

*На правах рукописи*



Сазонова Марина Леонидовна

**НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ И ИХ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ**

Специальность 01.02.06 -

Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Нижний Новгород - 2011**

Работа выполнена на кафедре теоретической механики  
механико-математического факультета  
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, с.н.с.  
Новиков Валерий Вячеславович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
Дерендяев Николай Васильевич

доктор физико-математических наук, доцент  
Абрашкин Анатолий Александрович

Ведущая организация: Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН (г. Москва)

Защита состоится «17» ноября 2011 года в 16<sup>30</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, пр.Гагарина, 23, корпус 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «14» октября 2011 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.09

доктор физико-математических наук, профессор



Игумнов Л.А.

Диссертационная работа посвящена изучению некоторых интересных и важных для теории и решения технических задач проблем динамики волн в средах. Обсуждается вопрос о расчете импульса волн, распространяющихся в упругих системах, и воздействии волн на препятствие в виде закреплений, ограничителей, сосредоточенных объектов. Изучаемые особенности динамики упругих систем при взаимодействии с дискретными объектами составляют научную основу волновых технологий, применяемых во многих отраслях техники, например, машиностроении, материаловедении, строительстве.

Вопросу об импульсе механических волн, распространяющихся в различных средах и, в частности, в упругой среде посвящено большое число работ, например, Ландау Л.Д., Лифшица Е.М., Островского Л.А., Андреева Н.Н., Весницкого А.И., Потапова А.И., Уткина Г.А., Денисова Г.Г., Дерендяева Н.В. и др. Имеются разноречивые мнения о наличии импульса волн и механизме их воздействия на отражающее препятствие. В некоторых работах можно встретить утверждение, что волне присущ особый импульс, названный волновым, и воздействие волны на границу среды или препятствие определяется, опираясь на это понятие. Однако плотность волнового импульса не тождественна плотности полного импульса и составляет лишь её часть. Механическая волна представляет собой форму коллективного движения частиц среды, поэтому под импульсом волны следует понимать количество движения, которым обладают частицы, участвующие в волновом движении, т.е. рассуждения об импульсе механической волны должны основываться на классическом определении импульса (Денисов Г.Г.).

Каким должен быть последовательный математический подход к расчету импульса механических волн и их воздействия на преграды? В работе рассматривается ряд примеров продольных колебаний стержня, позволяющий сделать следующие выводы:

- наличие или отсутствие импульса волны в упругой среде связано с условиями её возбуждения; импульс волны определяется в результате рассмотрения начально-краевой задачи;

- импульс может быть ориентирован как по направлению распространения волны, так и против него;
- полное решение вопроса об импульсе волн требует исследования с учетом различных нелинейных факторов; в первую очередь, это касается тех случаев, когда волна в линейном приближении не обладает импульсом (это относится и к волнам, рассматриваемым в акустике, где речь идет о безграничных периодических волнах или о цугах волн, включающих большое число периодов).

В диссертационной работе вопрос расчета импульса волн, возбуждаемых при колебаниях упругих систем, и воздействия волн на преграды рассматривается в продолжение идей, развитых Г.Г. Денисовым. Изучение свойств волновых процессов проводится на примерах простых систем, допускающих строгое математическое обоснование на основе точных решений и наглядную интерпретацию. Этому условию удовлетворяют, в частности, одномерные системы: струна, балка и др. Решение основано лишь на понятии классического импульса в обычном смысле ньютоновской механики. Рассмотрение конкретных задач проводится в квадратичном приближении.

Во второй части работы изучается вопрос о силе сопротивления, которую испытывают тела при движении в среде. Исследуются такие режимы движения, при которых энергетические затраты на его поддержание минимальны.

Вопрос об уменьшении энергетических потерь, об уменьшении сопротивления, испытываемым телами при их движении в средах со скоростью, большей скорости распространения волн в среде, является важным и актуальным. Денисовым Г.Г. и Новиковым В.В. для «сверхзвукового» движения сосредоточенной нагрузки по мембране показано, что возможны такие конфигурации подвижных нагрузок и отражающих волны границ, при которых прямолинейное движение нагрузки не встречает сопротивления. В данной работе возможность уменьшения сопротивления сверхзвуковому движению объектов изучается в случае деформации мембраны подвижной распределенной нагрузкой, а также при движении тел в газе.

### **Цели диссертационной работы**

- исследование на конкретных примерах в приближении первого и второго порядка вопроса об импульсе волн, возбуждаемых при колебаниях упругих систем, и воздействии волн на препятствие: определение значения импульса волн при различных начальных условиях; исследование влияния параметров нелинейности системы на величину воздействия волнового возмущения на границу системы; определение давления на границе в зависимости от начальных и граничных условий;
- получение уравнений движения одномерных упругих систем и соответствующих естественных краевых условий из вариационной постановки задачи в предположении как неподвижных, так и движущихся закреплений и нагрузок;
- рассмотрение на основе данных соотношений конкретной задачи о динамике одномерной упругой системы и движущегося вдоль нее тела;
- исследование на конкретных примерах вопроса об уменьшении сопротивления тел при их движении в средах со скоростью, большей скорости распространения волн в среде.

### **Общие методы исследования**

В работе используются различные методы решения уравнений математической физики. Исследования проводились с использованием формулы Даламбера, интегрального преобразования Фурье, метода характеристик. Получение краевой задачи выполнено на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского.

### **Научная новизна**

- на новых, не рассматривавшихся ранее примерах исследованы ключевые факторы, которые необходимо учитывать при изучении вопроса об импульсе упругих волн и их воздействии на препятствие: влияние начальных и граничных условий, нелинейности в уравнениях движения упругих систем и в краевых условиях;

- представлена вариационная постановка задач динамики одномерных упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками;
- проиллюстрировано применение полученных уравнений движения и соответствующих естественных краевых условий при исследовании движения тела под действием сил со стороны колеблющейся упругой системы: получено аналитическое решение задачи при ряде упрощающих предположений, изучено изменение импульса в системе;
- показана возможность уменьшения сопротивления движению тел в средах за счет выбора конфигурации системы на примере задачи деформации мембраны подвижной распределенной нагрузкой, проиллюстрирован данный подход для случая сверхзвукового движения тел в газе.

**Достоверность** полученных результатов обеспечена применением апробированных методов решения задач динамики упругих систем и подтверждается согласованностью результатов с общими положениями классической механики, а также сравнением результатов, полученных разными методами, и сопоставлением с решениями других авторов.

### **Научно-практическая значимость**

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании элементов приборов и машин, работающих на волновых принципах, изучении колебаний рельсового пути и мостов под действием движущихся грузов.

Работа также имеет методический характер. Полученные результаты могут быть применены в разделах курсов аналитической механики и теории колебаний распределенных механических систем.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

- обоснованная процедура определения импульса волн, возбуждаемых при колебаниях упругих систем, и их воздействия на границу среды;
- вариационная постановка задач динамики одномерных упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками, уравнения движения таких систем и естественные краевые условия;

- решение на основе полученных соотношений задачи о движении массы вдоль струны, совершающей продольно-поперечные колебания;
- исследование возможности создания устройств, обеспечивающих минимальное сопротивление при движении тел в средах.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: V Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2006» (28 ноября-1 декабря 2006 г., Казань), Всероссийская научно-техническая конференция «Фундаментальные проблемы машиноведения: новые технологии и материалы» (29-30 ноября 2006г., Нижний Новгород), XII Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки) (23-36 мая 2007 г., Красный плес), Вторая Всероссийская научная конференция по волновой динамике машин и конструкций (29-30 октября 2007 г., Нижний Новгород), бая Европейская конференция по нелинейной динамике (30 июня – 4 июля 2008 г., Санкт-Петербург), VIII Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем» (22-26 сентября 2008 г., Нижний Новгород), X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (24-30 августа 2011 г., Нижний Новгород).

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 11 работ, из них 4 [1-4] в рецензируемых изданиях из списка ВАК. Одна статья находится в печати:

Денисов Г.Г., Новиков В.В. Смирнова М.Л. Об импульсе волн и их влиянии на движение сосредоточенных объектов вдоль одномерных упругих систем // ПММ, 2012, № 1. – В печати.

Основные результаты диссертации получены лично М.Л. Смирновой. Г.Г. Денисову и В.В. Новикову [1-3, 9-11] принадлежит постановка задач, общее руководство исследованиями и участие в обсуждении результатов. А.Е. Федоров [2, 11] провел численное исследование кругового движения нагрузки

по мембране, закрепленной на неподвижном диске – этот материал в диссертацию не включен.

**Диссертационная работа выполнена при поддержке** грантов РФФИ «Динамика распределенных механических систем» (проекты 06-01-00368, 09-01-00411).

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 119 страницах, включает 37 рисунков. Список литературы состоит из 73 наименований.

**Во введении** дана общая характеристика работы, сформулированы основные направления исследований.

**В первой главе** представлен обзор литературы по вопросу об импульсе волн в различных средах и воздействию волн на отражающее их препятствие. Обосновывается актуальность, и формулируются основные цели и задачи диссертационной работы.

**Во второй главе** приводится ряд конкретных примеров о волновом движении в упругой среде. Исследование выполняется в квадратичном приближении, изучается влияние параметров нелинейности системы на величину импульса волн и давления, оказываемого ими на границе.

В п. 2.1 рассматриваются продольные колебания стержня. Плотность функции Лагранжа имеет вид  $\lambda = \rho u_t^2 / 2 - ESu_x^2 / 2$ , где  $u(x, t)$  – продольные смещения,  $\rho$  – возмущенное значение погонной плотности,  $E$  – модуль Юнга,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

Для исследования влияния начальных условий на решение задачи об импульсе возбуждаемых волн учтена нелинейность, связанная с изменением погонной плотности за счет деформирования стержня: из соотношения  $\rho(dx + du) \approx \rho_0 dx$  следует  $\rho \approx \rho_0(1 - u_x)$ ,  $\rho_0$  – невозмущенное значение плотности. Представление продольных смещений стержня  $u(x, t)$  в виде суммы



величин первого и второго порядка малости  $u = u_1 + u_2$  приводит к следующей системе уравнений движения:

$$u_{1tt} - c_0^2 u_{1xx} = 0, \quad u_{2tt} - c_0^2 u_{2xx} - u_{1x} u_{1t} - 2u_{1t} u_{1xt} = 0, \quad c_0^2 = \frac{ES}{\rho_0}. \quad (1)$$

Значение импульса складывается из трех компонент:

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)}. \quad (2)$$

Здесь  $P^{(1)} = \int \rho_0 u_{1t} dx$  - линейная часть импульса волн первого приближения. При рассмотрении линейного случая данное выражение дает полное решение задачи об импульсе волн. Второе и третье слагаемые (2) обусловлены учетом нелинейности. Выражение  $P^{(2)} = -\int \rho_0 u_{1x} u_{1t} dx$  определяет вклад волн первого приближения в квадратичную часть импульса. Составляющая  $P^{(3)} = \int \rho_0 u_{2t} dx$  зависит от решения уравнения (1) для второго приближения.

Рассматриваются условия  $u_1(x,0) = f(x)$ ,  $u_{1t}(x,0) = -c_0 f_x(x)$ , при которых в первом приближении возбуждается бегущая вправо волна  $u_1 = f(x - c_0 t)$  (в начальный момент времени волна с профилем  $f(x)$  занимает положение  $0 \leq x \leq a$ ,  $f(0) = f(a) = 0$ ). В этом случае линейная часть импульса (2) определяется значением функции  $f$  на концах интервала  $c_0 t \leq x \leq a + c_0 t$  и равна нулю. Создаваемое волной усилие, действующее на закрепленный конец стержня  $x = x_l$  ( $x_l > a$ ), также нулевое.

Второе слагаемое в выражении (2) для импульса волны

$$P^{(2)} = -\rho_0 c_0 \int_{c_0 t}^{c_0 t + a} u_{1x} u_{1t} dx = \rho_0 c_0 \int_0^a f_x^2(x) dx.$$

Составляющая импульса  $P^{(2)}$  постоянна и направлена в сторону движения волны. Это и есть часть импульса, называемая «волновым импульсом».

В случае нулевых начальных условий  $u_2|_{t=0} = \varphi(x) = 0$ ,  $u_{2t}|_{t=0} = \psi(x) = 0$  во втором приближении образуется группа волн, бегущих в разные стороны,

импульс которых равен нулю. Суммарный импульс в данном случае равен

$$P = P^{(2)} = \rho_0 c_0 \int_0^a f_x^2(x) dx.$$

Подчеркнем, что  $P^{(2)}$  вычисляется по первому

приближению, но имеет второй порядок малости.

При условиях  $u_2|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $u_{2t}|_{t=0} = \psi(x) = -c_0 \varphi_x(x) - 3c_0 f_x^2(x)/4$  во втором приближении образуются только волны, бегущие вправо, т.е. в том же направлении, что и начальное линейное возмущение. Импульс волн второго приближения в этом случае равен:

$$P^{(2)} + P^{(3)} = \rho_0 c_0 \int_0^a f_x^2(x) dx + \rho_0 \int_0^a \psi(x) dx.$$

Импульс этих волн постоянен, определяется начальными условиями, заданными для  $0 < x < a$ , и в зависимости от вида начальной скорости  $\psi(x)$  второго приближения может быть как положительным или отрицательным, так и нулевым.

Таким образом, ответ на вопрос об импульсе волн в упругой среде и их воздействии на границу среды определяется начальными условиями, причем вычисление импульса и силы, с которой волна действует на границу, требует рассмотрения нелинейной задачи.

Для исследования влияния физических свойств системы на величину воздействия волнового возмущения на границу введен параметр  $\beta$ , характеризующий нелинейные свойства системы, таким образом, что плотность функции Лагранжа имеет вид:

$$\lambda = \frac{1}{2} \rho_0 u_t^2 - \frac{1}{2} E S u_x^2 + \frac{1}{6} \beta \rho_0 u_x^3.$$

Аналогично предыдущей задаче рассмотрен случай возбуждения в первом приближении локализованного волнового возмущения. Возбужденная волна, благодаря наличию нелинейности, распадается на группу волн, бегущих в том же направлении, и обратную волну. Суммарный импульс образовавшейся группы волн равен нулю. Для подсчета в точке закрепления системы усилия,

обусловленного воздействием волн второго приближения, обратная волна не учитывается, т.к. она не взаимодействует с рассматриваемым ограничителем.

Воздействие на границу определяется соотношением  $R|_{x=x_l} = -\frac{\beta\rho}{4c_0} \int_0^a f_x^2(x)dx$ .

Таким образом, ответ на вопрос о воздействии волны на границу упругой системы различен при рассмотрении задачи в рамках линейной и нелинейной моделей. В рассматриваемом случае давление возникает лишь при наличии нелинейности. Оно может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака коэффициента нелинейности  $\beta$ . Сказанное относится и к импульсу волны, причем импульс волны не связан с направлением ее распространения, его знак определяется параметром нелинейности.

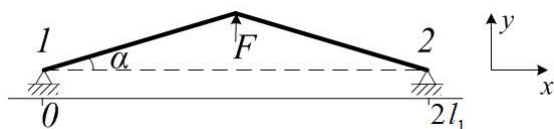
В п. 2.2 для случая поперечных движений одномерных упругих систем исследуется еще одна особенность, которую следует иметь в виду при вычислении сил, возникающих на границе системы. Это – необходимость учета нелинейной связи поперечных и продольных движений, как в уравнениях движения, так и в краевых условиях. В данном разделе изучается зависимость решения вопроса о воздействии волн на препятствие от вида препятствия. С этой целью, а также для придания изложению простоты и наглядности рассматриваются статические задачи: струна, натянутая между двумя закреплениями, в средней точке приложена постоянная сила  $F$  (рис. 1, 2) такая, что угол отклонения струны от горизонтали равен  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ).

Воздействие струны на границы в случае жесткой заделки обоих концов (рис. 1) одинаково по величине и противоположно по направлению, оно возрастает с увеличением угла  $\alpha$ , стремясь сблизить границы. В линейной модели силы  $R_{1x}$  и  $R_{2x}$  обусловлены начальным натяжением струны:

$$R_{1x} = -R_{2x} = T_0.$$

Продольная составляющая силы действия струны на закрепление, ограничивающее лишь поперечные смещения (рис. 2), есть величина, нелинейная по  $\alpha$ . Она возникает только при наличии отклонений и направлена

в сторону ограничителей, то есть «давит» на них, что существенно отличается от первого случая, когда при  $\alpha \neq 0$  производится дополнительное отрицательное давление.



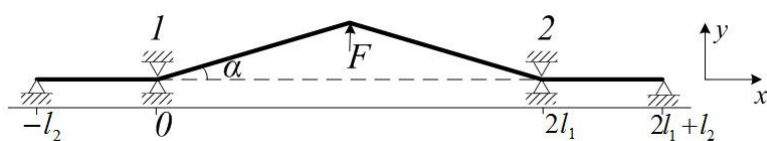
$$R_{1x} \approx T_0 + kl_0 \frac{\alpha^2}{2}, R_{1y} \approx T_0 \alpha$$

$$R_{2x} \approx -T_0 - kl_0 \frac{\alpha^2}{2}, R_{2y} \approx T_0 \alpha$$

$$T_0 = k(2l_1 - l_0)$$

$k$  – коэффициент упругости струны

Рис. 1.



$$R_{1x} \approx -T_0 \frac{\alpha^2}{2}, R_{1y} \approx T_0 \alpha$$

$$R_{2x} \approx T_0 \frac{\alpha^2}{2}, R_{2y} \approx T_0 \alpha$$

$$T_0 = k(2l_1 + 2l_2 - l_0)$$

Рис. 2.

Таким образом, решение вопроса о воздействии упругой системы на границу зависит от вида граничных условий. Различие как по величине, так и по знаку действующих на границы сил проявляется лишь в рамках нелинейной модели.

**В третьей главе** с учетом отмеченных особенностей получены уравнения движения одномерных упругих систем и соответствующие естественные краевые условия, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. При этом предполагаются как неподвижные, так и движущиеся закрепления и нагрузки. За основу взята формулировка соответствующей вариационной задачи из работ Весницкого А.И., Уткина Г.А.

Рассматривается одномерная упругая система в интервале времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Пусть  $x$  - координата её точки в недеформированном состоянии, изменяющаяся в пределах от 0 до  $b_0$ . Обобщенные координаты упругой системы обозначены через  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Так, при  $n = 2$   $u_1(x, t)$  отвечает продольным смещениям точек системы,  $u_2(x, t)$  - ее поперечным смещениям.

Функция Лагранжа упругой системы имеет вид

$$L = \int_0^{b_0} \lambda(x, t, \mathbf{u}(x, t), \mathbf{u}_t(x, t), \mathbf{u}_x(x, t)) dx,$$

где  $\lambda$  – плотность функции Лагранжа,  $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ .

Пусть  $x_l$  – значение координаты  $x$ , в которой распределенная система взаимодействует с сосредоточенной (имеются в виду закрепления, сосредоточенные нагрузки, ограничители и т.д.). Считается, что  $x_l = x_l(t)$  дважды дифференцируемая функция на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Область

$$D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq b_0, t_1 \leq t \leq t_2\}$$

кривой  $x_l(t)$  разбивается на две части:

$$D_1 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq x_l(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$$

$$D_2 = \{(x, t) : x_l(t) \leq x \leq b_0, t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Обозначено

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^{(1)}(x, t) = (u_1^{(1)}(x, t), \dots, u_n^{(1)}(x, t)), & (x, t) \in D_1 \\ \mathbf{u}^{(2)}(x, t) = (u_1^{(2)}(x, t), \dots, u_n^{(2)}(x, t)), & (x, t) \in D_2 \end{cases}.$$

Вектор-функция  $\mathbf{u}(x, t)$  непрерывна в области  $D$ . Вектор-функции  $\mathbf{u}^{(1)}(x, t)$  и  $\mathbf{u}^{(2)}(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемы в областях  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. В качестве значений  $\mathbf{u}(x_l(t), t)$  в силу непрерывности среды можно принять предельные значения как из  $D_1$ , так и из  $D_2$ :

$$\mathbf{u}_l(t) = \mathbf{u}(x_l(t), t) = \mathbf{u}^{(1)}(x_l(t), t) = \mathbf{u}^{(2)}(x_l(t), t).$$

Движение сосредоточенного объекта описывается дважды дифференцируемой на  $[t_1, t_2]$  функцией  $l = l(t)$ . Распределенная система рассматривается в переменных Лагранжа. В приближении второго и более высоких порядков необходим учет связи между координатами точек распределенной системы и положением сосредоточенного объекта, т.е. на функции  $x_l(t)$ ,  $l(t)$  и  $\mathbf{u}_l(t)$  наложена связь вида

$$\Phi(t, x_l, \dot{x}_l, l, \dot{l}, \mathbf{u}_l, \dot{\mathbf{u}}_l) = 0. \quad (3)$$

где  $\Phi$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности своих аргументов.

Функция Лагранжа сосредоточенного объекта обозначена через  $L_0 = L_0(t, l(t), \dot{l}(t), \mathbf{u}_l(t), \dot{\mathbf{u}}_l(t))$ . Принцип Гамильтона-Остроградского для рассматриваемой системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_l(t)} \lambda^{(1)}(x, t, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}_t^{(1)}, \mathbf{u}_x^{(1)}) dx dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_l(t)}^{b_0} \lambda^{(2)}(x, t, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}_t^{(2)}, \mathbf{u}_x^{(2)}) dx dt + \\ & + \delta \int_{t_1}^{t_2} L_0(t, l, \dot{l}, \mathbf{u}_l, \dot{\mathbf{u}}_l) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) \Phi(t, x_l, \dot{x}_l, l, \dot{l}, \mathbf{u}_l, \dot{\mathbf{u}}_l) dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь связь (3) учитывается введением неопределенного множителя Лагранжа  $\alpha$ . Процедура получения из вариационного принципа соответствующих уравнений Эйлера заключается в преобразовании выражений вариаций функционалов, входящих в (4), избавлением от производных от вариаций взятием соответствующих интегралов по частям с учетом произвольности вариаций. При варьировании учитывается, что области  $D_1$  и  $D_2$  изменяются.

Уравнения движения и краевые условия имеют вид:

$$\lambda_{u_k} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{u_{kx}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{u_{kt}} = 0, k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\left( -\lambda_{u_{kx}} \Big|_{x=x_l(t)-0}^{x=x_l(t)+0} + \lambda_{u_{kt}} \Big|_{x=x_l(t)-0}^{x=x_l(t)+0} \dot{x}_l(t) + L_{0u_{kl}} - \frac{d}{dt} L_{0\dot{u}_{kl}} + \left( \alpha \Phi_{u_{kl}} - \frac{d}{dt} \alpha \Phi_{\dot{u}_{kl}} \right) \right) \delta u_{kl} = 0, k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\left( \sum_{k=1}^n \left( \lambda_{u_{kx}} \Big|_{x=x_l(t)-0}^{x=x_l(t)+0} - \lambda_{u_{kt}} \Big|_{x=x_l(t)-0}^{x=x_l(t)+0} \dot{x}_l(t) \right) - \lambda \Big|_{x=x_l(t)-0}^{x=x_l(t)+0} + \left( \alpha \Phi_{x_l} - \frac{d}{dt} \alpha \Phi_{\dot{x}_l} \right) \right) \delta x_l = 0, \quad (7)$$

$$\left( L_{0l} - \frac{d}{dt} L_{0\dot{l}} + \left( \alpha \Phi_l - \frac{d}{dt} \alpha \Phi_{\dot{l}} \right) \right) \delta l = 0, \quad (8)$$

$$\Phi(t, x_l, \dot{x}_l, l, \dot{l}, \mathbf{u}_l, \dot{\mathbf{u}}_l) = 0. \quad (9)$$

Уравнения (5) определяют динамику распределенной упругой системы. Соотношения (6)-(9) являются условиями согласованного движения упругой и сосредоточенной систем. Уравнения (6)-(8) записаны в виде произведения. В зависимости от вида закрепления в нуль обращается один из сомножителей.

Данный способ записи краевых условий позволяет правильно учесть как внешние граничные условия, так и получить естественные условия, непосредственно следующие из вариационной постановки задачи. Такая форма записи краевых условий названа альтернативной. Внешние силы (включая диссипативные), действующие на упругую и сосредоточенную системы, учитываются в вариационной постановке задачи добавлением работы этих сил.

В отличие от работ Весницкого А.И., Уткина Г.А. здесь учтена связь координат точек распределенной и сосредоточенной систем (3) и приведена альтернативная форма записи краевых условий на движущихся границах одномерной упругой системы.

Показана согласованность решения рассмотренной в предыдущей главе задачи о статическом нагружении струны с результатом на основе полученных из вариационного принципа уравнений движения и естественных краевых условий. Приведены примеры постановок задач, иллюстрирующие применимость данных соотношений для различных видов закреплений.

**В четвертой главе** проиллюстрировано применение полученных из вариационного принципа соотношений при исследовании малых продольно-поперечных колебаний струны и движения скользящей вдоль нее массы.

Плотность функции Лагранжа распределенной системы имеет вид:

$$\lambda = \frac{\rho}{2}(u_i^2 + v_i^2) - \frac{1}{2}k \left[ \sqrt{(1 + u_{0x} + u_x)^2 + v_x^2} - 1 \right]^2$$

или с точностью до кубических членов:

$$\lambda = \frac{\rho_0}{2(1 + u_{0x})} \left( 1 - \frac{u_x}{1 + u_{0x}} \right) (u_i^2 + v_i^2) - \frac{1}{2}k \left( u_{0x}^2 + 2u_{0x}u_x + u_x^2 + \frac{u_{0x}}{1 + u_{0x}}v_x^2 + \frac{u_x v_x^2}{(1 + u_{0x})^2} \right).$$

Здесь  $x$  – координата точки струны,  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  – соответственно продольные и поперечные смещения точек струны,  $\rho_0$  – погонная плотность недеформированной струны,  $k$  – коэффициент упругости струны,  $u_0(x) = u_{0x}x$  ( $u_{0x} = const$ ) – продольное смещение точек струны, обусловленное начальным растяжением.

Уравнения продольно-поперечных колебаний струны (с точностью до величин второго порядка малости) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \gamma^2 u_{xx} &= \varepsilon_1 [(u_x u_t)_t + u_t u_{tx} + v_t v_{tx} + c^2 \varepsilon_2 v_x v_{xx}], \\ v_{tt} - c^2 v_{xx} &= \varepsilon_1 [(u_x v_t)_t + c^2 \varepsilon_2 (u_x v_x)_x], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $c^2 = \frac{ku_{0x}}{\rho_0}$ ,  $\gamma^2 = \frac{1+u_{0x}}{u_{0x}}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{1}{1+u_{0x}}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{1}{u_{0x}}$ .

В квадратичном приближении поперечные и продольные колебания связаны. При этом скорость распространения поперечных волн меньше скорости продольных, т.к.  $\gamma^2 > 1$ .

Решение представляется в виде суммы величин первого и второго порядка малости  $u = u_1 + u_2$ ,  $v = v_1 + v_2$ . Уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{1tt} - c^2 \gamma^2 u_{1xx} &= 0, \quad v_{1tt} - c^2 v_{1xx} = 0, \\ u_{2tt} - c^2 \gamma^2 u_{2xx} &= \varepsilon_1 [(u_{1x} u_{1t})_t + u_{1t} u_{1tx} + v_{1t} v_{1tx} + c^2 \varepsilon_2 v_{1x} v_{1xx}], \\ v_{2tt} - c^2 v_{2xx} &= \varepsilon_1 [(u_{1x} v_{1t})_t + c^2 \varepsilon_2 (u_{1x} v_{1x})_x]. \end{aligned}$$

В первом приближении продольные и поперечные движения независимы. Возбуждение же поперечных волн в первом приближении приводит к образованию продольных во втором приближении.

Рассмотрен случай, когда возбуждается локализованная поперечная волна, бегущая влево (в сторону бусины, рис. 3). В линейном приближении волна описывается непрерывной функцией  $v_1(x, t) = f(x + ct)$ , отличной от нуля на интервале  $x_0 - ct < x < x_0 - ct + a$  ( $x_0 > 0$ ). Следовательно, в начальный момент времени ( $t=0$ ) возмущение локализовано на отрезке  $(x_0, x_0 + a)$ , на концах которого  $f(x_0) = f(x_0 + a) = 0$ . При  $t=0$  бусина находится в точке  $x=0$ , т.е. волна располагается полностью справа от нее.

Закон движения бусины  $l = l(t)$ , в начальный момент времени  $l(0) = 0$ .



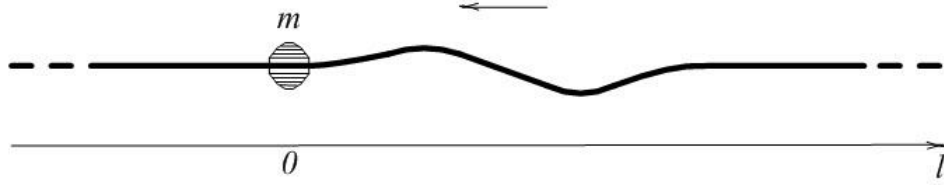


Рис. 3.

Через  $x_l$  обозначена координата элемента струны, который в данный момент времени взаимодействует с бусиной. Связь координат  $l$  и  $x_l$  определяется соотношением:

$$\Phi(x_l, u_l, l) = (1 + u_{0x})x_l(t) + u_l(t) - l(t) = 0, \quad u_l(t) = u(x_l(t), t). \quad (11)$$

Функция Лагранжа для бусины имеет вид:

$$L_0 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2(t) + \dot{v}_l^2(t)), \quad v_l(t) = v(x_l(t), t).$$

Уравнения движения бусины по струне записываются следующим образом:

$$m\ddot{v}_l = \rho_0 \left\{ c^2 \varepsilon_1 (v_x + \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_x v_x) \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} + (\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1 u_x) v_t) \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} \dot{x}_l(t) \right\} \quad (12)$$

$$m\ddot{l} = -\alpha \quad (13)$$

$$-\alpha = \frac{\rho_0}{2} \left\{ \varepsilon_1^2 (u_t^2 + v_t^2) + c^2 \varepsilon_2 (2u_x + \varepsilon_1^2 v_x^2) \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} + 2\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1 u_x) u_t \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} \dot{x}_l(t) \right\} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{\rho_0}{2} \varepsilon_1 \left\{ \varepsilon_1 (u_t^2 + v_t^2) + c^2 (\varepsilon_2 u_x^2 + \varepsilon_1 v_x^2) \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} + 2\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1 u_x) (u_t u_x + v_t v_x) \Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} \dot{x}_l(t) \right\} \quad (15)$$

Динамику согласованного движения струны и скользящей по ней массы описывает система уравнений (10)-(15). Определению подлежат переменные  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $x_l(t)$ ,  $u_l(t)$ ,  $l(t)$ ,  $v_l(t)$  и параметр  $\alpha$ .

Аналитическое решение задачи получено в предположении, что поперечное смещение бусины ограничено жесткими направляющими, т.е. она может двигаться вдоль струны только в продольном направлении. Уравнение поперечного движения бусины (12) исключается из рассмотрения.

В соответствии с уравнением (13) изменение импульса бусины в результате действия на нее волнового возмущения в течение промежутка времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  дается выражением:

$$\Delta p = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha dt .$$

Правая часть этого соотношения определяется уравнением (14) или (15).

Изменение импульса бусины равно:

$$\Delta p = -2\rho_0 c \varepsilon_1^2 \int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x) dx .$$

Оно отрицательное, т.е. под действием набегающего справа поперечного возмущения бусина смещается влево.

Импульс волн в струне изменяется следующим образом.

Поперечное волновое возмущение струны  $v_1(x, t) = f(x + c_0 t)$ , не обладающее импульсом, до появления контакта с бусиной ( $t < x_0/c$ ) из-за нелинейности системы порождает группу продольных волн, бегущих в том же направлении, и продольную волну, бегущую вправо:

$$u_{2t}(x, t) = -\frac{c}{2} f_x^2(x + ct) + \frac{c(\gamma + 1)}{4} f_x^2(x + c\eta) - \frac{c(\gamma - 1)}{4} f_x^2(x - c\eta).$$

Суммарный импульс этих волн равен нулю. Группа волн, бегущих в сторону бусины, обладает импульсом, но эти продольные возмущения проходят сквозь бусину, не оказывая на неё влияние.

Во время контакта бусины со струной ( $x_0/c < t < (x_0 + a)/c$ ) в струне возникают более интенсивные продольные волны, названные вторичными и обозначенные  $u^{(2)}(x, t)$ :

$$u_t^{(2)}(x, t) = \frac{c\varepsilon_1^2}{\gamma} \left[ f_x^2\left(\frac{x}{\gamma} + ct\right) + f_x^2\left(-\frac{x}{\gamma} + ct\right) \right], \quad t \geq \frac{x_0 + a}{c_0} .$$

Это волны второго приближения (наряду с  $u_2(x, t)$ ). Они обладают импульсом в горизонтальном направлении, равным

$$\int \rho_0 u_i^{(2)}(x, t_2) dx = 2\rho_0 c \varepsilon_1^2 \int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x) dx,$$

т.е. импульс вторичных волн совпадает по величине и противоположен по знаку импульсу бусины, приобретенному в результате волнового воздействия на нее со стороны струны.

Если предположить, что в некоторой точке по направлению движения первоначальной волны струна жестко закреплена, то при отражении продольной волны на границе возникнет усилие, противоположное движению поперечной волны. Иначе обстоит дело в случае, когда на струну нанизана бусина, поперечное смещение которой жестко ограничено. Взаимодействие между струной и бусиной при отражении поперечной волны порождает во втором приближении продольную волну (названную вторичной), обладающую импульсом. Такой же по величине импульс, но направленный в противоположную сторону, приобретает бусина и приходит в движение. Суммарный импульс системы «струна-бусина» остается равным нулю. Заключение о силах, порождаемых волновым возмущением, находится в полном соответствии с результатами решения задачи о статическом нагружении струны при различных условиях закрепления (п. 2.2).

**В пятой главе** изучаются деформации мембраны подвижной распределенной нагрузкой. Исследуется возможность уменьшения сопротивления сверхзвуковому движению нагрузок.

Смещения мембраны  $u(t, x, y)$ , перпендикулярные плоскости ее невозмущенного состояния  $Oxy$ , в случае движения в направлении оси  $y$  нагрузки с постоянной скоростью  $V$ , превышающей скорость распространения волн в мембране, описываются уравнением:

$$\rho u_{tt} - N(u_{xx} + u_{yy}) = -F(y - Vt)\delta(x), \quad (16)$$

где  $\rho$  – поверхностная плотность мембраны,  $N$  – натяжение мембраны,  $F(y - Vt)$  - усилие, создаваемое нагрузкой в области  $-\mu < y - Vt < \mu$ ,  $x=0$ . Знак «-» в правой части уравнения (16) обусловлен тем, что нагрузка направлена вниз.

Уравнение стационарного движения мембраны в системе, связанной с нагрузкой, имеет вид:

$$b^2 u_{xx} - u_{\xi\xi} = f(\xi)\delta(x), \quad (17)$$

где  $\xi = y - Vt$ ,  $b^2 = \frac{a^2}{V^2 - a^2}$ ,  $a = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$  - скорость распространения волн в

мембране,  $f(\xi) = \frac{F(\xi)}{\rho(V^2 - a^2)}$ . Полагается, что нагрузка распределена в области

$$\{x = 0, -\mu \leq \xi \leq \mu\} \text{ и } f(\xi) = \begin{cases} f_0, & |\xi| \leq \mu, \\ 0, & |\xi| > \mu. \end{cases}$$

С помощью интегрального преобразования Фурье, получено решение уравнения (17) (индексами «+» и «-» обозначены решения для положительных и отрицательных значений  $x$  соответственно):

$$u_{\pm}(x, \xi) = \frac{f_0}{16\pi b} \left( \pm \left| \frac{x}{b} \pm \xi + \mu \right| \mp \left| \frac{x}{b} \pm \xi - \mu \right| - 2\mu \right).$$

Вид данного решения в плоскости  $O\xi x$  представлен на рис. 4. Картина деформирования мембраны в плоскости  $x=0$  приведена на рис. 5.

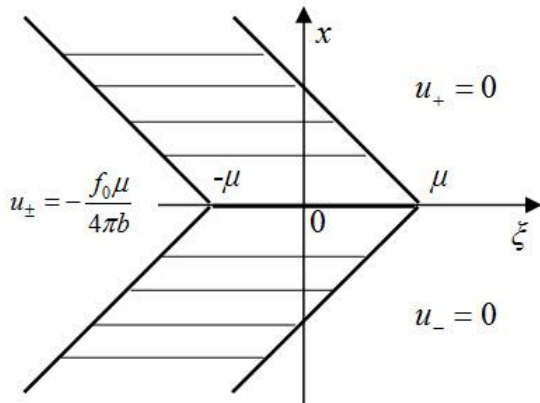


Рис. 4.

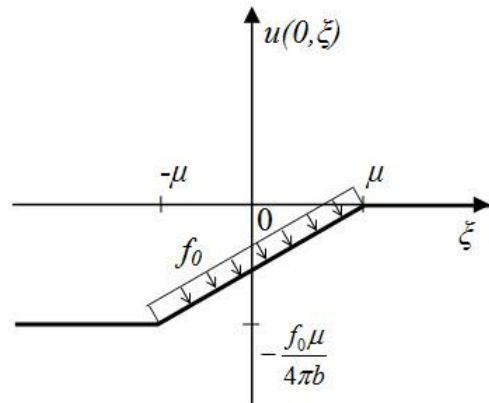


Рис. 5.

Сила сопротивления движению нагрузки равна:

$$F_c = -f_0 \cdot 2\mu \cdot u_{\xi}(0, \xi) = -\frac{f_0^2 \mu}{4\pi b} = -\frac{f_0^2 \mu \sqrt{V^2 - a^2}}{4\pi a}.$$

Возникает при  $V > a$ .

На рис. 6 приведен вид решения в плоскости  $O\xi x$  для случая движения двух одинаковых нагрузок по мембране в виде длинной, направленной вдоль  $y$  полосы шириной  $2d$  с закрепленными границами  $u(\pm d, \xi) = 0$ . Нагрузки распределены на отрезках  $|\xi| \leq \mu$  и  $|\xi + L| \leq \mu$  оси  $x=0$ . От первой нагрузки возмущения идут в областях 1 и 2, затем после отражения – в областях 3 и 4; от второй нагрузки возмущаются области 5 и 6. Интервал отраженных волн при  $x=0$   $|\xi - \xi_1| \leq \mu$ , где  $\xi_1 = -\frac{2d}{b}$ .

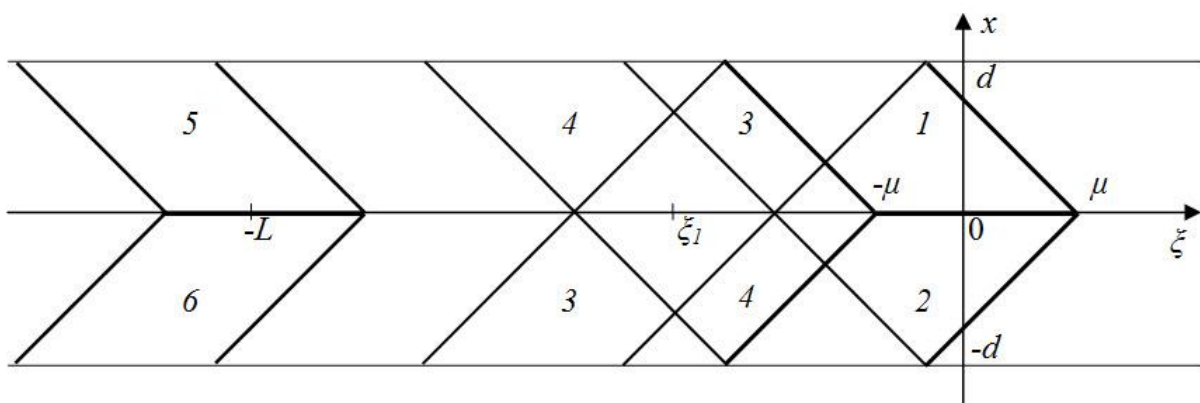


Рис. 6.

На рис. 7 построен график силы, действующей на вторую нагрузку, в зависимости от координаты  $\xi_2$  ее центра (принято обозначение  $\xi_2 = -L$ ).

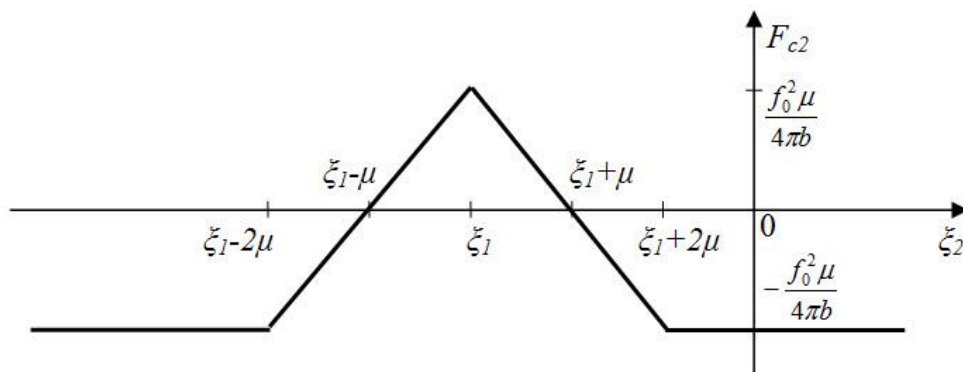


Рис. 7.

Если считать движущиеся нагрузки несвязанными, то при движении первой нагрузки с постоянной скоростью вторая нагрузка в волновом следе от первой тормозится или разгоняется в зависимости от расстояния между ними. Значения  $\xi_2 = \xi_1 \pm \mu$  являются состояниями равновесия – первое устойчивое, второе неустойчивое. Если же полагать нагрузки жестко связанными, то

суммарная сила всегда является тормозящей, за исключением случая  $\xi_2 = \xi_1$ , когда она обращается в нуль, т.е. при нахождении второй нагрузки в интервале отраженных от границ волн возмущения от первой нагрузки рассматриваемая система нагрузок при движении по мембране не встречает сопротивления.

В работе данный подход также проиллюстрирован в случае сверхзвукового обтекания потоком газа системы двух тонких заостренных тел в канале и вблизи стенки. Сила сопротивления, действующая на второе тело, обусловлена собственным создаваемым телом возмущением и влиянием отраженных волн, создаваемых первым телом. За счет этих отраженных волн сила сопротивления, испытываемая вторым телом, уменьшается. В зависимости от расположения тел друг относительно друга суммарная сила сопротивления может принимать различные значения. При определенных условиях сопротивление движению системы тел наименьшее.

Таким образом, возможно создание условий, при которых энергозатраты на поддержание движения системы минимальны. Данный эффект может быть использован при создании устройств, обеспечивающих минимальное сопротивление движению тел в средах.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы по работе.

### **Основные результаты диссертации**

1. На конкретных примерах продольных колебаний стержня показано, что наличие или отсутствие импульса у волн, распространяющихся в упругих средах, определяется начальными условиями. Направление импульса волны не обязательно совпадает с направлением ее распространения. Перенос импульса волной сопровождается переносом массы в направлении импульса. Полное решение вопроса об импульсе волн требует исследования задачи о волновом движении в среде в нелинейной постановке.
2. В приближении первого и второго порядка изучено влияние параметров нелинейности системы на величину импульса волн и давления, оказываемого ими на границе:

- импульс волн, возбуждаемых при колебаниях упругих систем, и усилие, создаваемое волной на границе системы, может быть как положительным или отрицательным, так и нулевым в зависимости от начальных условий для волн второго приближения;
  - воздействие упругой системы на границу зависит от вида граничных условий, различие как по величине, так и по знаку действующих на границы сил проявляется лишь в рамках нелинейной модели.
3. С учетом нелинейных факторов, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получены уравнения движения одномерных упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками и соответствующие естественные краевые условия. Приведены примеры постановок задач, иллюстрирующие применимость полученных соотношений для различных видов закреплений.
  4. Решена задача о движении бусины вдоль струны в случае, когда поперечное смещение бусины ограничено жесткими направляющими. Взаимодействие поперечного волнового возмущения с бусиной порождает во втором приближении продольную волну, обладающую импульсом. Такой же по величине импульс, но направленный в противоположную сторону, приобретает бусина и приходит в движение. Суммарный импульс системы «струна-бусина» остается равным нулю.
  5. Для случаев движения по мембране распределенных нагрузок со скоростью, большей скорости распространения волн в мембране, и сверхзвукового обтекания тел потоком газа показано, что возможны такие конфигурации движущихся объектов, при которых сопротивление движению минимальное или отсутствует.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. В.В. Новикову за постановку задач, ценные замечания и постоянное внимание к работе, д.ф.-м.н. профессору Г.Г. Денисову за интерес к работе и полезные замечания.

### **Основные публикации по теме диссертации**

#### *Публикации в рецензируемых изданиях из списка ВАК*

1. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. К вопросу об импульсе упругих волн и их воздействии на препятствие // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Вып. 70. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. с. 39-50.
2. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е., Смирнова М.Л. К задаче о движении тел в средах с минимальными энергетическими потерями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (раздел Механика), 2009, №5. – с. 128-136.
3. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. Об импульсе волн при продольных колебаниях упругого стержня // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (раздел Механика), 2010, № 5 (1), с. 134-137.
4. Смирнова М.Л. О движении сосредоточенных объектов вдоль одномерных упругих систем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (раздел Общая и прикладная механика), 2011, № 4 (2), с. 318-319.

#### *Другие публикации*

5. Смирнова М.Л. Воздействие упругих волн на препятствие // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.34. Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения - 2006» // Материалы Пятой молодежной научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, 2006. – с. 190-192.
6. Смирнова М.Л. К вопросу о воздействии упругих систем на границу // Фундаментальные проблемы машиноведения: новые технологии и материалы. Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала



- Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. - Н.Новгород, 2006.
7. Смирнова М.Л. О «волновом давлении» и давлении упругих волн на границу // Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки (12; 2007) / Отв. за вып. Зверева И.А. – Н. Новгород: Гладкова О.В., 2007. – с. 15-16.
  8. Смирнова М.Л. Об усилиях на границе упругой системы // Волновая динамика машин и конструкций. Тезисы докладов Второй Всероссийской научной конференции. - Н.Новгород, 2007.
  9. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. К вопросу об импульсе упругих волн // Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (Нижний Новгород, 27-30 ноября 2007 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. – с. 129-131.
  10. IPACS Open Access Electronic Library [электронный ресурс]/ OPEN LIBRARY READING/ 6<sup>th</sup> EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008) - G.G. Denisov, V.V. Novikov, M.L. Smirnova On the momentum of elastic waves and its force on the obstacle. – Режим доступа: <http://lib.physcon.ru>, свободный. – Яз. англ.
  11. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л., Федоров А.Е. Об условиях движения в среде без сопротивления // Труды VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 22-26 сентября 2008 г.). В 2-х томах. Том 1/ Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева. Нижний Новгород: Издательский дом «Диалог Культур», 2008. – с. 146-151.