

*На правах рукописи*

**ВЕРЕТЕННИКОВА Ольга Николаевна**

**ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННОГО ПРИЁМА  
РЕШЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ  
МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК  
У УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЁННЫМ  
ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ**

Специальность 13.00.02 – теория и методика обучения  
и воспитания (математика)

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата педагогических наук

Арзамас – 2011

Работа выполнена на кафедре математики, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт имени А.П.Гайдара»

**Научный руководитель** доктор педагогических наук, профессор  
**Зайкин Михаил Иванович**

**Официальные  
оппоненты:** доктор педагогических наук, профессор  
**Иванова Тамара Алексеевна**

кандидат педагогических наук, доцент  
**Харитоновна Ирина Владимировна**

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВПО «Пензенский  
государственный педагогический  
университет им. В.Г. Белинского»

Защита состоится «\_20\_» октября 2011 года в 12<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.166.17 в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в научном читальном зале библиотеки Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Текст автореферата размещен на сайте: <http://www.unn.ru>.

Автореферат диссертации разослан \_\_\_\_\_

Ученый секретарь  
диссертационного совета



И. В. Гребенев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

**Актуальность исследования.** На всём протяжении истории образования интеллектуальное развитие обучаемых считалось одной из важных целей практической педагогики. Сегодня оно становится приоритетной задачей школьного обучения, а умение учителя грамотно распорядиться развивающим потенциалом учебного содержания – профессиональной компетенцией педагога. В этой связи становится актуальным пересмотр многих ранее принятых установок на дидактическую ценность как отдельных учебных вопросов, так и целых разделов содержания школьной математики, систем математических задач, используемых при их усвоении, методов и способов их решения, методических средств и приёмов обучения им.

Обучение учащихся общим схемам рассуждения, обобщённым приёмам решения задач особенно важно в условиях углубленной подготовки школьников, ориентированной на учащихся с высокими учебными возможностями, устойчивым интересом к математике, обеспеченной достаточным количеством учебных часов и осуществляемой, как правило, опытными, высоко квалифицированными школьными или вузовскими педагогами.

В этих условиях становится актуальным построение учебного процесса, организация учебного познания детей на основе деятельностного подхода, научно обоснованного исследованиями многих психологов (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, Е.Н. Кабанова-Меллер, Н.Ф. Талызина, Д.Б. Эльконин, И.С. Якиманская и др.) и педагогов-математиков (О.Б. Епишева, Т.А. Иванова, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман А.А. Столяр и др.) и позволяющего более эффективно и полноценно усваивать знания, формировать умения, навыки и способы умственной деятельности.

Сказанное выше в полной мере относится к проблеме обучения учащихся решению конструктивных задач методом геометрических мест точек, традиционно трудно усваиваемого школьниками и по этой причине мало используемого в практике математической подготовки. А между тем, развивающая ценность этого метода достаточно высока. Он способствует обогащению пространственных представлений школьников, их геометрической интуиции, развитию визуального мышления, формированию навыков выполнения геометрических построений, преобразования фигур, иссле-

дования их взаимного расположения на плоскости и в пространстве, а, значит, создаёт предпосылки для творческой самореализации ученика в учебной деятельности.

В работах известных зарубежных (Д. Пойа, У. Сойер, М. Клякля и др.) и отечественных педагогов-математиков (Я.И. Груденов, Г.В. Дорофеев, Ю.М. Колягин, В.И. Крупич, П.М. Эрдниев и др.) убедительно показана целесообразность использования в обучении математике различных задачных конструкций с целью обогащения интеллектуальных и личностных качеств ученика. Поэтому реализацию развивающих возможностей метода геометрических мест точек в обучении математике логично осуществлять не посредством решения большого количества разрозненных задач, а с помощью специально созданных задачных конструкций, обеспечивающих целенаправленное формирование обобщённого приёма их решения.

Необходимо учитывать также, что в условиях обучения школьников математике по углубленной программе появляется возможность реализовать преимущество в формировании обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек при изучении различных содержательных областей геометрии (планиметрии, стереометрии, сферической геометрии), что позволит сделать этот приём более действенным и сократить учебное время, затрачиваемое на решение таких задач, в целом.

Несмотря на наличие большого количества ценных рекомендаций и полезных советов разных авторов и исследователей (О.Б. Епишева, А.А. Мазаник, Г.М. Олифер, Д.И. Перепёлкин, Г.П. Сенников и др.), касающихся обучения учащихся решению конструктивных задач методом геометрических мест точек, целостной методики, обеспечивающей преимущество формирования у учащихся обобщённого приёма решения таких задач в различных содержательных областях геометрии, пока ещё не создано.

Изложенное выше определяет противоречия:

– между потребностью практики обучения школьников по программе углубленного изучения математики в проведении целенаправленной работы по формированию способов умственной деятельности, обеспечивающих интенсивное интеллектуальное развитие обучаемых, и недостаточностью имеющихся на сегодняшнее время методик;

– между возможностью формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек на единых идейных, теоретических и методических началах в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) и отсутствием соответствующего методического обеспечения.

Сказанное определяет **актуальность** темы настоящего исследования, проблема которого сформулирована следующим образом: как осуществлять формирование у школьников обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек на единых идейных, теоретических и методических началах в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия и сферическая геометрия).

**Цель исследования** заключается в разработке теоретических основ и методического обеспечения формирования у учащихся классов углубленного изучения математики обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) на единых идейных, теоретических и методических началах.

**Объектом исследования** является процесс обучения школьников решению конструктивных геометрических задач.

**Предметом исследования** является методика формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) на единых идейных, теоретических и методических началах.

**Гипотеза исследования.** Формирование обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в различных содержательных областях геометрии можно обеспечить, если:

– выделить состав умственных действий, входящих в структуру обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек;

– определить основные этапы формирования обобщённого приёма на планиметрическом материале;

– определить стратегию изменения состава обобщённого приёма и этапов его формирования при переходе из одной содержательной области геометрии в другую;

– на их основе построить модель процесса формирования обобщённого приёма и разработать методическое обеспечение процесса формирования этого приёма, соответствующее ей.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы потребовалось решить следующие **задачи**:

1. Раскрыть психолого-педагогические основы формирования у школьников способов умственной деятельности в процессе обучения;

2. Определить состав обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек;

3. Построить модель его формирования у учащихся классов с углубленным изучением математики;

4. Разработать методическое обеспечение процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек на основе построенной модели;

5. Экспериментально проверить эффективность разработанного методического обеспечения.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования**: изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования; анализ школьных программ, учебников и учебных пособий по геометрии; изучение и анализ опыта обучения решению конструктивных задач методом геометрических мест точек; интервьюирование и анкетирование учителей математики; констатирующий, поисковый, формирующий эксперименты; статистическая обработка и анализ результатов экспериментальной работы.

**Методологическую основу** исследования составили: фундаментальные труды в области научного познания (В.Ф. Асмус, Г.И. Рузавин, Б. В. Раушенбах, В.И. Вернадский, А.А. Дородницын и др.), исследования крупных учёных прошлого и настоящего в области психологии и педагогики (Ж. Адамар, П.П. Блонский, М. Бунге, Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, Н.А. Менчинская, Ж. Пиаже, С.Л. Рубинштейн, Ю.А. Самарин, М. А. Холодная и др.), основополагающие идеи, принципы и подходы к обучению математике в общеобразовательной школе (В.М. Брадис,

А.Н. Колмогоров, М. Монтессори, А.А. Столяр, Л.Н. Толстой, А.Я. Хинчин и др.).

**Теоретической основой** исследования являются: теория развивающего обучения (Л.С. Выготский, Л.В. Занков, В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин и др.), теория формирования обобщённых приёмов умственной деятельности (Е.Н. Кабанова-Меллер, И.С. Якиманская и др.) деятельностный подход к обучению математике (Т.А. Иванова, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, В.А. Тестов, С.И. Шорох-Троцкий П.М. Эрдниев и др.) основные положения методической теории математических задач (Ю.М. Колягин, В.И. Крунич, Л.М. Фридман и др.), результаты современных исследований по теории и методике обучения геометрии (Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, В.А. Далингер, Г.И. В.А. Орлов и др.), методические исследования по вопросам обучения школьников решению геометрических задач (А.Д. Александров, В.Г. Болтянский, А.Б. Василевский, Н.И. Мерлина, М.А. Родионов, В.И. Рыжик, С.И. Туманов, И.Ф. Шарыгин и др.).

Исследование проводилось в несколько этапов. На *первом этапе* осуществлялось изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования, уточнялась теоретическая база исследования, проводился констатирующий эксперимент. На *втором этапе* изучался опыт организации обучения решению конструктивных задач методом геометрических мест точек в общеобразовательной школе и классах и школах с углубленным изучением математики. Разрабатывались теоретические основы формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в различных содержательных областях геометрии и создавалось соответствующее методическое обеспечение. На *третьем этапе* проводился обучающий эксперимент с целью проверки эффективности предложенного способа обучения решению задач на построение указанным методом и разработанного методического обеспечения, проводилась статистическая обработка его результатов, уточнялись и формулировались теоретические выводы, оформлялась диссертационная работа.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечена опорой на теоретические разработки в области психологии, педагогики, теории и методики обучения математике; применением разнообразных методов исследования, адекватных поставленным задачам; опытно-экспериментальной работой.

**Научная новизна** исследования заключается в том, что в нём научно обоснован подход к обучению учащихся классов с углубленным изучением математики решению конструктивных задач методом геометрических мест точек, обеспечивающий целенаправленное формирование у школьников обобщённого приёма решения таких задач на основе предложенной модели в преемственной взаимосвязи и логике последовательного расширения содержательных областей геометрии (планиметрия – стереометрия – сферическая геометрия).

**Теоретическая значимость** исследования определяется тем, что теория обучения математике обогащена новыми представлениями о реализации развивающих возможностей задачного подхода к обучению математике в условиях углубленного её изучения школьниками, пополнена моделью целенаправленного формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) на единых идейных, теоретических и методических началах.

**Практическая ценность** результатов исследования состоит в том, что разработанные теоретические положения и методическое обеспечение процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек могут быть использованы учителями в практике обучения геометрии в классах и школах с углубленным изучением математики. Они могут быть также учтены авторами школьных учебников и задачников по геометрии при отборе конструктивных задач и их расположении в учебных пособиях.

**На защиту** выносятся следующие положения:

1. Формирование обобщённых приёмов решения задач у учащихся классов с углубленным изучением математики способствует реализации деятельностного подхода к обучению математике и соответствует современной развивающей парадигме школьного образования.
2. Процесс формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики необходимо осуществлять на единых идейных (деятельностный подход), теоретических (выделение действий, составляющих приём, их формирование, дальнейшее видоизменение) и методических (блоки взаимо-

связанных и упорядоченных задач) началах в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия).

3. Модель формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики включает в качестве основных блоки: целевой (основная и сопутствующие цели), содержательно-структурный (состав действий и их последовательность), процессуально-технологический (этапы формирования и средства обучения, задействуемые на них) и результативно-оценочный (уровни сформированности и способы их определения).

На защиту выносятся также методическое обеспечение формирования у школьников обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики в виде блоков взаимосвязанных задач по трём основным содержательным областям геометрии: планиметрии, стереометрии и сферической геометрии.

**Апробация** результатов исследования проводилась в форме докладов на заседании научно-методического семинара кафедры теории и методики обучения математике Арзамасского государственного педагогического института им. А.П. Гайдара, на Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Артёмовские чтения» «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (Пенза, 2010), на Всероссийских научно-практических конференциях «Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики» (Глазов, 2009), «Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фундаментализации образования» (Саранск, 2009), «Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации» (Сыктывкар, 2011) и региональных научно-практических конференциях «Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики» (Глазов, 2006), «Современные информационно-коммуникационные технологии в дополнительном образовании сельских школьников» (Арзамас, 2007), «Проблемы школьного и дошкольного образования. Достижения науки и практики – в деятельность образовательных учреждений» (Глазов, 2007, 2008, 2011).

**Внедрение** результатов диссертационного исследования осуществлялось в ходе экспериментальной проверки эффективности разработанного методического обеспечения процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек. В эксперименте наряду с автором участвовали учителя г. Глазова Удмуртской республики и г. Арзамаса Нижегородской области.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, ставится проблема и цель исследования, определяются его объект, предмет, гипотеза и задачи, формулируется научная новизна, теоретическая значимость и практическая ценность работы, положения, выносимые на защиту.

Первая глава **«Теоретические основы формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики»** посвящена анализу исследуемого феномена.

В первом параграфе проводится анализ проблемы обучения школьников решению конструктивных задач методом геометрических мест точек, который показал, что:

– метод геометрических мест точек является основным методом решения конструктивных задач в школе и обладает большим развивающим потенциалом;

– несмотря на наличие рекомендаций разных исследователей, касающихся обучения учащихся решению конструктивных задач методом геометрических мест точек, эффективной методики обучения учащихся решению таких задач, в настоящее время в методической науке не создано.

Установлено, что в современной теории и методике обучения математике одним из способов разрешения проблемы обучения школьников решению задач является целенаправленное формирование обобщённых приёмов (С.В. Арюткина, О.Б. Епишева, Т.А. Иванова, Г.И. Саранцев, И.С. Якиманская и др.). Анализ большого количества конструктивных задач показал, что решение

их методом геометрических мест точек сопряжено с выделением последовательности действий, выполнение которых приводит к решению задачи, что вскрывает перспективу формирования соответствующего обобщённого приёма.

Целесообразность формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики обусловлена следующими причинами: 1) целенаправленное формирование обобщённых приёмов решения задач обеспечивает полноценное усвоение знаний, существенно повышает развивающий эффект обучения, способствует формированию теоретического мышления, что очень важно для успешного овладения математическими абстракциями; 2) согласно концепции модернизации общего образования содержание обучения должно быть направлено на формирование общих способов выполнения действий, адекватных предметному материалу; 3) в контексте деятельностного подхода к обучению математике решение задач является основным механизмом усвоения математического материала, а обобщённые приёмы решения – средством осуществления умственной деятельности; 4) в классах с углубленным изучением математики становится возможным формирование обобщённого приёма в различных содержательных областях геометрии на единых идейных, теоретических и методических началах, что позволяет усваивать материал более осознанно, глубоко и экономить учебное время.

Во втором параграфе на основе изучения теории учебной деятельности характеризуются психолого-педагогические основы формирования у школьников обобщённых приёмов решения математических задач.

Отправной точкой теоретического анализа явились основополагающие категории теории учебной деятельности: деятельность, действие, операция, приём (А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн, Н.Ф. Талызина и др.). *Приём* трактуется как способ деятельности, выраженный в виде последовательности действий (Д.Н. Богоявленский, Е.Н. Кабанова-Меллер, И.С. Якиманская и др.). Правильный приём допускает обобщение, специализацию и конкретизацию; приём обладает свойством переносимости на другую задачу; приём можно перестроить и создать на его основе новый приём. *Обобщённый приём* понимается названными авторами как приём, полученный на основе анализа частных приёмов путём выделения

общего содержания деятельности по решению конкретных (частных) задач. Учёные полагают, что формирование обобщённых приёмов умственной деятельности в обучении есть путь интенсивного интеллектуального развития учащихся.

Основываясь на исследованиях по теории и методике обучения математике (С.В. Арюткина, Л.И. Боженкова, О.Б. Епишева, Д.И. Перепёлкин, Н.Ф. Талызина, Л.С. Чистякова и др.), мы пришли к выводу, что процесс формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек следует осуществлять в три этапа: подготовительный, основной, заключительный.

Цель *подготовительного* этапа – актуализация знаний, необходимых для решения задачи методом геометрических мест точек и мотивация к овладению обобщённым приёмом. На втором этапе – *основном* – учащиеся знакомятся со структурой приёма, каждым действием, входящим в состав и применяют его к решению задач стандартного вида. *Заключительный* этап предполагает закрепление обобщённого приёма и применение его к решению нестандартных задач.

Третий параграф посвящен определению состава обобщённого приёма решения конструктивных задач на плоскости методом геометрических мест точек. При этом мы опирались на:

- определение обобщённого приёма математической деятельности;
- теоретические основы процесса его конструирования;
- частные приёмы решения задач рассматриваемого типа;
- особенности задач, решаемых методом геометрических мест точек.

Учитывая все сказанное, структура обобщённого приёма решения конструктивных задач на плоскости методом геометрических мест точек представлена шестью действиями в следующей последовательности:

1. Определить, какие геометрические фигуры заданы условием задачи и какую фигуру требуется построить; с помощью чертежа-наброска установить отношения, свойственные им.
2. Установить, расположение какой точки (или точек) необходимо знать для того, чтобы построить искомую фигуру, и сформулировать условия, определяющие ее (их).

3. Назвать геометрические места точек (или фигуры), удовлетворяющие каждому из этих условий; построить их.

4. Найти общие точки построенных фигур; построить искомую фигуру.

5. Доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи.

6. Установить условия разрешимости задачи и определить число решений: а) установить выполнимость каждого отдельного шага построения; б) установить количество решений задачи при различных условиях.

Еще одним важным шагом в теоретическом описании процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики является построение модели этого процесса, представленное в четвёртом параграфе.

Модель процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек создавалась с использованием системного, личностно ориентированного, деятельностного и интегративного подходов.

В качестве основных структурных компонентов модели определены целевой, содержательно-структурный, процессуально-технологический и результативно-оценочный блоки (рис. 1).

*Целевой блок* предполагает определение целей и задач, связанных с формированием обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики. Сознательная цель в учебной деятельности определяет содержание других её компонентов: состав и структуру обобщённого приёма, методическое обеспечение процесса его формирования, технологию процесса формирования обобщённого приёма, степень самостоятельности «открытия» приёма, реализацию преемственности его формирования в различных содержательных областях геометрии и результат этого процесса (уровень сформированности приёма).

Второй блок модели – *содержательно-структурный* – отражает представления о содержании обобщённого приёма, составе его действий и логической взаимосвязи. Содержание приёма опре-

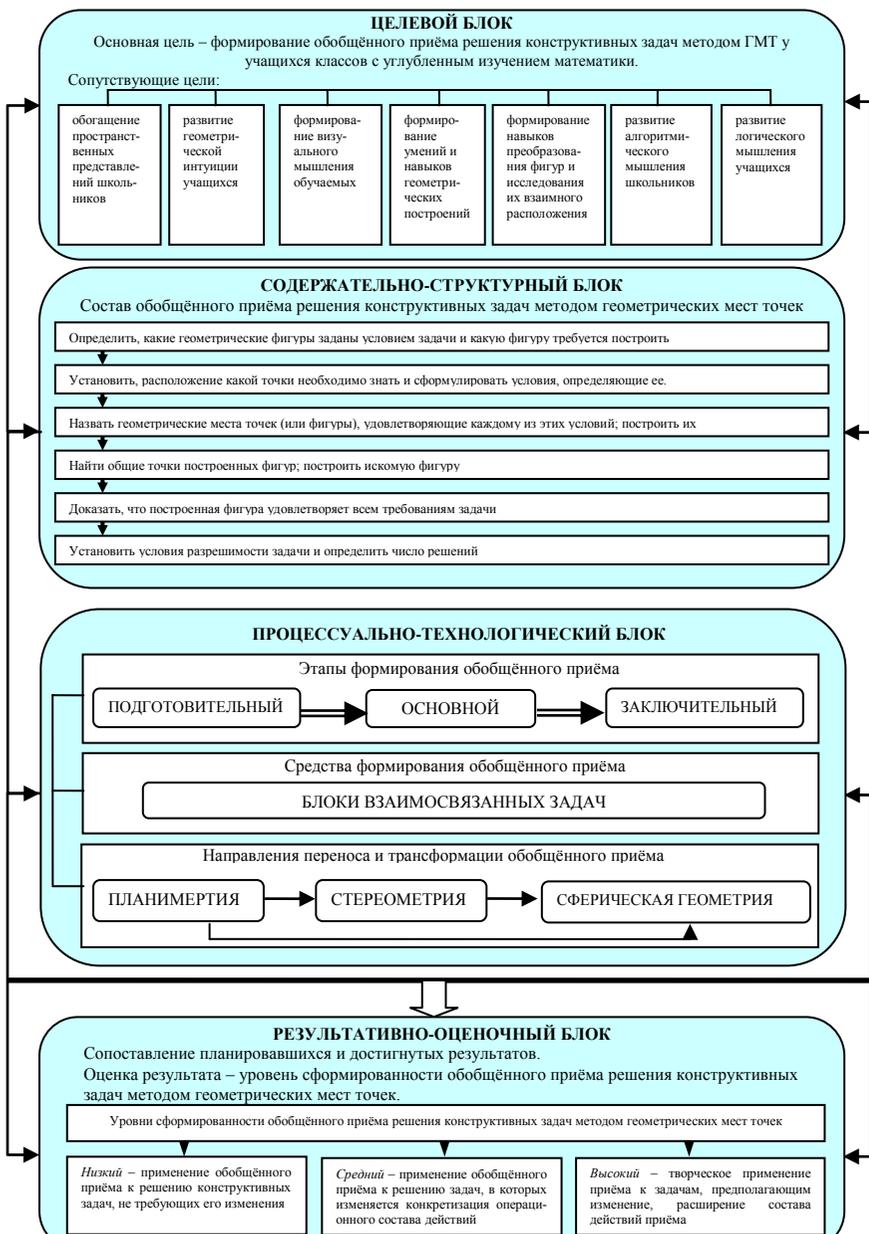


Рис. 1. Модель формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом ГМТ

деляется шестью основными действиями, правильное выполнение которых обеспечивает решение задачи. Важно отметить, что среди них есть действия умственные (определить, сформулировать, доказать) и практические (построить).

Другой важный блок модели процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек – *процессуально-технологический*. Данный блок включает несколько составляющих, а именно: этапы формирования обобщённого приёма, используемые при этом средства обучения, содержательные области геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) и варианты их преемственной взаимосвязи в формировании приёма.

Первая составляющая представлена тремя описанными выше этапами: подготовительным, основным и заключительным. Здесь важно отметить, что основной этап может быть представлен либо двумя ступенями (знакомство с приёмом и усвоение обобщённого приёма в процессе решения стандартных задач), если обобщённый приём даётся учащимся в готовом виде, либо тремя ступенями (решение задач «по соображению», конструирование обобщённого приёма на основе анализа и сравнения частных приёмов, усвоение и закрепление обобщённого приёма в процессе решения стандартных задач), если ученики участвуют в «открытии» самого приёма.

Вторая составляющая процессуально-технологического блока модели предполагает наполнение каждого из этапов процесса формирования рассматриваемого обобщённого приёма конкретным содержанием, т.е. разработку соответствующего особенностям метода геометрических мест точек методического обеспечения. В качестве последнего, согласно деятельностному подходу, были разработаны блоки взаимосвязанных задач.

Наличие третьей составляющей обусловлено тем, что изучение метода геометрических мест точек в математических классах может происходить не только на базе основного содержания, но и посредством его включения в содержание факультативных курсов и курсов по выбору, что делает возможным его формирование в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) на единых идейных, теоретических и методических началах.

*Результативно-оценочный блок* модели ориентирует на сопоставление планировавшихся и достигнутых результатов, оценочное выражение достигнутого эффекта. В нашем случае результат – это сформированность обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек. А его оценка зависит от умения использовать приём в различных условиях, переносить на решение новых задач, осознанно применять по собственной инициативе, варьировать в разных ситуациях и определяется по шкале: низкий уровень – применение обобщённого приёма к решению конструктивных задач, не требующих его изменения; средний уровень – применение обобщённого приёма к решению конструктивных задач, в которых возможно изменение лишь конкретизации состава отдельных действий или последовательности их выполнения; высокий уровень – творческое применение приёма в более сложных ситуациях, предполагающих изменение, расширение операционного состава действий приёма (что может привести к существенной реконструкции всего приёма).

Охарактеризованные блоки модели раскрывают внутреннюю организацию процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики и позволяют составить целостное представление о нём.

Во второй главе **«Методические аспекты формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики»** раскрываются вопросы, связанные с особенностями конструирования методического обеспечения процесса формирования обобщённого приёма в виде блоков взаимосвязанных задач, анализируются принципы отбора задач для каждого блока, приводятся сами задачи для каждой из содержательных областей геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия), даются рекомендации по их решению.

В первом параграфе показано, что в методической литературе по математике представлены различные точки зрения на отбор задач или упражнений для включения их в методическое обеспечение образовательного процесса (В.С. Георгиев, Г.В. Дорофеев, В.И. Крупиц, Г.И. Саранцев, П.М. Эрдниев и др.). Согласно деятельностному подходу для эффективного усвоения обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических

мест точек необходима активная деятельность учащихся по решению задач, причём задачи должны быть подобраны так, чтобы в процессе их решения каждый этап формирования приёма был успешно пройден учащимися.

Поэтому в нашем случае вполне применима циклично-блочная организация задач, предложенная С.В. Арюткиной. При этом если приём сообщается учащимся в готовом виде, то достаточно трёх блоков задач, если же предполагается «открытие» приёма, что само по себе очень важно для учащихся классов с углубленным изучением математики, то необходимо четыре блока. Соответствие блоков задач этапам формирования обобщённого приёма и последовательный переход от одного блока к другому можно представить схематично следующим образом (рис. 2).

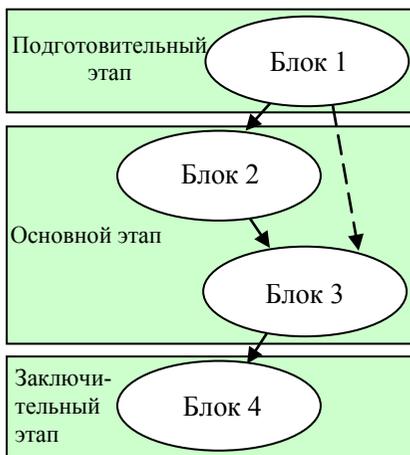


Рис. 2. Общая структура организации решения задач

Первый блок задач (подготовительный) призван обеспечить мотивацию изучения обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек и актуализацию необходимых для этого знаний. Для создания этого блока задач использован способ построения системы упражнений Г.И. Саранцева. Задачи второго блока предназначены для раскрытия состава обобщённого приёма и конструирования его на основе анализа и сравнения частных приёмов (блок может быть опущен, если приём даётся в готовом виде). В основу построения этого блока задач положен принцип «от простого к сложному»: все задачи взаимосвязаны друг с другом и каждая последующая все более обобщает (усложняет) предыдущую. С помощью третьего блока предполагается усвоение обобщённого приёма при решении задач стандартного вида. Их решение предполагает использование всех действий из состава обобщённого приёма решения конструктивных задач мето-

дом геометрических мест точек. Четвертый блок включает в себя нестандартные задачи, решение которых методом геометрических мест точек предполагает то или иное изменение обобщённого приёма, что превращает его в гибкий инструмент умственной деятельности.

В качестве иллюстраций задач основных блоков приведём следующие примеры.

*Блок 1:* 1) Что нужно знать, чтобы построить окружность? треугольник? 2) Какое геометрическое место точек задают следующие условия: вершина треугольника а) находилась бы на данном расстоянии от данной точки, б) находилась бы на равном расстоянии от концов данного отрезка? 3) С помощью циркуля и линейки постройте прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на расстояние 2 см. 4) Точка  $P$  принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку  $MN$ . Что можно сказать о треугольнике  $MNP$ ? 5) Каким может быть взаимное расположение окружности и прямой (двух прямых, двух окружностей, двух прямых (параллельных, перпендикулярных) и окружности, двух окружностей и прямой и др.)? От чего зависит это расположение? 6) Пересекаются ли геометрические места точек, заданные в условии задачи: «Построить треугольник по основанию  $a$ , медиане  $m_a$  и высоте  $h_a$ , если: а)  $a=4$  см,  $m_a=5$  см,  $h_a=3$  см; б)  $a=4$  см,  $m_a=3$  см,  $h_a=5$  см; в)  $a=4$  см,  $m_a=5$  см,  $h_a=5$  см».

*Блок 2:* 1) Найти на данной прямой  $AB$  точку, которая находится на расстоянии  $m$  от другой данной прямой  $c$ , не параллельной  $AB$ . 2) Построить треугольник по основанию  $a$ , высоте  $h_a$  и боковой стороне  $b$ .

*Блок 3:* 1) Даны три точки  $A, B, C$ . Постройте точку  $X$ , которая одинаково удалена от точек  $A$  и  $B$  и находится на данном расстоянии  $m$  от точки  $C$ . 2) Построить окружность данного радиуса  $r$ , касающуюся двух пересекающихся прямых  $p$  и  $q$ .

*Блок 4:* 1) Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . На ребре  $C_1 D_1$  куба найдите точку, равноудалённую от вершин  $A$  и  $B$ . 2) Перегибая прямоугольный лист бумаги, найти на сторонах листа точки, равноудалённые от двух его данных противоположных вершин.

Во втором и третьем параграфах этой главы описана специфика формирования у школьников обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в про-

странстве и на сфере, приведено и соответствующее методическое обеспечение этих процессов.

Установлено, что изменения в обобщённом приёме решения стереометрических конструктивных задач методом геометрических мест точек касаются не состава входящих в него действий, а интерпретационного своеобразия некоторых из них: 1) во всех действиях, указывающих данные или искомые фигуры, под словом «фигура» понимаются как плоскостные, так и пространственные объекты (т.е. учитывается возможность представления поверхностей по условию задачи или получения их по построению); 2) в действиях, требующих выполнения построений, под словами «построить фигуру» понимается указание, в какой последовательности и какие нужно выполнять построения, чтобы решить задачу, а при необходимости, предполагается и создание чертежа-наброска.

Обобщённый приём решения конструктивных задач сферической геометрии методом геометрических мест точек также отличается только операционным составом действий, касающихся построения фигур, и заключается в выполнении построений мысленно с письменным указанием последовательности шагов построения и, при необходимости, сопровождается выполнением примерного чертежа.

Полное методическое обеспечение формирования обобщённого приёма во всех трёх содержательных областях геометрии приведено в тексте диссертации.

Экспериментальная работа по проверке эффективности разработанного методического обеспечения проводилась на базе МОУ «Физико-математический лицей», МОУ СОШ № 4, № 6, № 7, № 13 (математические классы) г. Глазова и МОУ Лицей г. Арзамаса с углубленным изучением математических предметов.

Оценка эффективности предлагаемого подхода и разработанного методического обеспечения осуществлялась с использованием критериев: 1) умения решать конструктивные задачи методом геометрических мест точек; 2) уровня сформированности обобщённого приёма; 3) отношения учащихся к решению конструктивных задач методом геометрических мест точек.

В каждой из содержательных областей геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) после изучения рассматриваемого метода проводились контрольные срезы. Статистическая обработка данных этих срезов осуществлялась с использо-

ванием критерия "хи-квадрат" ( $\chi^2$ ) и показала, что в контрольной и экспериментальной группах различия в уровнях умения решать конструктивные задачи методом геометрических мест точек являются существенными на уровне достоверности 95% ( $\chi^2_{\text{эмп}} = 6,41$ ,  $\chi^2_{\text{эмп}} = 6,71$ ,  $\chi^2_{\text{эмп}} = 6,89$ ), что обусловлено применением разработанной методики. Основные результаты отражены в таблице 1.

Таблица 1.

Распределение учащихся экспериментальной и контрольной групп по уровням умения решать конструктивные задачи методом геометрических мест точек по результатам трёх срезов

Уровни умения решать конструктивные задачи методом геометрических мест точек	Результаты контрольного среза № 1 (Планиметрия)		Результаты контрольного среза № 2 (Стереометрия)		Результаты контрольного среза № 3 (Сферическая геометрия)	
	Количество учащихся (в % по отношению к общему числу)					
	ЭГ	КГ	ЭГ	КГ	ЭГ	КГ
Низкий	28	50	12	30	8	17
Средний	24	36	43	50	38	65
Высокий	48	14	45	20	54	18

Сравнительный анализ данных об уровне умения решать задачи на построение методом геометрических мест точек у учеников контрольной и экспериментальной групп показывает его общую положительную динамику, особенно ярко выраженную в экспериментальной группе.

Анализ экспериментальных данных по второму критерию проводился путём сравнения результатов контрольных срезов в экспериментальной группе. Распределение учащихся по уровню сформированности обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек по результатам трёх контрольных срезов, представлено на рис. 3. На диаграмме видно, что количество учеников, обладающих высоким уровнем сформированности приёма, резко увеличилось, в то время как учеников, которые бы не справились ни с одним заданием второго и третьего контрольного среза, не оказалось.

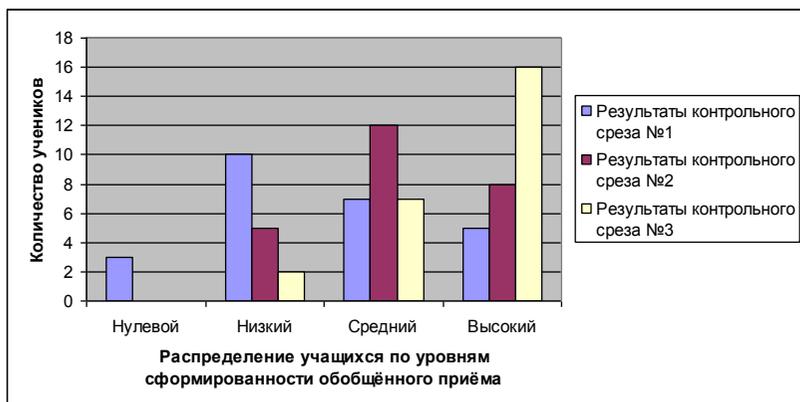


Рис. 3. Динамика уровней сформированности у школьников исследуемого обобщённого приёма

Обработанные с применением критерия знаков  $G$  экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в результате целенаправленного формирования обобщённого приёма решения задач на построение методом геометрических мест точек уровень его сформированности повысился статистически достоверно с вероятностью 95%.

Анкетирование по третьему критерию выявило различия в отношении учащихся экспериментальной и контрольной групп к решению конструктивных задач методом геометрических мест точек: в экспериментальной группе высказали – позитивное, нейтральное и негативное отношение, соответственно, 77%, 21% и 2% опрошенных, тогда как в контрольной группе – 12%, 54% и 34%.

Гипотеза исследования получила экспериментальное подтверждение.

В процессе диссертационного исследования, в соответствие с его целями и задачами, получены следующие его основные **результаты и выводы**.

1. Обоснована целесообразность специального формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек у учащихся классов с углубленным изучением математики с целью повышения качества геометрического образования школьников, их умственного развития, формирования у них общего умения решать конструктивные задачи.

2. Раскрыты психолого-педагогические основы формирования у школьников обобщённых приёмов умственной деятельности, которые явились базой построения модели формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек.

3. Выделен состав обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек, включающий действия: *определение* фигур, заданных условием задачи, и фигуры, которую требуется построить и установление отношений, свойственных этим фигурам с использованием чертежа-наброска; *определение* точек (точки), расположение которых существенно для построения искомой фигуры, и выявление условий определяющих их (её); *установление* геометрических мест точек (фигур), удовлетворяющих каждому из этих условий и их построение; *нахождение* общих точек построенных фигур и построение искомой фигуры; *доказательство* того, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи; *установление* условия разрешимости задачи и определение числа решений исходя из: а) выполнимости каждого отдельного шага построения; б) условий, влияющих на количество решений задачи.

4. Построена модель формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек, включающая в качестве основных целевой, содержательно-структурный, процессуально-технологический и результативно-оценочный блоки, дающая целостное представление о целях, этапах, средствах и содержательных областях формирования приёма, уровнях его сформированности.

5. Определены способы видоизменения обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек при переходе от одной содержательной области геометрии к другой (планиметрия – стереометрия, планиметрия – стереометрия – сферическая геометрия).

6. Разработано методическое обеспечение процесса формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в различных содержательных областях геометрии (планиметрия, стереометрия, сферическая геометрия) на единых идейных, теоретических и методических началах, представляющее собой блоки взаимосвязанных задач, обеспечивающих достижение локальных целей.

7. Экспериментально проверена эффективность разработанного методического обеспечения формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в углубленном обучении школьников.

Основные результаты исследования отражены в следующих публикациях:

***Публикации в научных журналах, рекомендованных ВАК***

1. Веретенникова, О. Н. Теоретические основы формирования метода геометрических мест точек при решении задач на построение на плоскости и в пространстве / О. Н. Веретенникова // Мир науки, культуры, образования. – Горно-Алтайск, 2010. – № 4. – Ч. 1. – С. 202–204.

2. Веретенникова, О. Н. Модель формирования обобщённого приёма решения конструктивных задач методом геометрических мест точек в профильном обучении школьников / О. Н. Веретенникова // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – Челябинск, 2011. – № 7. – С. 66–74.

3. Веретенникова, О. Н. Обучение школьников решению конструктивных задач сферической геометрии с помощью формирования обобщённого приёма / О. Н. Веретенникова // Сибирский педагогический журнал. – Новосибирск, 2011. – № 8. – С. 149–155.

***Публикации в других изданиях***

4. Веретенникова, О. Н. Применение метода геометрических мест точек в конструктивных задачах сферической геометрии / О. Н. Веретенникова, Л. Т. Крежевских // Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Второй регион. науч.-практ. конф. – Глазов: ГГПИ, 2006. – С. 15–21. – (Авт. – 50 %).

5. Веретенникова, О. Н. Метод математического вышивания при изучении некоторых геометрических мест точек / Л. Т. Крежевских, О. Н. Веретенникова // Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Второй регион. науч.-практ. конф. – Глазов: ГГПИ, 2006. – С. 21–25. – (Авт. – 50 %).

6. Веретенникова, О. Н. Использование системы MATHCAD при изучении метода геометрических мест точек плоскости и про-

странства / О. Н. Веретенникова // Современные информационно-коммуникационные технологии в дополнительном образовании сельских школьников: сб. науч. и метод. работ, представленных на регион. науч.-практ. конф. / под ред. М. И. Зайкина, Н. А. Шкильменской; АГПИ им. А. П. Гайдара; КФ ПГУ им. М. В. Ломоносова. – Арзамас: АГПИ, 2007. – С. 82–87.

7. Веретенникова, О. Н. Изучение геометрических мест точек плоскости с помощью оригами / О. Н. Веретенникова // Проблемы школьного и дошкольного образования: материалы Десятой регион. науч.-практ. конф. «Достижения науки и практики – в деятельность образовательных учреждений». – Глазов: ГГПИ, 2008. – С. 58–59.

8. Веретенникова, О. Н. Использование оригами при формировании метода геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова, Л. Т. Крежевских // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодич. межвуз. сб. науч.-метод. работ. – Киров: ВятГГУ, 2008. – Вып. 10. – С. 277–281. – (Авт. – 50 %).

9. Веретенникова, О. Н. Оригаметрия помогает формировать метод геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова, Л. Т. Крежевских // Современные образовательные технологии в системе математического образования: материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Коряжма, 16–18 июня 2008 г.) / сост. С. В. Мясникова; Поморск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – Архангельск: ПГУ, 2008. – Ч. II. – С. 191–196. – (Авт. – 50 %).

10. Веретенникова, О. Н. К вопросу об исследовании в задачах на построение методом геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова // Проблемы школьного и дошкольного образования: материалы Одиннадцатой регион. науч.-практ. конф. «Достижения науки и практики — в деятельность образовательных учреждений». – Глазов: ГГПИ, 2009. – С. 42–43.

11. Веретенникова, О. Н. Пропедевтика изучения метода геометрических мест точек в 5–6 классах / О. Н. Веретенникова // Проблемы преемственности в обучении математике на уровне общего и профессионального образования: материалы 28 Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов (24–26 сентября 2009 г.). – Екатеринбург: УрГПУ, РГППУ, 2009. – С. 50–51.

12. Веретенникова, О. Н. О подготовке студентов педвузов к формированию у школьников метода геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова // Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фундаментализации образования: материалы Всерос. науч. конф. (г. Саранск, 7–9 октября 2009 г.) / под ред. Г. И. Саранцева. – Саранск: МГПИ, 2009. – Ч. 1. – С. 212–215.

13. Веретенникова, О. Н. Обучение учащихся решению задач на построение на плоскости методом геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова // Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Всерос. науч.-практ. конф. – Глазов: ГПИ, 2009. – С. 30–39.

14. Веретенникова, О. Н. Об исследовании в задачах на построение, решаемых методом геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодич. межвуз. сб. науч.-метод. работ. – Киров: ВятГГУ, 2010. – Вып. 12. – С. 234–239.

15. Веретенникова, О. Н. Применение обобщенного приема к решению задач на построение методом геометрических мест точек в планиметрии, стереометрии и сферической геометрии / О. Н. Веретенникова // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: материалы 6 Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием «Артёмовские чтения». – Пенза: ПГПУ, 2010. – Т. 1. – С. 121 – 125.

16. Веретенникова, О. Н. Возможность линейно-концентрической организации курса элементарной геометрии в педвузе на примере темы «Геометрические места точек. Метод геометрических мест точек» / О. Н. Веретенникова // Современный учебно-воспитательный процесс: теория и практика: материалы второй Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием (23 апреля 2010 г.) / отв. ред. Г. П. Карлов. – Красноярск: СибГТУ, 2010. – С. 154–156.

17. Веретенникова, О. Н. Об особенностях использования метода геометрических мест точек при решении задач в планиметрии, стереометрии и сферической геометрии / О. Н. Веретенникова // Международный научный альманах: сб. ст. преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов / под ред. В. И. Журко, А. А. Калюжного. – Галле; М.; Бишкек; Актобе, 2010. – Вып. 7. – С. 269–275.

18. Веретенникова, О. Н. Анализ проблемы обучения школьников решению задач на построение методом геометрических мест точек / О. Н. Веретенникова // Современный учебно-воспитательный процесс: теория и практика: материалы Третьей Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием (23 апреля 2011 г.) / отв. ред. Г. П. Карлов. – Красноярск: СибГТУ, 2011. – С. 129–133.

---

Подписано в печать 14.09.2011. Напечатано на ризографе.  
Формат 60 x 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 120 экз.  
Заказ № 1780 – 2011.

Глазовский государственный педагогический институт  
427621, УР, г. Глазов, ул. Первомайская, 25