На правах рукописи

Медведев Тимур Владиславович

# Динамические системы типа Черри на окружности и на поверхностях

01.01.02 - дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2011

Работа выполнена на кафедре численного и функционального анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Жужома (Нижний Новгород)

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор А.Ю. Жиров
(пгт. Монино Щелоковского р-на Московской обл.)

кандидат физико-математических наук, доцент Е.В. Круглов (Нижний Новгород)

Ведущая организация – Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится "...."......... 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского Государственного университета им. Н.И. Лобачевского (603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского Государственного университета им. Н.И. Лобачевского http://www.unn.ru

Автореферат разослан "...."......... 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

(В.И.Лукьянов)

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Предмет исследования.** Диссертация посвящена топологической классификации так называемых потоков и слоений Черри (то есть потоков и слоений с конечным числом точек покоя, одним нигде не плотным квазиминимальным множеством, без замкнутых траекторий (слоев) и сепаратрис, соединяющих особенности) на замкнутых поверхностях рода больше 0, а также связанных с ними отображений на замкнутых трансверсалях. Она охватывает исследования автора 1991– 2011 годов.

**Актуальность темы.**

Одной из основных задач качественной теории динамических систем является топологическая классификация потоков и слоений. Одним из методов, восходящим к Пуанкаре, решения указанных задач является построение секущей и изучение отображения последования на этой секущей. Поэтому топологическая классификация потоков и слоений часто редуцируется к топологической классификации преобразований на секущих.

Существенные результаты в этом направлении для различных классов потоков, слоений и соответствующих преобразований на секущих были получены А. Пуанкаре, Дж. Биркгофом, А. Данжуа, А.А. Андроновым и его нижегородской школой, а также многими другими математиками.

На плоскости и двумерной сфере задача топологической классификации потоков с конечным числом особых траекторий была полностью решена в работах А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина. Фундаментом для этого послужила идея, связанная с выделением тех траекторий, знание и взаимное расположение которых однозначно задает качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории, а также идея грубости, принадлежащая А.А. Андронову и Л.С. Понтрягину. Обобщением этих результатов явилась топологическая классификация грубых потоков на поверхностях, полученная М. Пейкшото. Полным топологическим инвариантом в этом случае явился некоторый граф, аналогичный схеме потока на сфере, введенной Е.А. Леонтович и А.Г. Майером.

Отличительной особенностью потоков на ориентируемых поверхностях рода больше 0 и неориентируемых – начиная с рода 3 является возможность существования незамкнутых (нетривиальных) рекуррентных траекторий, то есть траекторий, лежащих в своем предельном множестве. Наличие таких траекторий существенно усложняет динамику потока. Транзитивные потоки на торе без состояний равновесия были классифицированы Пуанкаре, а нетранзитивные – в основанных на идеях Н. Маркли работах С.Х. Арансона и Е.В. Жужомы. Значительный прогресс в классификации транзитивных потоков и нетривиальных минимальных множеств на замкнутых ориентируемых поверхностях был достигнут в работах С.Х. Арансона и В.З. Гринеса. Эти результаты были обобщены на случай потоков на неориентируемых поверхностях в работах С.Х. Арансона, Е.В. Жужомы, И.А. Тельных.

Преобразования окружности возникают на замкнутой секущей потоков и слоений на двумерных многообразиях. Гомеоморфизмы на окружности порождаются потоками без состояний равновесия на торе. Гомеоморфизмы окружности без периодических точек полностью проклассифицированы А. Пуанкаре и Н. Маркли. Из этой классификации вытекает классификация потоков на торе без точек покоя и без периодических траекторий. Для грубых диффеоморфизмов на окружности необходимые и достаточные условия грубости и топологической сопряженности получены в работах А.Г. Майера, В.И. Арнольда, В.А. Плисса. Из их результатов можно извлечь классификацию грубых потоков на торе без точек покоя.

В своем мемуаре "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями" Пуанкаре высказал гипотезу о существовании на двумерном торе аналитического нетранзитивного потока без периодических траекторий и без точек покоя. Данжуа показал, что эта гипотеза не верна (даже для потоков гладкости $C^2$). Однако в 1938 году Черри показал, что если опустить требование об отсутствии точек покоя, то (ослабленная) гипотеза Пуанкаре будет верна. Черри построил на торе нетранзитивный поток аналитического класса гладкости без периодических траекторий с двумя грубыми точками покоя: седлом и узлом. Такой поток имеет квазиминимальное множество, локально гомеоморфное (кроме одной точки) произведению отрезка на канторовское множество. Односвязную компоненту дополнения к квазиминимальному множеству, содержащую узел, Черри назвал черной ячейкой, а остальные компоненты этого дополнения – серыми ячейками.

Обобщение конструкции Черри позволило ввести класс так называемых потоков Черри, которые рассматривались как с точки зрения классификации, так и с точки зрения существования серых ячеек. Нетрудно построить топологические потоки Черри с серыми ячейками. Что касается гладких потоков, то вопрос о существовании серых ячеек оказался трудным. В своей пионерской работе Черри рассматривал этот вопрос для потока с одной черной ячейкой при некоторых ограничениях на седловую величину. Для так называемых сонаправленных потоков Черри данный вопрос рассматривался в работах С.Х. Арансона, Ван Стрина, Де Мело, Екоца и др. Однако, в полной общности этот вопрос до настоящего времени не решен.

В диссертации получена топологическая классификация потоков типа Черри (см. определение ниже) на ориентируемых поверхностях рода больше 0 и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3. Отображение последования на замкнутой трансверсали, которое индуцируется потоком типа Черри, не имеет периодических орбит, но имеет нигде не плотные нетривиальные рекуррентные орбиты и не является гомеоморфизмом. Оно необходимо имеет точки разрыва или интервалы, отображающиеся в точку, а в случае замкнутой неориентируемой поверхности рода 3 – так называемый флип. Такие преобразования названы в диссертации преобразованиями Черри. Глава 1 посвящена топологической классификации таких отображений, а полученные результаты применяются в главе 2 для построения топологической классификации потоков типа Черри на двумерном торе и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3. Потоки типа Черри на замкнутых ориентируемых поверхностях рода больше 1 изучаются в главе 2 с использованием техники исследования нелокального асимптотического поведения траекторий на универсальном накрытии, разработанной в работах Д.В. Аносова, А. Вейла, С.Х. Арансона, В.З. Гринеса. С.Х. Арансону и В.З. Гринесу принадлежит также идея использования геодезических и геодезических каркасов для описания свойств потоков на таких поверхностях, обобщенная в дальнейшем Ж. Левиттом на случай слоений.

Естественным обобщением потоков (динамических систем с непрерывным временем) являются одномерные слоения. Слоения на двумерной сфере возникают в псевдоаносовских диффеоморфизмах и в диффеоморфизмах с одномерным растягивающим аттрактором. Изучение топологического типа этих слоений помогает решить задачу топологической классификации этих диффеоморфизмов. Такие типы диффеоморфизмов были классифицированы в работах Р.В. Плыкина, В.З. Гринеса, А.Ю. Жирова и др.

В отличие от потока, слоение на двумерной сфере может иметь нетривиальный рекуррентный слой, что усложняет топологическую структуру слоений на сфере. К слоениям, имеющим такие слои, относятся слоения Черри. Слоение Черри на двумерной сфере не имеет замкнутых слоев и содержит нигде неплотное квазиминимальное множество, то есть замкнутое множество, являющееся замыканием нетривиального рекуррентного слоя. Глава 3 посвящена нахождению топологических инвариантов слоений Черри на сфере и изучению влияния седловых величин на гладкость таких слоений. В случае простейших слоений дается топологическая классификация.

Потоки Черри, слоения Черри и преобразования Черри имеют сложную топологическую и соответственно динамическую структуру, которая мало изучена. Поэтому их исследование актуально.

**Методы исследования.** Одним из основных методов, восходящих к Пуанкаре, является метод построения секущих и исследование преобразований последования на этих секущих. Идея другого часто используемого метода восходит к А. Вейлю и Д.В. Аносову. Метод состоит в исследовании асимптотического нелокального поведения траекторий и слоев накрывающих потоков и слоений на универсальной или ветвленной накрывающей. Основные свойства исходных потоков и слоений выявляются при анализе свойств накрывающих потоков и слоений, которые инвариантны относительно группы накрывающих преобразований. В диссертации применяются оба этих метода.

**Научная новизна.**

Основные результаты диссертации новые. Именно:

1. на окружности с точки зрения топологической сопряженности классифицируются преобразования Черри, в том числе имеющие один флип;

2. на замкнутых ориентируемых поверхностях, отличных от сферы, и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3 дается топологическая классификация потоков типа Черри;

3. получена топологическая классификация простейших слоений Черри на двумерной сфере.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях, связанных с изучением предельных множеств преобразований, потоков, слоений, аттракторов и репеллеров диффеоморфизмов, а также прикладных задач физики, механики, приводящих к качественному исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на

- Fifteenth annual informal workshop “Dynamics Days”, Будапешт, Венгрия, 1994;
- Международной научной школе “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”, Саранск, 2003;
- “Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам”, Суздаль, 2010;
- Международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110-й годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 2011.

**Публикации.** Основные результаты диссертации содержатся в следующих работах, опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Медведев Т. В. О сопряженности перекладываний двух открытых интервалов окружности без периодических точек // Успехи мат. наук. 1992. Т. 4. С. 201–202.
2. Арансон С. Х., Жужома Е. В., Медведев Т. В. Потоки Черри на двумерной сфере // УМН. 1994. Т. 5(299), № 49. С. 167–168.
3. Арансон С. Х., Жужома Е. В., Медведев Т. В. Классификация преобразований Черри на окружности и потоков Черри на торе // Известия ВУЗов. Математика. 1996. Т. 4, № 407. С. 7–17.
4. Жужома Е. В., Медведев Т. В. Классификация потоков Черри на замкнутых гиперболических поверхностях // Труды Средневолжского математического общества. 2003. Т. 5, № 1. С. 248–252.
5. Медведев Т. В. О классификации слоений Черри на сфере // Труды Средневолжского математического общества. 2004. Т. 6, № 1. С. 186–189.
6. Медведев Т. В. Классификация потоков типа Черри на неориентируемой поверхности рода три // Вестник ННГУ. 2011. № 2(1). С. 139–145.

В других изданиях

1. Медведев Т. В. Разрывные отображения окружности. // Методы прикладного функционального анализа: Межвуз. сб. Нижегородский ун-т, Нижний Новгород. 1991. С. 49–54.

2. Aranson S., Medvedev T., Zhuzhoma E. Cherry foliations and Cherry flows on the sphere // Selecta Math. Sovietica. 1994. Vol. 13, no. 4. Pp. 283–303.

3. Медведев Т. В. Потоки и слоения Черри на двумерных многообразиях // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. 2010. С. 131. Суздаль.

4. Медведев Т. В. Отображения Черри окружности и потоки Черри на замкнутых поверхностях // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная 110-й годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского. Сборник тезисов. 2011. С. 271.

В работах, выполненных с С.Х.Арансоном и Е.В.Жужомой, диссертанту принадлежат формулировки и доказательства теорем, включенных в диссертацию. С.Х.Арансону и Е.В.Жужоме принадлежат постановки задач и общее руководство.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем работы – 141 страница, список литературы включает 60 наименований, в диссертации имеется 27 рисунков.

# КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Во введении формулируется цель исследования, дается краткий исторический обзор и анализ современного состояния изучаемых в диссертации проблем. Приводится аннотация полученных результатов.

В первой главе классифицируются преобразования Черри на окружности.

Дадим определение преобразования Черри на окружности. Рассмотрим функцию $\bar{f}(x),\ x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\bar{f}(x+1) = \bar{f}(x) + 1$;

2. на каждом конечном интервале изменения $x$ $\bar{f}(x)$ имеет не более чем конечное число интервалов постоянства (т.е. интервалов, на каждом из которых $\bar{f}$ принимает постоянное значение) и не более чем конечное число точек разрыва;

3. существует точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, в некоторой окрестности которой $\bar{f}$ непрерывна и строго монотонно возрастает;

4. на открытых интервалах между точками разрыва $\bar{f}(x)$ нестрого монотонна;

   Для $\bar{f}(x)$, удовлетворяющей свойствам 1-4 построим функцию $\bar{f}_*(x)$ такую, что для каждого ограниченного точками разрыва интервала $(a, b)$, на котором $\bar{f}$ не возрастает, $\bar{f}_*(x) = \bar{f}(a + b - x),\ x \in (a, b)$, а в остальных точках $\bar{f}_*(x) = \bar{f}(x)$.

   Потребуем дополнительно

5. функция $\bar{f}_*(x)$ не убывает и непрерывна слева.

Пусть $x_0$ – произвольная точка непрерывности отображения $\bar{f}(x)$, удовлетворяющего условиям 1-5, в некоторой окрестности которой $\bar{f}$ строго монотонно возрастает. Каждый "максимальный" открытый интервал $(a; b) \subset (x_0; x_0 + 1)$, ограниченный точками разрыва отображения $\bar{f}$, на котором $\bar{f}$ не возрастает и строго монотонно убывает в некоторых лежащих на $(a; b)$ полуокрестностях точек $a$ и $b$, назовем флипом (флип может содержать точки разрыва $\bar{f}$). Обозначим через $k$ число флипов на интервале $(x_0; x_0 + 1)$. Из свойств 1 и 2 следует, что $k$ конечно (возможно 0) и не зависит от выбора $x_0$. Множество преобразований прямой, удовлетворяющих свойствам 1-5 с $k$ флипами обозначим через $P_k(\mathbb{R})$. Заметим, что из условия 5 следует, что если точка $y_0$ не является образом интервала постоянства отображения $\bar{f}$ и существует $x_0$, что $\bar{f}(x_0) = y_0$, то такое $x_0$ единственно. На отображения $\bar{f}$ класса $P_k(\mathbb{R})$ удается распространить понятие числа вращения $\mathrm{rot}(\bar{f})$.

**Определение** 1.1. Преобразование $\bar{f} \in P_k(\mathbb{R})$ называется преобразованием типа Черри прямой $\mathbb{R}$ с $k$ флипами, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\bar{f}$ не имеет периодических точек, (т.е. $\bar{f}^k(x) \neq x + m$ для любых $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z}$) и число вращения $\mathrm{rot}(\bar{f})$ иррационально;

2. в концевых точках интервалов постоянства преобразование $\bar{f}$ непрерывно;

3. если $[c; d]$ – интервал постоянства преобразования $\bar{f}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ полный прообраз $\bar{f}^{-n}([c; d])$ является замкнутым интервалом, в некоторой окрестности которого преобразование $\bar{f}$ является гомеоморфизмом;

4. если $x_0$ – точка разрыва преобразования $\bar{f}$, не являющаяся граничной точкой флипа, и $[c; d] = [\bar{f}(x_0); \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \bar{f}(x)]$, то для любого $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ образ $\bar{f}^n([c; d])$ есть замкнутый интервал, в некоторой окрестности которого $\bar{f}$ является гомеоморфизмом.

Пусть $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ - универсальное накрытие окружности $\mathbb{S}^1, \pi(x) = x \pmod 1$. Тогда $\bar{f} \in P_k(\mathbb{R})$ является накрывающим для некоторого преобразования $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, т.е. $f \circ \pi = \pi \circ \bar{f}$. Обозначим через $P_k(\mathbb{S}^1)$ множество преобразований окружности $\mathbb{S}^1$, для каждого из которых существует накрывающее преобразование из $P_k(\mathbb{R})$. Проекции флипов при отображении $\pi$ мы также будем называть флипами.

**Определение** 1.2. Преобразование $f \in P_k(\mathbb{S}^1)$ называется преобразованием типа Черри окружности $\mathbb{S}^1$ с $k$ флипами, если существует накрывающее для $f$ преобразование типа Черри прямой с $k$ флипами. Множество преобразований типа Черри окружности с $k$ флипами обозначим через $\mathrm{Tch}_k(\mathbb{S}^1)$.

В дальнейшем мы рассматриваем отображения класса $\mathrm{Tch}_k(\mathbb{S}^1)$ при $k = 0, 1$. Для таких отображений оказывается возможным обобщить понятие числа вращения, являющегося топологическим инвариантом.

Преобразования типа Черри окружности $f$ и $g$ сопряжены, если существует такой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, что $f \circ h = h \circ g$. Скажем, что преобразования $f, g$ полусопряжены, если существует такое непрерывное сохраняющее ориентацию отображение $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, что $f \circ h = h \circ g$.

Флип преобразования типа Черри окружности состоит из блуждающих точек (лемма 1.1) и преобразование Черри окружности $f$ полусопряжено повороту окружности $R_\alpha$ на постоянный иррациональный угол $\alpha$, равный числу вращения $\mathrm{rot}(f)$, с помощью некоторого непрерывного монотонно неубывающего отображения $h$, не являющегося гомеоморфизмом (лемма 1.2).

**Определение** 1.3. $f \in \mathrm{Tch}_k(\mathbb{S}^1)$, $k = 0, 1$ называется преобразованием Черри окружности класса $\mathrm{Ch}_k(\mathbb{S}^1)$, $k = 0, 1$, если

1. все образы интервалов постоянства и все точки разрыва преобразования $f_*$, построенного по $f$ (т.е. точки разрыва, не являющиеся границами флипа), лежат в $\Omega(f)$;
2. пусть $(a; b)$ – флип, тогда $\bar{f}$ является гомеоморфизмом в некоторой окрестности $\bar{f}_*^n([a; b])$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Для преобразования Черри $f$ вводится понятие схемы $S(f, h)$, связанное с полусопрягающим отображением $h$. Вводится понятие изоморфизма схем. Выполняется

**Теорема** 1.1. Пусть преобразования $f$ и $g \in \mathrm{Ch}_k(\mathbb{S}^1)$, $k = 0, 1$ полусопряжены с поворотами посредством непрерывных сохраняющих ориентацию отображений $h_1$, $h_2$ и пусть $S(f, h_1)$, $S(g, h_2)$ – схемы $f$, $g$ относительно $h_1$, $h_2$ соответственно. Преобразования $f$, $g$ сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathrm{rot}(f) = \mathrm{rot}(g)$ и схемы $S(f, h_1)$, $S(g, h_2)$ изоморфны.

Таким образом, схема является полным топологическим инвариантом с точностью изоморфизма. Далее вводится понятие абстрактной допустимой схемы и доказывается теорема реализации:

**Теорема** 1.2. Пусть $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ – поворот с $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $S$ – допустимая схема. Тогда существует преобразование Черри окружности $f$ класса $\mathrm{Ch}_k(\mathbb{S}^1)$, $k = 0, 1$, полусопряженное посредством $h$ с $R_\alpha$, $\alpha = \mathrm{rot}(f)$, и такое, что $S(f, h) = S$. При этом если в $S$ существует точка, снабженная символьным кодом, то $f$ имеет флип ($k = 1$), в противном случае $f$ не имеет флипа ($k = 0$).

В главе 2 рассматриваются гладкие потоки Черри на ориентируемых замкнутых поверхностях, имеющих род, неравный нулю, и на замкнутой неориентируемой поверхности рода 3.

Пусть на двумерном замкнутом многообразии $M^2$ задан $C^r$-поток $f^t$ ($r \geq 1$). Траектория потока $f^t$ называется нетривиальной рекуррентной, если она не является точкой покоя, непериодическая и лежит в своем предельном множестве. Квазиминимальным множеством потока называется замыкание нетривиальной рекуррентной траектории. Арациональным называется поток без периодических траекторий и сепаратрисных связей.

**Определение** 2.1. Скажем, что арациональный $C^1$-поток $f^t$ с конечным числом состояний равновесия на замкнутой поверхности $M^2$ называется потоком типа Черри и принадлежит классу $\mathrm{Tch}(M^2)$, если выполняются следующие условия:

1. состояниями равновесия $f^t$ являются топологические седла и узлы;
2. $f^t$ имеет одно квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$;
3. $\Omega(f^t)$ нигде не плотно на $M^2$, т.е. $f^t$ не транзитивен;
4. любая компонента связности множества $M^2 \setminus \Omega(f^t)$ односвязна либо гомеоморфна открытому листу Мебиуса;
5. в каждый узел потока $f^t$ идет ровно по одной сепаратрисе седла;
6. если седло имеет сепаратрису, идущую в узел, оно лежит в $\Omega(f^t)$ и имеет ровно 4 сепаратрисы и обратно: если $M^2$ – ориентируемая поверхность и седло лежит в квазиминимальном множестве $\Omega(f^t)$, оно имеет сепаратрису, идущую в узел;
7. если $O_1, \ldots, O_k$ – седла, лежащие в квазиминимальном множестве $\Omega(f^t)$, и $L_i^j$ – их сепаратрисы, то в каждой компоненте связности дополнения к $\Omega(f^t) \cup \bigcup\limits_{i,j} L_i^j$ лежит минимально возможное число состояний равновесия.

Пусть $O_i,\ i = 1, \ldots, m$ – седла потока типа Черри $f^t$, имеющие по одной сепаратрисе, идущей в узел $U_i$. Пусть сепаратриса $L_3^i$ седла $O_i$ такова, что $\Omega(f^t) \cap [\omega(L_3^i) \cup \alpha(L_3^i)] = O_i$, т.е. $\omega$- ($\alpha$-)предельным множеством $L_3^i$ является узел $U_i$. Тогда сепаратрису $L_3^i$ седла $O_i$ будем называть черной. Компоненту связности множества $D(f^t) = M^2 \setminus [\Omega(f^t) \bigcup\limits_{i=1}^{k} (L_1^i \cup L_2^i \cup L_4^i]$, содержащую черную сепаратрису $L_3^i$, назовем черной ячейкой. Остальные компоненты связности множества $D(f^t)$ назовем серыми ячейками. Черную ячейку будем называть положительной (отрицательной), если черная сепаратриса, которую она содержит, является $\alpha-$ (соответственно $\omega-$) сепаратрисой седла из $\Omega(f^t)$.

Пусть $f^t \in \mathrm{Tch}(M^2)$, и $\Omega(f^t)$ – квазиминимальное множество. Точка $m \in \Omega(f^t)$ называется достижимой изнутри граничной точкой, если существует такая дуга $\lambda$ с концевой точкой $m$, что $\lambda \setminus m \subset M^2 \setminus \Omega(f^t)$.

Параграф 2.2 посвящен потокам типа Черри на двумерном торе $T^2$, а параграф 2.3 – потокам типа Черри на неориентируемом замкнутом многообразии $M_3^2$ рода 3. Квазиминимальное множество арациональных потоков на замкнутых неориентируемых многообразиях рода 3, в отличие от случая тора, оказывается всегда нигде неплотным (теорема 2.3).

Напомним, что иррациональной обмоткой на торе называется поток, накрывающий для которого на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задается системой $\dot{x} = 1, \ \dot{y} = \mu, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Пусть $f^t \in \mathrm{Tch}(T^2)$ $(f^t \in \mathrm{Tch}(M_3^2))$. Тогда существует гомотопное тождественному, непрерывное (не являющееся гомеоморфизмом) преобразование $h : T^2 \to T^2$ $(h : M_3^2 \to T^2)$, отображающее $f^t$ на иррациональную обмотку так, что на траекториях, непринадлежащих черным и серым ячейкам и их достижимым изнутри границам, $h$ является гомеоморфизмом (леммы 2.2 и 2.3). В теории динамических систем отображение $h$ называется операцией сдувания (blowing-down map).

Вводятся понятие схемы потока типа Черри на торе и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3. Схема является иррациональной обмоткой на торе, полученной в результате операции сдувания, некоторым траекториям которой приписаны коды, содержащие информацию о взаимном расположении черных и серых ячеек, соответствующих этим траекториям. Вводится понятие абстрактной допустимой схемы и эквивалентности схем.

Основной результат для потоков Черри на торе содержится в следующих двух теоремах.

**Теорема** 2.1 Два потока $f_1^t$ $f_2^t$ типа Черри на $T^2$ топологически орбитально эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $X(f_1^t, h_1), \ X(f_2^t, h_2)$ соизмеримы, где $h_i$ – некоторая операция сдувания потока $f_i^t$ $(i = 1, 2)$.

**Теорема** 2.2 Пусть $X$ – абстрактная допустимая схема, и $f_0^t$ – соответствующая иррациональная обмотка. Тогда на $T^2$ существует $C^1$-поток типа Черри $f^t$, схема которого равна $X$.

Аналогичные теоремы (теоремы 2.4 и 2.5) доказываются для замкнутой неориентируемой поверхности рода 3.

В параграфе 2.4 изучаются потоки типа Черри на ориентируемых замкнутых поверхностях рода больше единицы $M^2$.

Для замкнутых ориентируемых двумерных многообразий отличных от сферы и тора в качестве универсального накрытия удобно рассматривать плоскость Лобачевского.

Пусть $\Delta$ – плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, то есть $\Delta$ – единичный круг на комплексной $z$-плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (|z| = 1)$ называется абсолютом. В силу теоремы об униформизации, существует группа $\Gamma$ изометрий плоскости $\Delta$ такая, что $\Delta/\Gamma \cong M^2$. Обозначим через $\pi : \Delta \to \Delta/\Gamma \cong M^2$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением.

Пусть $l^+ = \{m(t) \in M^2 : t \geq 0\}$ – полубесконечная непрерывная кривая без самопересечений на $M^2$, и $\bar{l}^+ = \{\overline{m}(t) \in \Delta : t \geq 0\}$ – ее поднятие на $\Delta$. Предположим, что $\bar{l}^+$ стремится в евклидовой метрике на замкнутом диске $\Delta \cup S_\infty$ при $t \to +\infty$ ровно к одной точке $\sigma$ абсолюта $S_\infty$. Будем говорить в этом случае, что кривая $\bar{l}^+$ имеет асимптотическое направление, определяемое точкой $\sigma$ (допуская некоторую вольность, будем говорить также, что $l^+$ имеет асимптотическое направление), а точка $\sigma$ достигается кривой $\bar{l}^+$.

Пусть $l = \{m(t) \in M^2 : -\infty < t < +\infty\}$ – простая бесконечная непрерывная кривая на поверхности $M^2$. Точка $m(0)$ делит $l$ на две полубесконечные кривые: положительную $l^+ = \{m(t) \in M^2 : t \geq 0\}$, и отрицательную $l^- = \{m(t) \in M^2 : t \leq 0\}$. Пусть $\bar{l} = \{\overline{m}(t) : -\infty < t < +\infty\}$ – поднятие кривой $l$ на $\overline{M}$. Тогда каждая из полукривых $\bar{l}^+ = \{\overline{m}(t) : t \geq 0\}, \bar{l}^- = \{\overline{m}(t) : t \leq 0\}$ является поднятием $l^+$ и $l^-$ соответственно. Предположим, что каждая кривая $\bar{l}^+$ и $\bar{l}^-$ имеет асимптотическое направление $\omega(\bar{l}) \in S_\infty$ и $\alpha(\bar{l}) \in S_\infty$ соответственно, и предположим, что $\alpha(\bar{l}) \neq \omega(\bar{l})$. Тогда существует геодезическая $\overline{g}(\bar{l})$ с теми же идеальными концевыми точками $\alpha(\bar{l})$, $\omega(\bar{l})$, ориентированная от $\alpha(\bar{l})$ к $\omega(\bar{l})$. Геодезическая $\overline{g}(\bar{l})$ называется соасимптотической для кривой $\bar{l}$. Ясно, что геодезическая $\pi(\overline{g}(\bar{l})) \overset{\text{def}}{=} g(l)$ на $M^2$ не зависит от выбора накрывающей $\bar{l}$, и называется геодезической, соасимптотической для кривой $l$.

Все траектории и обобщенные траектории потока типа Черри на замкнутой ориентируемой поверхности $M^2$, не стремящиеся к состоянию равновесия ни при $t \to -\infty$, ни при $t \to +\infty$, имеют соасимптотические геодезические.

**Определение** 2.4 Пусть $f^t$ – поток типа Черри на замкнутой ориентируемой поверхности $M^2$. Совокупность соасимптотических геодезических для всех траекторий и обобщенных траекторий потока $f^t$, для которых соасимптотические геодезические существуют, назовем геодезическим каркасом потока типа Черри и обозначим через $G(f^t)$.

Напомним, что геодезическая ламинация есть семейство попарно непересекающихся геодезических, каждая из которых не имеет трансверсальных самопересечений, и объединение всех геодезических образует замкнутое множество. Ламинация называется нетривиальной, если она состоит из незамкнутых геодезических. Ламинация минимальна, если она не содержит собственных подламинаций. Нетривиальная минимальная ламинация $G$ на $M^2$ называется неприводимой, если любая замкнутая геодезическая на $M^2$ пересекается с $G$.

Имеет место

**Теорема** 2.9 Пусть $f^t$ – поток типа Черри на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности $M^2$ рода $p \geq 2$. Тогда

1. Геодезический каркас $G(f^t)$ потока $f^t$ является ориентируемой нетривиальной минимальной и неприводимой геодезической ламинацией, состоящей из нетривиаль-

ных рекуррентных геодезических.

2. Каждая компонента связности $\mathcal{L}$ множества $M^2 \setminus G(f^t)$ есть односвязная область, любое поднятие которой на универсальную накрывающую представляет собой внутренность геодезического $2(n+1)$-угольника ($n \in \mathbb{N}$) с вершинами, лежащими в иррациональных точках абсолюта. При этом вершины достигаются сепаратрисами единственного седла $\bar{O}$ накрывающего потока.

Определяется понятие схемы потока типа Черри на $M^2$ которая является геодезическим каркасом с приписанными кодами, характеризующими расположение черных и серых ячеек. Вводится понятие допустимой схемы.

Классификационные результаты для потоков типа Черри на замкнутых ориентируемых гиперболических поверхностях содержатся в следующих двух теоремах.

**Теорема** 2.10 Пусть $f_1^t$, $f_2^t$ – потоки типа Черри на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности $M^2$. Тогда $f_1^t$, $f_2^t$ орбитально топологически эквивалентны с помощью гомотопически тривиального гомеоморфизма $M^2 \to M^2$ тогда и только тогда, когда $G(f_1^t) = G(f_2^t)$, и схемы геодезических каркасов $G(f_1^t)$, $G(f_2^t)$ совпадают.

**Теорема** 2.11 Для произвольной ориентируемой минимальной неприводимой геодезической ламинации $G$, состоящей из незамкнутых нетривиально рекуррентных геодезических, которая наделена допустимой схемой, существует поток типа Черри $f^t$ такой, что $G(f^t) = G$, и схема геодезического каркаса $G(f^t)$ совпадает с допустимой схемой ламинации $G$.

Естественным обобщением потоков с непрерывным временем (однопараметрических групп преобразований) являются одномерные слоения.

В третьей главе изучаются одномерные слоения Черри на двумерной сфере. Отличительной особенностью слоений на двумерной сфере от потока состоит в том, что поток на двумерной сфере не имеет незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий, а слоение уже может иметь на двумерной сфере (и даже на двумерном диске) нетривиальный рекуррентный слой. Слоение Черри, рассматриваемые в этой главе, содержат такой слой.

$C^r$ слоением $F$ с множеством особенностей $\operatorname{Sing} F$ на двумерном многообразии $M^2$ назовем декомпозицию множества $M^2 \setminus \operatorname{Sing} F$ на объединение непересекающихся связных подмножеств $\{l_\alpha\}$ (слои слоения), такую что каждая точка $x \in M^2 \setminus \operatorname{Sing} F$ имеет окрестность $U$ с системой локальных координат $\psi : U \to R^2$ класса $C^r$ такие, что связные компоненты пересечений $U$ каждым слоем $l_\alpha$ отображаются посредством $\psi$ в прямые $y = \text{const}$.

Особенность $s_0 \in \operatorname{Sing} F$ называется иглой, если существуют окрестность $U$ особенности $s_0$ с системой локальных координат $\psi : U \to R^2$ ($\psi(s_0) = 0$) класса $C^r$ такие, что для каждого слоя $l_\alpha$ компоненты из $U \cap l_\alpha$ отображаются $\psi$ на кривые $x = t^2 - c,\ y = 2ct$, где $c = \mathrm{const}$ – параметр. Слой $\psi^{-1}(l_0)$, где $l_0 : x > 0, y = 0$ называется сепаратрисой иглы $s_0$. Каждая игла имеет индекс $\frac{1}{2}$.

Особенность $s \in \operatorname{Sing} F$ назовем 4-седлом (узлом), если в некоторой окрестности $U \ni s$ слоение $F|_U$ вкладывается в поток с седлом с четырьмя сепаратрисами (узлом) $s$.

Особенность $s \in \operatorname{Sing} F$ назовем гиперболическим седлом, если в некоторой окрестности $U \ni s$ слоение $F|_U$ вкладывается в поток с гиперболическим седлом $s$.

Незамкнутый слой (или полуслой) $l$ называется нетривиальным рекуррентным, если он содержится в собственном предельном множестве. Квазиминимальным множеством называется замыкание всех нетривиальных рекуррентных слоев (или полуслоев).

Слоение назовем арациональным, если оно не имеет замкнутых слоев и сепаратрисы не соединяют особенности седлового типа.

**Определение** 3.1 Арациональное $C^1$-слоение $F$ на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ с конечным числом особенностей назовем слоением Черри, если

1. $F$ имеет одно квазиминимальное множество $\Omega(F)$;

2. в $\Omega(F)$ лежат ровно четыре иглы $T_i$, $i = 1, 2, 3, 4$; остальные особенности $F$ являются узлами или 4-седлами;

3. в каждый узел слоения идет ровно по одной сепаратрисе 4-седла, которое в этом случае лежит в $\Omega(F)$.

Пусть квазиминимальное множество $\Omega(F)$ содержит 4-седла $O_i$, $i = 1, \dots, k$ и $l^i_j$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, 2, 3, 4$ – их занумерованные при циклическом обходе сепаратрисы, причем $l^i_3$, $i = 1, \dots, k$ идут в узлы. Компоненты связности множества $\mathbb{S}^2 \setminus \left( \Omega(F) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} (l^i_1 \cup l^i_2 \cup l^i_4) \right)$, содержащие сепаратрисы $l^i_3$, $i = 1, \dots, k$, назовем черными ячейками (они, очевидно, содержат один узел). Остальные компоненты этого множества назовем серыми ячейками.

Мы рассматриваем слоения Черри, имеющие хотя бы одну черную ячейку.

Скажем, что слоения $F_1, F_2$ на поверхности $M^2$ топологически эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм $\varphi : M^2 \to M^2$, что слои $F_1$ отображаются в слои $F_2$.

Важным инвариантом потоков на двумерном торе является число вращения Пуанкаре, которое для некоторого класса потоков является полным инвариантом. Мы вводим понятие орбиты вращения $\mu(F)$ для слоения Черри $F$ на сфере, аналогичное числу вращения Пуанкаре для потоков и показываем, что орбита вращения является топологическим инвариантом, а именно

**Теорема** 3.1 Если слоения Черри $F_1$ и $F_2$ на сфере топологически эквивалентны, их орбиты вращения совпадают.

Гиперболическое седло гладкого потока на двумерном многообразии определяется собственными числами $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$ и характеристическим числом $\nu = -(\lambda_1/\lambda_2)$.

Характеристическим числом гиперболического седла $O \in \Omega(F)$ называется характеристическое число соответствующего потока $f^t|_U$.

Для каждого слоения Черри $F$ на $\mathbb{S}^2$ обозначим через $\nu_1, \ldots, \nu_n$ набор характеристических чисел всех особенностей седлового типа $O_1, \ldots, O_n \in \Omega(F)$.

В следующих двух теоремах устанавливается связь между характеристическими числами и степенью гладкости слоения Черри.

**Теорема** 3.2 Пусть $F$ – $C^r$ слоение Черри ($r \geq 5$) на $\mathbb{S}^2$ и все седла $F$, лежащие в $\Omega(F)$ гиперболические. Тогда $\Omega(F)$ содержит особенность типа седло с характеристическим числом $\nu_i \neq 1$.

**Теорема** 3.3 На сфере существует слоение Черри $C^1$ с набором гиперболических седел с характеристическими числами $\nu_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В конце третьей главы дается топологическая классификация простейших слоений Черри на сфере. Простейшие слоения Черри имеют одну черную ячейку и не имеют серых ячеек.

Двумерный тор является разветвленным двулистным накрытием сферы. Линейным транзитивным слоением на двумерной сфере назовем образ иррациональной обмотки на торе при естественной проекции.

Для простейшего слоения Черри существует отображение сдутия $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ и линейное транзитивное слоение $F_0 = h(F)$, $\mu(F_0) = \mu(F)$, такие что черная ячейка $B_F$ отображается на полуслой, а на множестве $\mathbb{S}^2 \setminus B_F$ отображение $h$ является послойным гомеоморфизмом (лемма 3.4). Множество $X(F) = h(Q_F)$ называется отмеченным полуслоем слоения $F_0$. Вводится понятие эквивалентности отмеченных полуслоев.

Следующие две теоремы дают полную топологическую классификацию простейших слоений Черри на сфере.

**Теорема** 3.4 Простейшие слоения Черри $F_1$, $F_2$ на $\mathbb{S}^2$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $X(F_1)$ и $X(F_2)$ эквивалентны.

**Теорема** 3.5 Пусть $F_0$ – линейное транзитивное слоение на $\mathbb{S}^2$ и пусть $X$ – не лежащий на сепаратрисе иглы полуслой слоения $F_0$. Тогда существует простейшее слоение Черри $F$ на $\mathbb{S}^2$ такое, что $X(F) = X$.

Следующая теорема показывает, что орбита вращения не является полным топологическим инвариантом.

**Теорема** 3.6 На $\mathbb{S}^2$ существует континуум топологически попарно не эквивалентных простейших слоений Черри с одной и той же орбитой вращения.