На правах рукописи

Бродский Алексей Германович

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ГЕЙЛА И СМЕЖНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2011

Работа выполнена на кафедре дискретного анализа Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Владимир Александрович Бондаренко

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Валерий Николаевич Шевченко;
доктор физико-математических наук, профессор
Валерий Иванович Опойцев

Ведущая организация:

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

Защита диссертации состоится 15 декабря 2011 года в 14 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на сайте Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского: http://www.unn.ru.

Автореферат разослан «__» _______ 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета В.И. Лукьянов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исследования по теории выпуклых многогранников, тесно связанной с дискретной оптимизацией, проводились многими авторами (см., например, книги и статьи [4, 1, 2, 5–7] и приведенную в них библиографию). Основные результаты диссертации находятся на стыке трех связанных между собой разделов этой теории: смежностные многогранники, двойственность Гейла, случайные многогранники.

Серьезный интерес к *k-смежностным многогранникам* [3] зародился более века назад после установления К. Каратеодори противоречащего геометрической интуиции факта существования k-смежностных многогранников в $\mathbb{R}^d$ со сколь угодно большим числом вершин при $d \geqslant 4$ и $k \in \overline{1, \lfloor d/2 \rfloor}$. Впоследствии смежностные многогранники неоднократно переоткрывались другими авторами, один из которых, Д. Гейл [22] предложил конструкцию, которая дает возможность по некоторым системам n точек на единичной $(m-1)$-мерной сфере $\mathbb{S}_{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ (или сфере с присоединенным центром $\bar{\mathbb{S}}_{m-1} = \mathbb{S}_{m-1} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$), где $n \geqslant m+2$, строить системы n точек из $\mathbb{R}^d$ (в том числе являющиеся системами вершин k-смежностных многогранников), где $d = n-m-1$ и $k \in \overline{1, \lfloor d/2 \rfloor}$.

В частности, он обратил внимание на интуитивную ясность следующего утверждения[1]:

$(\mathrm{G})^*_k$ вероятность получения k-смежностного многогранника в результате применения конструкции Гейла к системе точек, выбранных из $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$ наугад, быстро возрастает с увеличением d.

В этой связи Д. Гейл высказал предположение о распространенности k-смежностных многогранников в многомерных пространствах и в качестве некоторого его уточнения выдвинул гипотезу, ставшую широко известной под названием «гипотеза Гейла»:

$(\mathrm{G})_k$ вероятность получения k-смежностного многогранника с n вершинами взятием выпуклой оболочки случайно выбранных n точек в $\mathbb{R}^d$ быстро возрастает с увеличением d.

При $k = 2$ в формулировке гипотезы Гейла речь идет о 2-смежностных многогранниках, которые можно представлять как многогранники без диагоналей или как многогранники, граф которых является полным. Их связь с прикладными задачами впервые была осознана в результате развития теории сложности комбинаторных задач. Оказалось, что плотность графов многогран-

[1] Условимся называть его «вспомогательной гипотезой Гейла».

ников служит нижней границей временно́й трудоемкости алгоритмов из широкого класса, включающего большинство известных комбинаторных методов [26] (здесь под *плотностью графа* понимается максимальное количество попарно смежных вершин). Этим объясняется интерес к комбинаторным многогранникам с высокой плотностью графа. Оценки плотности полиэдральных графов большого количества комбинаторных задач показали, что эта величина экспоненциальна по размерности многогранников для труднорешаемых задач и полиномиальна для полиномиально разрешимых. При этом многогранники многих известных задач являются 2-смежностными.

Поскольку для ряда таких задач соответствующие многогранники являются $0/1$ многогранниками (т.е. множества их вершин содержатся в множестве вершин стандартного единичного гиперкуба $[0,1]^d$), естественно возник интерес к гипотезе Гейла для случайных $0/1$ многогранников. Часть известных результатов подтверждает гипотезу Гейла для таких дискретных вероятностных моделей [1, 23, 25]. Исследовалась гипотеза Гейла и в непрерывном случае [10, 9, 30, 11–13, 27, 14–18, 21, 25, 8].

В дополнительных замечаниях и комментариях ко второму изданию книги [24, с. 129b] отмечается некорректность вопроса о вероятности k-смежностности случайного многогранника, связанная с зависимостью от выбора модели случайного многогранника. В то же время существует сравнительно узкий круг известных утверждений о случайных системах точек, справедливых при очень слабых условиях на соответствующее распределение[2]. Мысль о том, что к числу таковых принадлежат и результаты, подтверждающие гипотезу Гейла и ее усиленные версии, была высказана Д.Л. Донохью и Д. Таннером в связи с обнаруженным ими фазовым переходом следующего вида [17, 19, 20]. Если A — случайная $d \times n$-матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $\mathcal{N}(0,1)$, и $\mathrm{P}_{d,n,k}$ — вероятность k-смежностности системы столбцов матрицы A, то существует пороговая функция $\alpha_{DT} = \alpha_{DT}(\rho)$ такая, что для $\rho > 1$

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{P}_{d,\lfloor \rho d\rfloor,\lfloor \alpha d\rfloor} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \alpha < \alpha_{DT}(\rho), \\ 0, & \text{если } \alpha > \alpha_{DT}(\rho). \end{cases} \tag{1}$$

В обзоре [19], обсуждая итоги миллионов поставленных ими вычислительных экспериментов, Д.Л. Донохью и Д. Таннер формулируют гипотезу об универсальности этого фазового перехода (т.е. его справедливости для очень широкого, но пока неизвестного класса распределений).

Отметим, что дальнейшему усилению интереса к исследованию проблемы k-смежностности случайного многогранника способствовало обнаружение ее

[2]Такие результаты принято называть «не зависящими от распределения» [28].

приложений к задаче нахождения самых разреженных решений неопределенных систем линейных уравнений и связанным с ней задачам цифровой обработки сигналов, теории кодирования, комбинаторной оптимизации и математической статистики.

Итак, актуальные исследования вопроса о k-смежностности случайного многогранника, проводившиеся многими авторами, в диссертации продолжаются в направлении, указанном классическими и современными проблемами.

Цели работы

Основными целями работы являются нахождение оценок и асимптотического поведения вероятностей k-смежностности или k-космежностности случайных систем точек, подтверждение различных вариантов гипотез $(\mathrm{G})_k^*$ и $(\mathrm{G})_k$. Особое внимание уделяется утверждениям, справедливым при очень слабых условиях на распределение, важную роль в доказательствах которых играет двойственность Гейла. Поэтому двойственность Гейла становится еще одной сюжетной линией, развиваемой в диссертации.

Методы исследования

В работе использовались как классические методы исследования (двойственность Гейла, стандартная технология получения асимптотических формул и др.), так и новый метод, основанный на построенной автором двойственности для вероятностных пространств.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. Это

1) теорема, дающая нижнюю оценку вероятности 2-смежностности выпуклой оболочки случайно выбранных без возвращения n вершин стандартного единичного гиперкуба (эта оценка используется для подтверждения гипотезы Гейла $(\mathrm{G})_2$ для случайных многогранников указанной модели);

2) теорема, дающая верхнюю и нижнюю оценки вероятности *векторной k-смежностности* случайной системы точек, подтверждающая гипотезу Гейла $(\mathrm{G})_k$ для широкого класса распределений;

3) теорема, дающая верхнюю и нижнюю оценки вероятности k-космежностности случайной системы точек, подтверждающая гипотезу $(\mathrm{G})_k^*$ для широкого класса распределений;

4) теорема, дающая нижнюю оценку вероятности k-космежностности системы n случайных точек, выбранных равномерно и независимо на сфере $\mathbb{S}_{m-1}$;

5) теорема о двойственности вероятностных пространств специального вида.

Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер. Для широкого класса распределений получены результаты, подтверждающие гипотезу Гейла и ее усиленные версии. Развиваемая в диссертации техника может найти приложения в различных задачах теории выпуклых многогранников.

Личный вклад соискателя

Все включенные в диссертацию результаты, содержащие оценки и асимптотическое поведение вероятностей k-смежностности или k-космежностности случайных систем точек для произвольного $k \in \mathbb{N}$ (теоремы 2.1–2.3), получены автором лично. Для доказательства подтверждающей гипотезу Гейла и справедливой при очень слабых условиях на распределение теоремы 2.3 использована двойственность вероятностных пространств (теорема 1.1), также построенная самостоятельно. Оценка и асимптотическое поведение вероятности 2-смежностности случайного $0/1$ многогранника (теорема 3.1) получены совместно с научным руководителем.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на научной конференции студентов и аспирантов факультета информатики и вычислительной техники ЯрГУ 2006 года, на шестьдесят второй региональной научно-технической конференции студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием «Молодежь. Наука. Инновации — 2009» в г. Ярославле, на II Международной научно-практической конференции в г. Невинномысске, на VII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям в г. Москве.

Публикации

Результаты диссертации изложены в работах [33–39].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 73 страницах (исключая список литературы). Список литературы содержит 74 названия.

Содержание работы

Все рассматриваемые многогранники предполагаются выпуклыми. Когда не оговаривается противное, всюду ниже d, m, n — натуральные числа, а k — целое неотрицательное число; кроме того, используются обозначения: $\overline{p,q} = \{p, p+1, \ldots, q\}$ — отрезок множества целых чисел (здесь $p, q \in \mathbb{Z}$ и $p \leqslant q$); $\mathrm{U}_2 = \{-1, 1\}$ — группа квадратных корней из 1; X — непустое подмножество в $\mathbb{R}^d$; X^n — множество всех систем n точек из X (в частном случае $X = \mathbb{R}^d$ полагаем $\mathbb{R}^{d,n} = (\mathbb{R}^d)^n$); Z — непустое подмножество в $\mathbb{R}^{d,n}$; $\mathrm{LinConf}(Z)$ — множество всех векторных конфигураций[3] из Z; $\mathrm{LinGeP}(Z)$ — множество всех систем точек из Z, находящихся линейно в общем положении[4]; $\operatorname{lin} a = \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_n)$ — линейная оболочка системы точек $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{d,n}$. Определим стандартно действие группы U_2^n на множестве $\mathbb{R}^{d,n}$, положив $\sigma a = (\sigma_1 a_1, \ldots, \sigma_n a_n)$ для $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathrm{U}_2^n$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{d,n}$. Если θ — отношение эквивалентности на множестве V и W — подмножество в V, то θ индуцирует отношение эквивалентности на W, которое, допуская вольность обозначений, будем обозначать также через θ. Для системы точек $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{d,n}$ под ее *линейной зависимостью* понимается точка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, являющаяся решением уравнения

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0,$$

а под *аффинной зависимостью* — точка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, являющаяся решением системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0, \\ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0. \end{cases}$$

Система точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ называется *k-смежностной*, если $n \geqslant k+1$ и, кроме того, всякая ее ненулевая аффинная зависимость $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

[3]*Векторными конфигурациями (в $\mathbb{R}^d$)* называются системы точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$, имеющие линейный ранг d.

[4]Говорят, что точки системы $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ находятся *линейно в общем положении (в $\mathbb{R}^d$)*, если каждая ее $\min(n, d)$-компонентная подсистема линейно независима.

имеет не менее $k+1$ положительных компонент. Для $k \geqslant 1$ многогранник P в $\mathbb{R}^d$ называется *k-смежностным*, если он имеет не менее $k+1$ вершин и любое k-элементное множество его вершин является множеством вершин некоторой грани многогранника P. Систему точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ будем называть *k-космежностной (в $\mathbb{R}^d$)*, если $n \geqslant k+1$ и всякое открытое линейное полупространство[5] в $\mathbb{R}^d$ содержит хотя бы $k+1$ точек системы a. Такие системы точек под различными названиями изучались многими авторами. Отметим роль, которую играют k-смежностные и k-космежностные системы точек: для $k \geqslant 1$ система n точек из $\mathbb{R}^d$ является k-смежностной тогда и только тогда, когда ее выпуклая оболочка является k-смежностным многогранником с n вершинами; k-космежностность исходной системы точек является условием, необходимым и достаточным для получения k-смежностной системы точек в результате применения конструкции Гейла.

Напомним, что дальнейшее развитие идей статьи [22] привело к созданию метода *преобразований Гейла* и *диаграмм Гейла* [24] и построению *двойственности Гейла*, ставших мощными инструментами для решения разнообразных задач комбинаторной теории многогранников. Нужная нам версия двойственности Гейла, которую будем называть *векторной двойственностью Гейла*, изложена в [32]. Она задается парой определяемых в предположении, что $n = d + m$, многозначных отображений: $\mathrm{vgt}_{d,n}$ из $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ в $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{m,n})$ и $\mathrm{vgt}_{m,n}$ из $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{m,n})$ в $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$. Для любой системы точек $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{d,n}$, где $a_i = (a_i^1, \ldots, a_i^d) \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, через $T_{d,n}(a)$ или, короче, $T(a)$ обозначим систему $(a^1, \ldots, a^d) \in \mathbb{R}^{n,d}$, образованную точками $a^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \in \mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$. В этих обозначениях, например, $\mathrm{vgt}_{d,n}$ сопоставляет произвольной векторной конфигурации $a \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ множество всех ее *векторных преобразований Гейла*, т.е. таких векторных конфигураций $b \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{m,n})$, для которых имеет место разложение $\mathbb{R}^n$ в ортогональную сумму $\mathbb{R}^n = \mathrm{lin}\, T(a) \oplus_{\perp} \mathrm{lin}\, T(b)$. Векторная двойственность Гейла позволяет некоторые свойства $\mathcal{P}$ векторной конфигурации из $\mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ формулировать как *векторно двойственные свойства* $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^{*_{d,n}}$ ее векторного преобразования Гейла, при этом имеем: $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$. Приведем пример, важный для дальнейшего. Систему точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ будем называть *векторно k-смежностной*, если $n \geqslant k+1$ и всякая ее ненулевая линейная зависимость $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет не менее $k+1$ положительных компонент. Ясно, что векторно k-смежностная система точек $a \in \mathbb{R}^{d,n}$ является k-смежностной. Обратное, вообще говоря, неверно. При любом k для век-

[5] Под *открытым (замкнутым) линейным полупространством* в $\mathbb{R}^d$ понимается открытое (замкнутое) полупространство в $\mathbb{R}^d$, ограниченное *линейной гиперплоскостью* в $\mathbb{R}^d$, т.е. гиперплоскостью, проходящей через точку 0.

торных конфигураций «векторная k-смежностность» и «k-космежностность» являются свойствами, векторно двойственными друг другу.

Глава 1 диссертации содержит, в частности, базовые результаты по двойственности Гейла и значимым при ее рассмотрении и применении свойствам систем точек. Эти базовые результаты изложены в виде лемм для удобства читателей и для удобства ссылок. Не все они являются новыми. Во всех случаях, когда у автора была возможность сделать точную ссылку, известные (или близкие известным) результаты приводятся без доказательства.

С использованием двойственности Гейла в главе 1 строится двойственность для вероятностных пространств специального вида. Реализованная при этом идея по существу восходит к Д. Гейлу [22], считавшему возможным подходом к доказательству гипотезы $(\mathrm{G})_k$ сведение к гипотезе $(\mathrm{G})_k^*$. При этом Д. Гейл обращает внимание на необходимость уточнения требуемых для такого сведения вероятностных понятий, что фактически и делается с помощью построенной в диссертации двойственности вероятностных пространств. Для ее точного описания определим отношение эквивалентности $\theta_T = \theta_T^{d,n}$ на множестве $\mathbb{R}^{d,n}$, положив

$$a\ \theta_T\ a' \Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n > 0 \quad \operatorname{lin} T(a') = \\ = \{(\gamma_1 c_1, \ldots, \gamma_n c_n) \mid (c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{lin} T(a)\}.$$

Подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ будем называть *θ_T-насыщенным*, если для всякого $c \in \mathrm{LinConf}(\mathbb{R}^{d,n})$ найдется векторная конфигурация $a \in \mathrm{LinConf}(X^n)$, для которой $a\ \theta_T\ c$. В главе 1 устанавливается

Лемма 1.20. *Пусть $n = d + m$. Если X и Y являются θ_T-насыщенными подмножествами в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, то многозначные отображения $\mathrm{vgt}_{d,n}$ и $\mathrm{vgt}_{m,n}$, задающие векторную двойственность Гейла, индуцируют взаимно обратные биекции*

$$\varphi_{d,n} : \mathrm{LinConf}(X^n)/\theta_T \rightleftarrows \mathrm{LinConf}(Y^n)/\theta_T : \varphi_{m,n}.$$

Вероятностное пространство $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ будем называть *абсолютно симметричным* в том случае, если 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d,n}$ для некоторых $d, n \in \mathbb{N}$; 2) $\mathrm{LinGeP}(\Omega) \in \mathcal{B}$ и $\mathbb{P}(\mathrm{LinGeP}(\Omega)) = 1$; 3) $\sigma B \in \mathcal{B}$ и $\mathbb{P}(\sigma B) = \mathbb{P}(B)$ для любых $\sigma \in \mathrm{U}_2^n$ и $B \in \mathcal{B}$. Вероятностное пространство $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ будем называть *векторно гейловским*, если 1) $\Omega = \mathrm{LinConf}(X^n)$ для некоторых $d, n \in \mathbb{N}$ ($n > d$) и θ_T-насыщенного подмножества $X \subseteq \mathbb{R}^d$; 2) для любых $B \in \mathcal{B}$, $b \in B$, $a \in \Omega$ из $a\ \theta_T\ b$ следует, что $a \in B$. С каждым таким пространством $\mathcal{P}$ и θ_T-насыщенным подмножеством $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, где $m = n - d$, ассоциируем вероятностное пространство $\mathcal{P}_Y^* = (\Omega^*, \mathcal{B}^*, \mathbb{P}^*)$ такое, что 1) $\Omega^* = \mathrm{LinConf}(Y^n)$;

2) $\mathcal{B}^* = \{B^* \mid B \in \mathcal{B}\}$, где $B^* = \bigcup_{b \in B} \varphi_{d,n}([b]_T)$ (здесь через $[b]_T$ обозначен класс эквивалентности $\{a \in \Omega \mid a\ \theta_T\ b\}$); 3) $\mathbb{P}^*(B^*) = \mathbb{P}(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Вероятностное пространство $\mathcal{P}^*_Y$ будем называть Y*-двойственным* к векторно гейловскому вероятностному пространству $\mathcal{P}$.

В главе 1 основной является объясняющая смысл построенной двойственности вероятностных пространств

Теорема 1.1. *Пусть $d, m \in \mathbb{N}$; $n = d + m$; X и Y являются θ_T-насыщенными подмножествами в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно; $\mathcal{P}$ — векторно гейловское вероятностное пространство с пространством исходов* $\mathrm{LinConf}(X^n)$. *Тогда*

1) *вероятностное пространство $\mathcal{P}^*_Y$ тоже является векторно гейловским;*

2) *если Y центрально симметрично (с центром в точке 0) и $\mathcal{P}$ абсолютно симметрично, то и $\mathcal{P}^*_Y$ абсолютно симметрично;*

3) $(\mathcal{P}^*_Y)^*_X = \mathcal{P}$.

В главу 2 включены леммы о борелевости некоторых подмножеств в $\mathbb{R}^{d,n}$, необходимые для обеспечения корректности получаемых далее оценок соответствующих вероятностей. При этом приводятся и доказательства необходимых «фольклорных» фактов, для которых диссертант не нашел доказательств в изученной литературе. Из трех теорем, являющихся основными результатами главы 2, первые две связаны с гипотезой $(\mathrm{G})^*_k$.

Теорема 2.1. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $n = d + m$ и $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$ — вероятность k-космежностности системы n случайных точек, выбранных независимо и равномерно на сфере $\mathbb{S}_{m-1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathrm{Prob}^*(d, n, k) \geqslant 1 - \frac{g(n)}{c^n},$$

где

$$g(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{q}{(q-1)^j}, \quad c = \frac{q}{q-1}, \quad q = 2^m.$$

В доказательстве теоремы 2.1 используется следующее наблюдение: любая открытая полусфера сферы $\mathbb{S}_{m-1}$ содержит пересечение $\mathbb{S}_{m-1}$ с некоторым открытым координатным ортантом пространства $\mathbb{R}^m$.

Зафиксируем $m, n \in \mathbb{N}$, $t \in \overline{1, n}$ и подсистему $I = (i_1, \ldots, i_t)$, в которой $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant n$, системы чисел $(1, 2, \ldots, n)$. С каждой системой точек

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ассоциируем ее подсистему $a_I = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$. Кроме того, для подмножества $Z \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$ условимся через $\mathrm{CN}_0^I(Z)$ обозначать множество всех систем точек $a \in Z$ таких, что a_I является 0-космежностной системой точек из $\mathbb{R}^{m,t}$, а через $\mathrm{VN}_0^I(Z)$ — множество всех систем точек $a \in Z$, для которых всякая ненулевая линейная зависимость $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ содержит хотя бы одну положительную компоненту λ_i, имеющую номер $i \in \{i_1, \ldots, i_t\}$. Подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ будем называть *облачным*, если оно имеет непустое пересечение с каждым открытым лучом $\{cu \mid c > 0\}$ $(u \in \mathbb{S}_{d-1})$.

Теорема 2.2. *Пусть $d, m, k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; $n = d+m$; X — подмножество в $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{P}$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов X^n, удовлетворяющее условию[6]:*

($\mathfrak{C}$) $\mathrm{CN}_0^I(X^n)$ является событием для любой $(n-k)$-компонентной подсистемы I системы чисел $(1, 2, \ldots, n)$.

Тогда множество $\mathrm{CN}_k(X^n)$ всех k-космежностных систем точек $a \in X^n$ является событием, для вероятности $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$ которого имеют место утверждения:

1) выполняются неравенства

$$1 - 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{i} \geqslant \mathrm{Prob}^*(d, n, k) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \binom{n}{k} 2^{-n+k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{i};$$

2) для любых $\rho > 1$ и $\alpha > \max(0, 2-\rho)$

$$\mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) \longrightarrow 0$$

при $d \to \infty$;

3) для любого $\rho \in (1, 2)$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\rho) \in (0, \min(1/2, 2-\rho))$ такое, что для всякого $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$\mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, \lfloor \alpha d \rfloor) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$;

[6]Это условие ($\mathfrak{C}$) выполнено, если σ-алгеброй событий является борелевская σ-алгебра в X^n.

4) *существует* $\alpha_1 \in (0, 1/2)$ *такое, что для любого фиксированного* m *и любого* $\alpha \in (0, \alpha_1)$

$$\mathrm{Prob}^*(d, d+m, \lfloor \alpha d \rfloor) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$;

5) *для фиксированного* k

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{Prob}^*(d, \lfloor \rho d \rfloor, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 < \rho < 2, \\ 0, & \text{если } \rho > 2; \end{cases}$$

6) *для фиксированных* m *и* k

$$\mathrm{Prob}^*(d, d+m, k) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$.

С целью доказательства теоремы 2.2 предварительно обосновывается лемма о точном значении вероятности 0-космежностности случайной системы точек, являющаяся новой версией известной теоремы Венделя [31, 29]. Обоснование леммы проводится аналогично рассуждению Венделя с дополнительным привлечением установленного в главе 1 с помощью двойственности Гейла факта: если $n > d$ и существует замкнутое линейное полупространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее все точки системы $a \in \mathrm{LinGeP}(\mathbb{R}^{d,n})$, то существует открытое линейное полупространство в $\mathbb{R}^d$, обладающее этим свойством.

Роль теорем 2.1 и 2.2 двоякая. Во-первых, утверждения 5) и 6) теоремы 2.2 подтверждают справедливость гипотезы $(\mathrm{G})^*_k$ для произвольного $k \geqslant 1$ при некоторых способах согласованного роста параметров n и d, а утверждения 2)–4) содержат более сильные результаты. Отметим, что изучение вероятности $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$ и гипотезы $(\mathrm{G})^*_k$ представляет самостоятельный интерес, так как случайный выбор системы n точек в $\bar{\mathbb{S}}_{m-1}$, где $n \geqslant m+2$, предназначенной для последующего применения конструкции Гейла, может рассматриваться как способ случайного порождения многогранника в $\mathbb{R}^{n-m-1}$. В отличие от теоремы 2.1 теорема 2.2 является утверждением, справедливым при очень слабых условиях на распределение. Однако, например, при $m = 1$ оценка вероятности $\mathrm{Prob}^*(d, n, k)$ в теореме 2.1 сильнее ее нижней оценки в теореме 2.2. Иллюстрацией к теореме 2.1 служит такой числовой пример: случайно выбранные 19 точек на сфере $\mathbb{S}_0 = \{-1, 1\}$ образуют 2-космежностную систему точек (применение конструкции Гейла к которой дает 2-смежностный многогранник в $\mathbb{R}^{17}$) с вероятностью, превышающей 0,999. Во-вторых, с использованием теоремы 2.2 и построенной двойственности вероятностных пространств (см. теорему 1.1) доказывается

Теорема 2.3. *Пусть $d, n, k \in \mathbb{N}$; $n > d$; $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$; X — облачное подмножество в $\mathbb{R}^d$ и $\mathcal{P}$ — абсолютно симметричное вероятностное пространство с пространством исходов X^n, удовлетворяющее следующим двум условиям*[7]*:*

($\mathfrak{L}$) $\mathrm{LinConf}(X^n)$ *является событием;*

($\mathfrak{VN}$) $\mathrm{VN}_0^I(X^n)$ *является событием для любой $(n-k)$-компонентной подсистемы I системы чисел $(1, 2, \ldots, n)$.*

Тогда множество $\mathrm{VN}_k(X^n)$ всех векторно k-смежностных систем точек $a \in X^n$ является событием, для вероятности $\mathrm{Prob}(d, n, k)$ которого имеют место утверждения 1)–6), получающиеся из утверждений 1)–6) теоремы 2.2 заменой Prob^* на Prob.

Условия теоремы 2.3 выполнены в следующих трех важных частных случаях, позволяющих из теоремы 2.3 легко извлекать многочисленные следствия для конкретных распределений:

1) в множестве $\mathbb{R}^d$ выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с распределением, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$ (например, d-мерным нормальным распределением с нулевым вектором средних);

2) в множестве $X = K$, где K — центрально симметричное (с центром в точке 0) выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$ (например, d-мерный единичный шар $\mathbb{B}_d$), выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с распределением, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно меры Лебега на K (например, равномерным распределением на $\mathbb{B}_d$);

3) в множестве $X = \partial K$, где ∂K — центрально симметричная (с центром в точке 0) выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^d$ (например, сфера $\mathbb{S}_{d-1}$), выбираются n случайных точек ($n > d$) независимо в соответствии с распределением, симметричным относительно точки 0 и абсолютно непрерывным относительно поверхностной меры на ∂K (например, равномерным распределением на $\mathbb{S}_{d-1}$).

Утверждения 5) и 6) теоремы 2.3 подтверждают справедливость гипотезы Гейла $(\mathrm{G})_k$ для произвольного $k \geqslant 1$, а утверждения 2)–4) содержат более сильные результаты. Среди следствий, не известных ранее, — например, только что отмеченное утверждение о справедливости гипотезы Гейла для равномерных случайных многогранников на сфере $\mathbb{S}_{d-1}$.

[7] Эти условия ($\mathfrak{L}$) и ($\mathfrak{VN}$) выполнены, если σ-алгеброй событий является борелевская σ-алгебра в X^n.

В отличие от ранее известных подтверждений гипотезы Гейла и ее усиленных версий, обобщающая многие известные факты (см., например, [10,9]) теорема 2.3 является утверждением, справедливым при очень слабых условиях на распределение. Утверждения 2),3) теоремы 2.3 показывают, что в случае векторной k-смежностности фазовый переход при линейно согласованном росте параметров n и d имеет вид, отличный от случая k-смежностности (см. (1)). В частности, в силу утверждения 2) порог отсутствует при $\rho > 2$.

Обозначим через $\mathrm{Prob}_{0/1}(d, n, 2)$ вероятность того, что при случайном выборе без возвращения n вершин стандартного единичного гиперкуба $\mathrm{I}_d = [0,1]^d$ их выпуклая оболочка является 2-смежностным многогранником (в терминологии из [23] речь идет о $P_{d,A(n)}$-*модели случайного* $0/1$ *многогранника*). Глава 3 посвящена изучению этой вероятности. Первым результатом в этом направлении стала нижняя оценка этой вероятности, полученная В.А. Бондаренко [1]. Основным результатом главы 3 является полученная В.А. Бондаренко и автором

Теорема 3.1. *Если* $d, n \in \mathbb{N}$; $d \geqslant 2$; $n \leqslant 2^d$ *и* $\mathrm{Prob}_{0/1}(d, n, 2)$ — *вероятность* 2-*смежностности случайного* $0/1$ *многогранника* $P_{d,A(n)}$-*модели, то*

1) выполняется неравенство

$$\mathrm{Prob}_{0/1}(d, n, 2) \geqslant \\ \geqslant 1 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} \cdot \frac{2 \cdot 5^d - 11 \cdot 3^d + 14 \cdot 2^d - 5}{(2^d - 1)(2^d - 2)(2^d - 3)};$$

2) если $n(d) = O(2^{cd})$, *где* c — *константа, удовлетворяющая неравенствам* $0 < c < (3 - \log_2 5)/4$, *то*

$$\mathrm{Prob}_{0/1}(d, n(d), 2) \longrightarrow 1$$

при $d \to \infty$.

Утверждение 1) теоремы 3.1 усиливает оценку из [1]. В качестве иллюстрации к нему приведем числовой пример: случайно выбранные без возвращения 25000 вершин 100-мерного гиперкуба образуют 2-смежностный многогранник с вероятностью, превышающей 0,999. Доказательство утверждения 1) использует достаточное условие 2-смежностности $0/1$ многогранника в терминах покомпонентных операций логического сложения и логического умножения на множестве $\{0,1\}^d$. Утверждение 2) подтверждает гипотезу Гейла

$(\mathrm{G})_2$ для случайных $0/1$ многогранников $P_{d,A(n)}$-модели. В этой связи отметим следующее: поскольку $c = 1/6$ удовлетворяет условию теоремы 3.1, аналог ее утверждения 2) имеет место в предположении, что $n(d) = O(2^{d/6})$. Исследование вероятности k-смежностности случайного $0/1$ многогранника для произвольного k автором не проводилось в связи с появлением соответствующих результатов для равномерных случайных $0/1$ многогранников в диссертации Р. Гиллмана [23] и статье Ш. Мендельсона, А. Пажора, Н. Томчак-Джагерманна [25] (в частности, подтверждающих справедливость при любом $k \geqslant 1$ гипотезы Гейла $(\mathrm{G})_k$ для равномерных случайных $0/1$ многогранников).

Список литературы

[1] Бондаренко В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. — Ярославль: ЯрГУ, 1995. — 126 с.

[2] Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 184 с.

[3] Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. — М.: Мир, 1988. — 240 с.

[4] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука, 1981. — 344 с.

[5] Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995. — 192 с.

[6] Шевченко В.Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: Физматлит, 2007. — С. 43–56.

[7] Шевченко В.Н. Триангуляции выпуклых многогранников и реализация их f-векторов // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Алтай, 27 июня–3 июля 2010). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2009. — С. 75–81.

[8] Adamczak R., Litvak A.E., Pajor A., Tomczak-Jaegermann N. Restricted isometry property of matrices with independent columns and neighborly polytopes by random sampling. Preprint, 34 p., available at arXiv:0904.4723v1 [math.PR] 30 Apr 2009.

[9] Bárány I., Füredi Z. On the shape of the convex hull of random points // Probability Theory and Related Fields. — 1988. — V. 77, №2. — P. 231–240.

[10] Buchta C. On a conjecture of R.E. Miles about the convex hull of random points // Monatshefte für Mathematik. — 1986. — V. 102. — P. 91–102.

[11] Candes E., Rudelson M., Tao T., Vershynin R. Error correction via linear programming // Proceedings of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2005), IEEE. — 2005. — P. 295–308.

[12] Candes E., Tao T. Near optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies // IEEE Transactions on Information Theory. — 2004. — V. 52. — P. 5406–5425.

[13] Candes E., Tao T. Decoding by linear programming // IEEE Transactions on Information Theory. — 2005. — V. 51, №12. — P. 4203–4215.

[14] Donoho D.L. Neighborly polytopes and sparse solution of underdetermined linear equations. Preprint, 21 p., available at `http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/2005/NPaSSULE-01-28-05.pdf`.

[15] Donoho D.L. High-dimensional centrally-symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension // Discrete and Computational Geometry. — 2006. — V. 35, №4. — P. 617–652.

[16] Donoho D.L., Tanner J. Sparse nonnegative solution of underdetermined linear equations by linear programming // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 2005. — V. 102, №27. — P. 9446–9451.

[17] Donoho D.L., Tanner J. Neighborliness of randomly-projected simplices in high dimensions // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 2005. — V. 102, №27. — P. 9452–9457.

[18] Donoho D.L., Tanner J. Counting faces of randomly-projected polytopes when the projection radically lowers dimension // Journal of the American Mathematical Society. — 2009. — V. 22, №1. — P. 1–53.

[19] Donoho D.L., Tanner J. Observed universality of phase transitions in high-dimensional geometry, with implications for modern data analysis and signal processing // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. — 2009. — V. 367. — P. 4273–4293.

[20] Donoho D.L., Tanner J. Counting the faces of randomly-projected hypercubes and orthants, with applications // Discrete and Computational Geometry. — 2010. — V. 43, №3. — P. 522–541.

[21] Donoho D.L., Tanner J. Exponential bounds implying construction of compressed sensing matrices, error-correcting codes and neighborly polytopes by random sampling // IEEE Transactions on Information Theory. — 2010. — V. 56, №4. — P. 2002–2016.

[22] Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhedron // Linear inequalities and related systems / H.W. Kuhn, A.W. Tucker, Eds. (Annals of Mathematics Studies. №38). — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956. — P. 255–263.

Имеется русский перевод: Гейл Д. Соседние вершины на выпуклом многограннике // Линейные неравенства и смежные вопросы / Под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера. — М.: ИЛ, 1959. — С. 355–362.

[23] Gillmann R. 0/1-polytopes: typical and extremal properties. Dissertation. — Berlin: Technische Universität Berlin, 2007. — 125 p.

[24] Grünbaum B. Convex polytopes (Graduate Texts in Mathematics. V. 221). Second edition prepared by V. Kaibel, V. Klee and G.M. Ziegler. — New York: Springer, 2003. — 468 p.

[25] Mendelson S., Pajor A., Tomczak-Jaegermann N. Reconstruction and subgaussian operators in asymptotic geometric analysis // Geometric and Functional Analysis. — 2007. — V. 17, №4. — P. 1248–1282.

[26] Moravek J. On the complexity of discrete programming problems // Aplikace Matematiky. — 1969. — V. 17, №6. — P. 442–474.

[27] Rudelson M., Vershynin R. Geometric approach to error correcting codes and reconstruction of signals // International Mathematical Research Notices. — 2005. — V. 64. — P. 4019–4041.

[28] Schneider R. Discrete aspects of stochastic geometry // Handbook of discrete and computational geometry / J.E. Goodman, J. O'Rourke, Eds. (second edition). — Boca Raton (Florida): Chapman & Hall / CRC Press, 2004. — P. 255–278.

[29] Schneider R., Weil W. Stochastic and integral geometry (Probability and its Applications). — Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. — 694 p.

[30] Vershik A.M., Sporyshev P.V. Asymptotic behavior of the number of faces of random polyhedra and the neighborliness problem // Selecta Mathematica Sovietica. — 1992. — V. 11, №2. — P. 181–201.

[31] Wendel J.G. A problem in geometric probability // Mathematica Scandinavica. — 1962. — V. 11. — P. 109–111.

[32] Ziegler G.M. Lectures on polytopes (Graduate Texts in Mathematics. V. 152). — New York: Springer, 1995. — 370 p. (Updates, corrections, and more available at `http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler`)

Публикации автора в изданиях, включенных в перечень ВАК РФ

[33] Бондаренко В.А., Бродский А.Г. О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, №1. — С. 64–69.

[34] Бродский А.Г. О 2-смежностных многогранниках и конструкции Гейла // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, №2. — С. 5–21.

Другие публикации автора

[35] Бродский А.Г. О гипотезе Гейла и 2-смежностных многогранниках // Шестьдесят вторая региональная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием «Молодежь. Наука. Инновации — 2009». 15 апреля 2009 г., Ярославль: Тез. докл. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2009. — С. 203.

[36] Бродский А.Г. Вокруг гипотезы Гейла о 2-смежностных многогранниках // Молодежь и наука: реальность и будущее: Материалы II Международной научно-практической конференции (г. Невинномысск, 3 марта 2009) / Редкол.: В.А. Кузьмищев, О.А. Мазур, Т.Н. Рябченко, А.А. Шатохин. Т. VIII. — Невинномысск: НИЭУП, 2009. — С. 310–311.

[37] Бродский А.Г. О 2-смежностных многогранниках // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 мая 2009 г.). Часть I. / Под ред. А.В. Чашкина. — М.: ИПМ РАН, МГУ, 2009. — С. 10–14.

[38] Бродский А.Г. О двойственности Гейла и k-смежностных случайных многогранниках // Заметки по информатике и математике: сб. науч. ст. Вып. 2 / отв. ред. А.Н. Морозов; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2010. — С. 28-33.

[39] Brodskiy A.G. On 2-neighborly polytopes and the Gale construction // Automatic Control and Computer Sciences. — 2010. — V. 44, №7. — P. 434–446.