характеристики системы с активным динамическим гасителем и разными фильтрами.

из рисунков построенные активные динамические гасители колебаний обеспечивают эффективную защиту основания при $\Omega \geq 0.1$. При $\Omega < 0.1$ эффективность динамических гасителей падает, а в некоторой малой окрестности $\Omega = 0$ они оказываются неэффективными. Таким образом, применение фильтра позволяет существенно повысить эффективность виброзащиты в области околорезонансных частот, в окрестностях около 0 несущественное превышение уровня колебаний может быть допустимо для реальных систем.

Регулятор по выходу k-го порядка имеет следующую форму записи:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r \xi, \\ u &= C_r x_r + D_r \xi, \end{aligned} \tag{23}$$

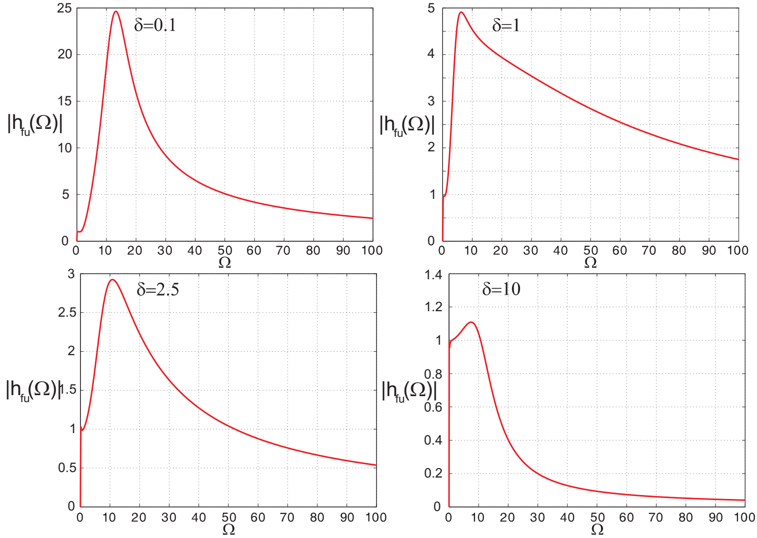

Рис. 5: Амплитудно-частотные характеристики H_{uf} системы с активным динамическим гасителем и разными фильтрами.

где x_r-состояние регулятора, ξ-измеряемый выход. При это вектор ξ имеет следующее выражение $\xi = C_\xi x$. В отличие от случая полного измеряемого выхода ($C_\xi = I$) нужно найти уже несколько матриц A_r, B_r, C_r, D_r которые можно представить в виде одной:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Следует заметить, что при $k = 0$ получаем статический регулятор $u = D_r\xi$. А если еще и выполняется условие $C_\xi = I$, то получается задача регулятора по состоянию. Т.е регулятор по выходу является более общим.

Снова ищем матрицу Θ такую, чтобы передаточная матрица $H(s)$ замкнутой системы удовлетворяла неравенству (15). Для этого введем новые матрицы:

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} C & 0_{n_z \times k} \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0_{k \times n_\nu} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_1 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_\xi & 0_{n_\xi \times k} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{25}$$

где n_x-размерность вектора состояния системы, n_u-размерность вектора управления, n_ν-размерность вектора возмущения, n_z-размерность вектора управляемого выхода, n_ξ-размерность вектора измеряемого выхода.

Интересующую нас матрицу регулятора Θ можно получить если разрешить неравенство

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}\Psi = \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & 0 \\ C_0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix}, \\ P = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & 0_{(n_\xi + k)\times(n_z + n_\nu)} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^T X & 0_{(n_u + k)\times(n_\nu + n_z)} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{27}$$

Неравенство (26) разрешимо, когда разрешимы два неравенства:

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & 0 \\ C_0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \\ W_R^T \begin{pmatrix} Y A_0^T + A_0 Y & B_0 & Y C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & 0 \\ C_0 Y & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} W_R < 0, \end{gathered} \tag{28}$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис ядра, соответствующий матрице P, а столбцы матрицы W_R, в свою очередь, базис ядра матрицы R. Где матрица $R = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^T & 0_{(n_u+k)\times(n_\nu+n_z)} \end{pmatrix}$, матрица $X = X^T > 0$ - неизвестная матрица, порядка $(n_x + k) \times (n_x + k)$, а матрица $Y = X^{-1}$. Решение этих двух неравенств сопряжено с поиском взаимообратных матриц X, Y, что значительно усложняет задачу.

Следует отметить, что при синтезе регулятора полного порядка, когда $k = n_x$, можно избежать процедуры поиска взаимообратных матриц и разрешить задачу алгоритмически. Для этого представим матрицы X, Y в блочном виде.

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Тогда неравенства (28) сводятся к следующим:

$$
\begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & X_{11} B_2 & | & C^T \\ B_2^T X_{11} & -\gamma I & | & 0 \\ - & - & - & - \\ C & 0 & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} C^T & | & B_2 \\ C^T Y_{11} & -\gamma I & | & 0 \\ - & - & - & - \\ B_2^T & 0 & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0,
\tag{30}
$$

где столбцы матриц N_1, N_2 образуют базисы ядер матриц $\begin{pmatrix} C_\xi & 0_{n_\xi \times n_\nu} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1^T & 0_{n_u \times n_z} \end{pmatrix}$ соответственно. Таким образом, задача синтеза H_∞-регуляторов полного порядка сводится к задаче разрешения неравенств (30) совместно с неравенством

$$
\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0.
\tag{31}
$$

После нахождения матриц X_{11}, Y_{11} полные матрицы X, Y восстанавливаются через svd разложение матрицы $X_{11} - Y_{11}^{-1} = U \Sigma U^T$, $X = \begin{pmatrix} X_{11} & U \\ U^T & \Sigma^{-1} \end{pmatrix}, Y = X^{-1}$.

Найдем соответствующий регулятор полного порядка по выходу для нашего объекта. Для этого в качестве измеряемого выхода возьмем координаты основной и дополнительной массы. Матрица C_ξ, таким образом, будет иметь следующий вид $C_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Для разных значений параметра μ получим матрицы регуляторов с амплитудно-частотными характеристиками, представленными на рисунке 6. Из характера кривых можно заметить, что опять же мы имеем неудовлетворительное гашение в области низких частот. Выходом из этого является применение динамического звена, играющего роль фильтра, как и в случае с регулятором по состоянию.

После решения соответствующих уравнений будем иметь амплитудно-частотные характеристики, представленные на рисунке 7. Результат при-

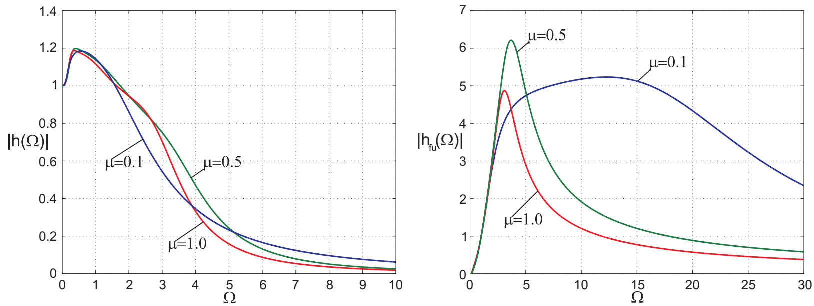

Рис. 6: Амплитудно-частотные характеристики системы с регулятором по выходу.

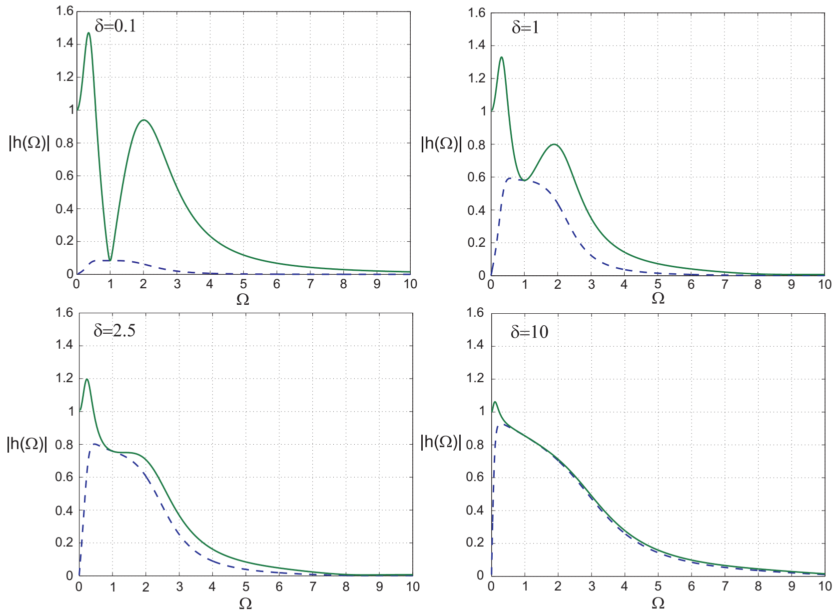

Рис. 7: Амплитудно-частотные характеристики системы с динамическим гасителем и разными фильтрами.

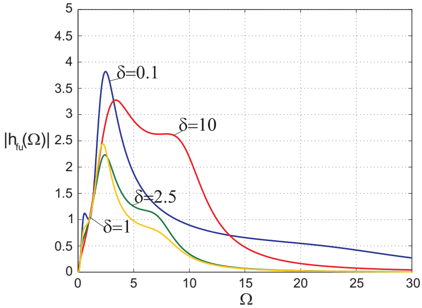

Рис. 8: Амплитудно-частотные характеристики ($H_{uf}(\Omega)$) системы с динамическим гасителем и разными фильтрами.

менения фильтра, аналогичный ситуации с регулятором по состоянию.

Для реальных систем иногда бывает существенно, что основание само может совершать колебательные движения, в этом случае речь идет об упругом основании, этот случай также разбирается в настоящей главе.

В рамках этой главы приведён также пример реализации пассивного динамического гасителя как регулятора по выходу нулевого порядка, поскольку используемый в работе подход позволяет с единых позиций описывать как активные, так и пассивные динамические гасители. Здесь же приводится пример возможной практической реализации аналогового и цифрового регулятора.

В третьей главе приводится описание программного пакета для синтеза динамических гасителей колебаний с использованием линейных матричных неравенств. Данный проект был выполнен в рамках проекта У.М.Н.И.К.-09(10), гос.контракт №6537р/8815 на проведение НИОКР "Разработка программного обеспечения для синтеза динамических гасителей колебаний".

В функции пакета входит синтез регуляторов пространства состояний динамических систем для широкого класса объектов, с использованием техники линейных матричных неравенств. Для систем виброгашения, предложенных в настоящей работе, реализована возможность подключения настраиваемого фильтра, для улучшения качества процессов управления. Проект выполнен на языках C/C++ с вызовом функций на языке Fortran 77 и компилируется с помощью компилятора gcc. Реализованы следующие классы:

1. *Matrix* (обычные матрицы)

   1.1. *SymMatrix* (симметричные матрицы).

   1.2. *TriangularMatrix* (треугольные матрицы).

2. *SparseMatrix* (разреженные матрицы).

   2.1. *SparseSymMatrix* (разреженные симметричные матрицы).

3. *LMIVar* (LMI переменные).

4. *ControlTask* (задачи управления).

Реализация методов линейной алгебры для матричных вычислений выполнена с использованием библиотек LAPACK и ATLAS. Для выводов результатов используется система gnuplot, а для оформления отчетов выходные файлы могут быть представлены в формате системы LaTeX(pgf).

Для операций с линейными матричными неравенствами используются оригинальные алгоритмы, для решения л.м.н. используется алгоритм Ньютона, модифицированный для нужд полуопределённого программирования с использованием барьерной функции предложенной Нестеровым-Немировским.

Класс верхнего уровня *ControlTask*, формулирует задачу управления в терминах линейных матричных неравенств и осуществляет вызовы других классов.

В качестве дальнейшего развития пакета, в настоящий момент, в рамках программы У.М.Н.И.К.-10 осуществляется реализация алгоритмов цифровых регуляторов для встроенных систем и цифровых сигнальных процессоров на языках Ada и C. В конечном итоге должно получиться законченное решение для синтеза и реализации цифровых регуляторов пространства состояний, пригодное как для задач динамического гашения колебаний, так и для других областей применения.

Заключение

В данной работе на основе современных достижений теории управления решена задача синтеза активного динамического гасителя колебаний, обеспечивающего эффективную виброзащиту в широкой полосе частот. Это стало возможным благодаря постановке задачи о синтезе динамического гасителя колебаний как задачи теории H_∞-оптимизации и решения её с помощью техники линейных матричных неравенств.

Использование данного подхода позволило получить эффективные динамические гасители колебаний как регуляторы по состоянию и по выходу. Для дальнейшего улучшения характеристик замкнутой системы было предложено применение дополнительного динамического звена в структуре регулятора в виде фильтра низких частот, которое позволяет существенно повысить эффективность виброзащиты в низкочастотной области. Эффективность найденных регуляторов показана на амплитудно-частотных характеристиках системы с активным динамическим гасителем как для управляемого выхода, так и для величины управления. Рассмотрено поведение замкнутой системы (с регуляторами по состоянию и по выходу) в случае упруго-вязкого инерционного основания, где гаситель также оказывается эффективным. Для сравнения с классическими аналогами рассмотрен пример синтеза пассивного динамического гасителя, настройки которого полностью совпали с классическими результатами. Приведен пример синтеза активного динамического гасителя как регулятора по выходу пониженного порядка, с приведением схемы аналогового регулятора.

Разработан программный пакет, предназначенный для синтеза динамических гасителей колебаний на основе линейных матричных неравенств и описана работа с ним как для системы Matlab, так и на языках низкого уровня.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-01-00481). В рамках работы проведен НИОКР по теме “Разработка программного обеспечения для синтеза динамических гасителей колебаний”, гос.контракт №6537р/8815.

Основные результаты диссертации изложены в следующих публикациях:

Из списка периодических изданий, рекомендованных ВАК:

1. Баландин Д. В., Федотов И. А. *Синтез динамических гасителей колебаний с использованием линейных матричных неравенств.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009г, №3. С.16-21.

2. Баландин Д. В., Федотов И. А. *Синтез активного динамического гасителя колебаний с использованием линейных матричных неравенств.* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2007г, №6. С.153-159.

3. Федотов И. А. *Стабилизация двойного обращенного маятника по выходу.* //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006г, №2(31). С.110-117.

Публикации в прочих изданиях:

1. Федотов И. А. *Построение динамических гасителей колебаний методами теории H_∞-управления.* // Тезисы докладов международной конференции «Управление динамическими системами», г. Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 26-30 января 2009г. С.91.

2. Баландин Д. В., Федотов И. А. *Синтез динамического гасителя колебаний на основе линейных матричных неравенств.* //Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства». 27-30 ноября 2007 года, г. Н.Новгород. С.24-27.

3. Баландин Д. В., Федотов И. А. *Синтез H_∞-управления на основе линейных матричных неравенств в задаче динамического гашения колебаний.* // Труды VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». 22-26 сентября 2008 года, г. Н.Новгород. Том 2, С.28-33.