На правах рукописи

Овсянников Иван Ильич

Глобальные бифуркации трехмерных диффеоморфизмов с негрубыми гомоклиническими и гетероклиническими траекториями

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2011

Работа выполнена на кафедре математики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Гонченко Сергей Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Жиров Алексей Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент Украинский Борис Семенович

Ведущая организация: Владимирский Государственный
университет

Защита состоится "22" декабря 2011 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета Д212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского по адресу: 603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, корп.2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ННГУ.

Автореферат разослан "____" __________ 2011г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.166.06,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И. Лукьянов

Общая характеристика работы

Предмет исследования. Основной темой диссертации является исследование нелокальных бифуркаций, связанных с существованием нетрансверсальных пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических траекторий. Траектория, лежащая в пересечении инвариантных многообразий одной и той же седловой периодической орбиты называется гомоклинической, а в случае различных седел — гетероклинической. Часто используется также термин "гомоклиническая траектория Пуанкаре", чтобы подчеркнуть отличие от двоякоасимптотических траекторий другого типа — петель сепаратрис седловых состояний равновесий (которые тоже иногда называют гомоклиническими траекториями). В случае, когда инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально, говорят также о существовании гомоклинического или, соответственно, гетероклинического касания.

Актуальность исследования. Настоящая работа относится к одному из основных разделов качественной теории динамических систем — теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем.

История вопроса. Основы качественной теории динамических систем были заложены в конце 19-ого и начала 20-ого века в классических работах А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Дж. Биркгофа. Теория бифуркаций как самостоятельная математическая дисциплина оформилась в работах А.А. Андронова, Н.Н. Баутина, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина. Прежде всего это касалось динамических систем на плоскости. Для них, в частности, было введено понятие грубой системы (Андронов, Понтрягин) и указаны отличительные признаки грубых векторных полей на плоскости (Андронов, Леонтович); для систем с конечным множеством особых траекторий был построен полный топологический инвариант (Леонтович, Майер). Также были изучены бифуркации систем первой степени негрубости (Андронов, Леонтович). Эти бифуркации стали подразделяться условно на локальные и нелокальные. К основным локальным бифуркациям систем на плоскости относятся бифуркации состояний равновесий типа седло-узел и сложный фокус, а также бифуркации сложных (полуустойчивых) предельных циклов. Основные нелокальные бифуркации составляют бифуркация гомоклинической петли сепаратрисы седла, гомоклинической петли сепаратрисы седло-узла, а также бифуркация сепаратрисы, идущей из одного седла в другое.

В 60-е годы началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем (размерность фазового пространства которых не меньше трех для потоков и двух для отображений). При этом основным объектом исследования поначалу стала теория грубых динамических систем, получившая наименование "гиперболической теории". Ее математический фундамент был заложен в работах В.М. Алексеева, Д.В. Аносова, С. Смейла, Л.П. Шильникова и др.

В случае многомерных динамических систем основные локальные бифуркации составляют а) бифуркации состояний равновесия типа седло-узел или седло-седло; б) бифуркации Андронова-Хопфа состояния равновесия с чисто мнимыми собственными значениями; в) бифуркации периодических траекторий с мультипликатором, равным $+1$; г) бифуркации периодических траекторий с мультипликатором, равным -1 (т.н. бифуркация удвоения периода); д) бифуркации периодических траекторий с мультипликаторами $e^{\pm i\varphi}$ при условии отсутствия сильных резонансов, т.е. $0 < \varphi < \pi$ и $\varphi \neq \pi/2, 2\pi/3$ (т.н. бифуркация рождения инвариантного тора).

Основы теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем были заложены в работах Л.П. Шильникова. Так, ещё в 60-х годах им были обобщены на многомерный случай результаты, касающиеся рождения единственного предельного цикла из гомоклинической петли состояний равновесия типа седло, седло-узел и седло-седло. В это же время Л.П. Шильниковым было открыто принципиальное отличие характера многомерных гомоклинических бифуркаций от двумерных, состоящее в том, что многие бифуркации коразмерности один могут приводить к возникновению сложной динамики. В частности, такой бифуркацией является бифуркация гомоклинической петли состояния равновесия типа седло-фокус. Другой пример подобной бифуркации коразмерности один — состояние равновесия типа седло-седло, имеющее несколько гомоклинических петель.

В дальнейшем, помимо Л.П. Шильникова, нелокальные бифуркации многомерных динамических систем изучались в работах В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, Л.А. Белякова, В.В. Быкова, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко, Ю.С. Ильяшенко, Л.М. Лермана, В.И. Лукьянова, С. Ньюхауса, Дж. Пэлиса, К. Симо, Ф. Такенса, Д.В. Тураева, А.Я. Хомбурга и др.

Среди нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем особое место занимают бифуркации гомоклинических касаний, а также бифуркации негрубых гетероклинических контуров. В последнем случае в системе имеется несколько седловых периодических траекторий, у которых одна пара инвариантных многообразий пересекается нетрансверсально, а остальные в общем случае имеют трансверсальные пересечения. Существование у системы грубой гомоклинической траектории Пуанкаре или грубого гетероклинического контура является одним из универсальных критериев сложной динамики или, другими словами, динамического хаоса. Это связано с тем, что уже множество траекторий N, целиком лежащих в малой окрестности грубой гомоклинической траектории, имеет весьма нетривиальную структуру: оно содержит счетное множество периодических и гомоклинических орбит, континуум устойчивых по Пуассону траекторий и т.п. Более того, как установил Л.П. Шильников, множество N является грубым локально максимальным нетривиальным гиперболическим множеством, допускающим полное описание в терминах символической динамики.

В случае гомоклинического касания или негрубого гетероклинического контура соответствующая задача описания множества траекторий в их окрестности становится гораздо более сложной. Более того, как "задача полного описания", она является принципиально неразрешимой, особенно когда рассматриваются еще и близкие системы. Дело в том, что произвольно малые гладкие возмущения любой системы с таким квадратичным касанием инвариантных многообразий могут приводить к возникновению новых гомоклинических или гетероклинических касаний любых порядков, а также сколь угодно вырожденных периодических траекторий, как показано в работах Гонченко, Тураева и Шильникова. С формальной точки зрения, это означает, что полное описание бифуркаций таких систем с помощью конечно-параметрических семейств не может быть достигнуто. Поэтому здесь на первый план должны выступать задачи, связанные с выяснением принципиальных особенностей и характеристических свойств динамики и бифуркаций.

В диссертации рассматриваются задачи именно такого рода, которые можно условно разбить на два класса. Задачи первого класса связаны с исследованием нелокальных бифуркаций, приводящих к появлению или исчезновению устойчивых периодических траекторий (периодических аттракторов). Задачи второго класса связаны с изучением нелокальных бифуркаций (именно, бифуркаций негрубых гетероклинических контуров), приводящих к рождению странных аттракторов.

В общем плане, критерии существования или отсутствия устойчивых периодических траекторий у систем, близких к системе с гомоклиническим касанием, были установлены в работах Гонченко, Тураева и Шильникова. А первые результаты на эту тему были получены в 1973 г. в работах Гаврилова и Шильникова для случая двумерных диффеоморфизмов (трехмерных потоков). При этом ответ зависел от т.н. *седловой величины* σ. Напомним, что в случае седловой периодической траектории ее седловая величина определяется как произведение модулей ближайших к единичной окружности устойчивого (< 1 по модулю) и неустойчивого (> 1 по модулю) мультипликаторов. Таким образом, в случае двумерных диффеоморфизмов, $\sigma = |\lambda\gamma|$, где λ и γ — устойчивый и неустойчивый мультипликаторы соответствующего седла. Тогда, если $\sigma > 1$, то все близкие диффеоморфизмы не имеют устойчивых периодических траекторий; если же $\sigma < 1$, то такие траектории рождаются при бифуркациях. В частности, Гавриловым и Шильниковым были изучены бифуркации рождения периодических аттракторов в однопараметрических семействах общего положения. Соответствующий результат получил позднее название *Теорема о каскаде периодических стоков*, поскольку периодические аттракторы (стоки) существуют при значениях параметров из счетного множества непересекающихся интервалов (каскада), накапливающихся к значению параметра, отвечающему существованию исходного касания.

Заметим, что в многомерном случае условие $\sigma > 1$ уже не влечет автоматически отсутствие устойчивых периодических траекторий у близких систем. Так, уже в трехмерном случае, когда диффеоморфизм имеет седловую неподвижную точку O с мультипликаторами $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ такими, что $0 < |\lambda_2| \leq |\lambda_1| < 1$, $|\gamma| > 1$ и $|\lambda_1 \lambda_2 \gamma| < 1$, и также имеет негрубую гомоклиническую траекторию к O, возможны две совершенно разные ситуации (здесь $\sigma = |\lambda_1 \gamma|$):

(i) точка O является седлом, т.е. λ_1, λ_2 — действительны и $|\lambda_2| < |\lambda_1|$;

(ii) точка O является седло-фокусом, т.е. $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$ и $0 < \varphi < \pi$.

В случае седла с $\sigma > 1$ при общих условиях[1] ни сама система, ни все близкие не имеют устойчивых периодических траекторий в малой фиксированной окрестности негрубой гомоклинической орбиты. Однако, в случае седло-фокуса устойчивые периодические траектории, а также устойчивые замкнутые инвариантные кривые могут рождаться и при $\sigma > 1$. Бифуркации, приводящие к их рождению, изучались в работах Гонченко, Тураева и Шильникова.

Заметим при этом, что случаи гомоклинических касаний к неподвижным точкам с $\sigma = 1$ (такие точки мы будем называть нейтральными) являются особыми. Здесь даже изучение бифуркаций квадратичных касаний требует как минимум двухпараметрического анализа. Для двумерных диффеоморфизмов с $\sigma = 1$ такой бифуркационный анализ был проведен С.В. Гонченко и В.С. Гонченко. В частности, ими были найдены условия рождения периодических траекторий и замкнутых инвариантных кривых при переходе от $\sigma < 1$ к $\sigma > 1$. В настоящей диссертации рассмотрены бифуркации квадратичных гомоклинических касаний в случае многомерного седла с $\sigma = 1$. Кроме того, здесь исследуется новый случай бифуркации гомоклинического касания седло-фокуса с $\sigma = 1$.

Отметим, что хотя устойчивые периодические траектории и наблюдаются в случае седло-фокуса при $\sigma > 1$, но для их надежной фиксации требуется рассмотрение уже как минимум двухпараметрических

[1] Общие условия представлены как условия простоты гомоклинического касания и являются аналогами т.н. условия квазитрансверсального пересечения — гарантируют существование вблизи гомоклинического касания некоторого гладкого глобального двумерного центрального многообразия, в ограничении на котором система является двумерной с $\sigma > 1$, что автоматически препятствует возможности появления устойчивых периодических траекторий. Эти условия, кроме квадратичности касания, включают два требования: (а) $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ и (б) т.н. расширенное неустойчивое многообразие $W^{ue}(O)$ трансверсально к слоям сильно устойчивого инвариантного слоения вблизи точки гомоклинического касания. Эти условия являются условиями общего положения и они весьма важны, так как при их нарушении устойчивые периодические траектории могут рождаться при бифуркациях.

семейств. И это несмотря на то, что по своей природе задача изучения бифуркаций в данном случае выглядит формально как однопараметрическая (собственно, так оно и есть в случае $\sigma < 1$). Более того, такое явление как "каскад периодических стоков" в однопараметрических семействах общего положения может обнаруживаться в случае $\sigma > 1$ "с нулевой вероятностью", хотя такой каскад в случае $\sigma < 1$ существует всегда. С этой особенностью указанных бифуркаций связан т.н. "эффект ненаблюдаемости" периодических аттракторов внутри хаоса. В диссертации дается объяснение этого явления с помощью уже трехпараметрического анализа бифуркаций гомоклинического касания к нейтральному седло-фокусу.

Задачи второго класса связаны с исследованием нелокальных бифуркаций, приводящих к рождению странных аттракторов. Хорошо известно, что при бифуркациях гомоклинических касаний уже в случае двумерных диффеоморфизмов могут рождаться "странные" аттракторы типа аттрактора отображения Эно. Однако они кажутся странными только лишь "на физическом уровне", поскольку сколь угодно малые возмущения могут приводить здесь к появлению периодических аттракторов. Это означает, что кажущееся хаотическим при наблюдении поведение траекторий может являться в действительности "периодическим плюс (неизбежные) ошибки" (экспериментальные или вычислительные). По терминологии Афраймовича и Шильникова аттракторы такого типа называются квазиаттракторами. Можно сказать, что квазиаттракторы встречаются в приложениях достаточно часто — это многочисленные аттракторы, наблюдаемые в конкретных системах, прежде всего малой размерности. Таковыми являются странные аттракторы в отображении Эно, в цепях Чуа, многие типы спиральных и тор-хаос аттракторов, аттракторы Ресслера и т.п. Основным их характерным признаком является наличие (или возможность возникновения) таких гомоклинических касаний, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий. Таким образом, квазиаттракторы можно часто распознать, используя критерий Гонченко-Тураева-Шильникова, показывающий, возможно ли рождение устойчивых периодических траекторий при данной гомоклинической бифуркации.

Другой вид "гомоклинического хаоса" представлен так называемыми дикими гиперболическими аттракторами[2], которые были введены в работе Тураева и Шильникова. Заметим, что системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, то есть допускают гомоклинические касания. Однако в этом случае ни сама система, ни все близкие к ней не содержат устойчивых периодических траекторий.

В той же работе Тураева и Шильникова был приведен пример системы, обладающей диким спиральным аттрактором, который содержит состояние равновесия типа седло-фокус. Другой весьма важный тип диких гиперболических аттракторов составляют т.н. *дикие лоренцевские аттракторы*, которые могут быть получены, в частности, при периодических возмущениях автономных систем с аттракторами Лоренца. Хорошо известно, что последние не допускают гомоклинических касаний. Однако они могут возникать при периодических возмущениях. Но при этом устойчивые периодические траектории здесь все равно не появляются. Основной причиной этого обстоятельства является то, что дикие лоренцевские аттракторы обладают т.н. *псевдо-гиперболической структурой*[3].

Весьма важной особенностью диких лоренцевских аттракторов является то, что они могут рождаться в результате локальных бифуркаций периодических траекторий. Это возможно в тех случаях, когда такая траектория имеет три или более мультипликатора на единичной окружности (А.Л. Шильников, Л.П. Шильников, Д.В. Тураев). Последнее обстоятельство говорит о том, что соответствующие аттракторы мо-

---

[2]Термин "дикий" восходит к Ш. Ньюхаусу, который ввел понятие "дикого гиперболического множества" — равномерно гиперболического базисного множества, чьи устойчивое и неустойчивое инвариантные множества (усы) имеют касание. Ньюхаус показал, что свойство наличия касания является сохраняющимся и, следовательно, системы с дикими гиперболическими множествами образуют открытые области (в C^r-топологии с $r \geq 2$) в пространстве динамических систем.

[3]Напомним, что, по определению, псевдо-гиперболическое множество отображения f — это такое компактное инвариантное множество $A \subset M$, что для каждой точки $x \in A$ касательное пространство разлагается в прямую сумму $T_xM = T_1 \oplus T_2$ двух подпространств таких, что f на T_1 является сильно сжимающим ("сильно" означает здесь, что любые возможные сжатия в трансверсальных направлениях являются более слабыми), а на T_2 растягивает (экспоненциально) объемы. По сути, здесь определяется некоторый тип нормальной гиперболичности, а значит, псевдо-гиперболичность сохраняется при малых гладких возмущениях. Определение псевдо-гиперболичности для потоков — вполне аналогично, и поэтому мы его не приводим. Однако, заметим, что в случае потоков псевдо-гиперболичность сохраняется также и при малых неавтономных периодических возмущениях. Кроме того, условие растяжения площадей на T_2, очевидно, запрещает устойчивые периодические траектории.

гут быть обнаружены в конкретных моделях, которые содержат достаточное количество параметров, чтобы обеспечить существование вырождения указанного типа.

Одной из таких моделей является трехмерное отображение Эно следующего вида:

$$\bar{x} = y, \;\; \bar{y} = z, \;\; \bar{z} = M_1 + Bx + M_2 y - z^2 \;, \tag{1}$$

в котором присутствуют три независимых параметра, M_1, M_2 и B. В настоящей диссертации показано, что отображение (1) обладает (глобальным) диким лоренцевским аттрактором для значений параметров из некоторой открытой области, прилегающей к точке $(M_1 = -1/4, \; M_2 = 1, \; B = 1)$.

Нужно отметить, что еще Гонченко, Тураев и Шильников показали, что бифуркации многомерных систем с гомоклиническими касаниями коразмерности один могут приводить к настоящим странным аттракторам (например, лоренцевского типа). Однако, в этом случае такие системы должны иметь, как минимум, размерность четыре — для отображений, или пять — для потоков. Условие коразмерности один означает, что предполагается выполненным только одно негрубое условие — существование гомоклинического касания. Все остальные условия — общего положения, в частности, касание должно быть квадратичным, седловая величина не равна единице и т. п.

Однако, недавно было установлено (Гонченко, Мейсс, Овсянников), что глобальные бифуркации уже трехмерных диффеоморфизмов могут также приводить к рождению диких лоренцевских аттракторов. В частности, такие аттракторы возникают при бифуркациях гомоклинического касания в случае седло-фокуса $(2, 1)$ при дополнительном вырождении: якобиан отображения в неподвижной точке равен единице. Другой интересный случай (Гонченко, Тураев, Шильников) связан с бифуркациями негрубого гетероклинического контура, содержащего две неподвижные точки типа $(2, 1)$, причем одна из них — седло-фокус, а другая — седло. Рождение диких аттракторов Лоренцевского типа доказывалось здесь при одном весьма важном дополнительном условии общего положения, что якобиан отображения в одной из неподвижных точек больше единицы, а в другой — меньше единицы[4].

В настоящей диссертации эта тематика продолжена. Здесь рассматривается контур другого типа, а именно, негрубый гетероклинический контур, содержащий две неподвижные точки O_1 и O_2, которые обе являются седло-фокусами типа $(2,1)$. И, опять же, накладывается дополнительное условие общего положения: якобиан отображения в одной из точек O_1 или O_2 — больше единицы, а в другой — меньше единицы.

Цели и задачи исследования. В диссертации изучаются глобальные бифуркации многомерных диффеоморфизмов, обладающих негрубыми гомоклиническими или гетероклиническими орбитами в следующих случаях.

Случай 1. (многомерные диффеоморфизмы с квадратичным гомоклиническим касанием к нейтральному седлу)

A1. Исходный диффеоморфизм f_0 имеет седловую неподвижную точку O с мультипликаторами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \gamma$, где $0 < |\lambda_i| < |\lambda_1| < 1 < |\gamma|$, $i = 2, \ldots, n$. Таким образом, $\dim W^s(O) = n$, $\dim W^u(O) = 1$;

B1. Седловая величина $\sigma = |\lambda_1 \gamma|$ равна 1;

C1. Устойчивое $W^s(O)$ и неустойчивое $W^u(O)$ многообразия точки O касаются квадратичным образом в точках некоторой гомоклинической орбиты Γ_0;

Также, для того, чтобы рассматриваемое гомоклиническое касание являлось простым, к условиям **A1** - **C1** добавляется следующее условие общего положения:

D1. Расширенное неустойчивое инвариантное многообразие $W^{ue}(O)$ и слои сильно устойчивого инвариантного слоения F^{ss} на $W^s(O)$ пересекаются трансверсально в точках орбиты Γ_0.

Напомним, что при выполнении условия **A1** на n-мерном устойчивом многообразии $W^s(O)$ существует единственное гладкое сильно устойчивое инвариантное слоение F^{ss}, каждый слой которого является $(n-1)$-мерным многообразием. Слоение F^{ss} содержит также неведущее устойчивое многообразие $W^{ss}(O)$. По определению, локальное расширенное

[4]При невыполнении этого условия, если, например, якобианы в обеих точках меньше единицы, любые трехмерные объемы вблизи контура будут асимптотически сжиматься при итерациях диффеоморфизма. И, соответственно, общая динамика становится эффективно двумерной.

неустойчивое многообразие $W^{ue}_{loc}(O)$ — это инвариантное многообразие, содержащее $W^u(O)$ и касающееся ведущего устойчивого направления (отвечающего мультипликатору λ_1) в точке O.

Случай 2. (Трехмерные диффеоморфизмы с квадратичным гомоклиническим касанием к нейтральному седло-фокусу)

A2. Диффеоморфизм f_0 имеет неподвижную точку O типа седло-фокус с мультипликаторами $\nu_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}, \nu_3 = \gamma$, где $0 < \lambda < 1 < |\gamma|$;

B2. Седловая величина $\sigma \equiv \lambda|\gamma|$ равна 1;

C2. Устойчивое $W^s(O)$ и неустойчивое $W^u(O)$ инвариантные многообразия точки O касаются квадратичным образом в точках некоторой гомоклинической орбиты Γ_0.

Случай 3. (Трехмерные диффеоморфизмы с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим седло-фокусы)

A3. Трехмерный диффеоморфизм f_0 имеет две неподвижные точки O_1 и O_2, которые обе являются седло-фокусами типа (2,1).

B3. В одной из неподвижных точек якобиан диффеоморфизма f_0 меньше единицы, а в другой — больше единицы.

C3. Инвариантные многообразия $W^u(O_1)$ и $W^s(O_2)$ пересекаются трансверсально в точках некоторой гетероклинической траектории Γ_{12}, а $W^u(O_2)$ и $W^s(O_1)$ имеют квадратичное касание в точках некоторой гетероклинической траектории Γ_{21}.

Цель диссертации состоит в том, чтобы в рамках параметрических семейств общего положения изучить бифуркации периодических траекторий, целиком лежащих в некоторой малой окрестности гомоклинической орбиты (в случаях 1 и 2) или гетероклинического контура (в случае 3) в системах, близких к f_0.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены как в теории бифуркаций динамических систем, так и при исследовании конкретных моделей.

Результаты диссертационной работы использованы при выполнении научно-исследовательских работ по грантам РФФИ № 04-01-00487, № 04-01-00483, № 07-01-00566, № 07-01-00715, № 10-01-00429, гранту "Ведущие научные школы" № 838.2003.2, а также гранту Правительства РФ, контракт № 11.Г34.31.0039.

Методологическая и теоретическая основа исследования. В диссертации использованы методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

Научная новизна. Среди новых результатов, полученных в диссертации, можно выделить следующие:

1. Исследованы основные бифуркации однообходных периодических траекторий в случае многомерного нейтрального седла с гомоклиническим касанием.

2. Выведены условия невырожденности бифуркации рождения замкнутых инвариантных кривых точек периода два в обобщенном отображении Эно в ориентируемом и неориентируемом случаях.

3. Построены границы области устойчивости трехмерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизмам с квадратичными гомоклиническими касаниями к нейтральному седло-фокусу. Таким образом, дано объяснение с точки зрения качественной теории "эффекта ненаблюдаемости" устойчивых периодических траекторий в однопараметрических семействах.

4. Исследован новый случай негрубого гетероклинического контура с квадратичным касанием (содержащего седло-фокусы). Доказано, что вблизи таких систем существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы со счетным множеством диких лоренцевских аттракторов.

5. Доказано существование области параметров, в которой трехмерное отображение Эно (1) обладает диким странным аттрактором Лоренцевского типа.

6. Для трехмерного отображения Эно (1) исследованы основные локальные бифуркации коразмерности один и два и построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

Апробация результатов исследования По теме диссертации были сделаны доклады на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль (2004 г.), итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса ННГУ "Модели, методы и программные средства" (2007 г.), Всероссийской конференции "Динамические системы, управление и наномеханика" в г. Ижевск (2009 г.), научной конференции по радиофизике РФФ ННГУ в 2003, 2006, 2009, 2010 и 2011 гг.

Также были сделаны доклады на научном семинаре отдела дифференциальных уравнений НИИ прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете (руководитель — проф. Л.П. Шильников), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского (руководитель — проф. А.Д. Морозов), на семинаре кафедры математики ННГУ им. Н.И. Лобачевского (руководитель — доц. А.А. Дубков).

Публикации Всего по теме диссертации автором опубликовано 11 работ в том числе 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации диссертации. Все основные результаты диссертации являются новыми и принадлежат автору. Из работ, выполненных совместно, в диссертацию включены только результаты, полученные автором самостоятельно. В работах, выполненных совместно с Гонченко С.В. и Гонченко В.С. автору принадлежат доказательства всех основных результатов.

Структура диссертации Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации: 141 стр., 26 рис., 74 наименования литературы.

Содержание диссетрации.

Введение содержит описание предмета исследования, историю вопроса и актуальность темы исследования, сформулирована цель работы и приведены основные результаты.

В главе 1 изучаются бифуркации C^r-гладких, $r \geq 4$, диффеоморфизмов, имеющих квадратичные гомоклинические касания к многомерному седлу нейтрального типа (случай 1). Здесь рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ, $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2)$, где μ_1 — параметр расщепления устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки O, μ_2 — параметр, отвечающий за отклонение седловой величины σ от единицы, т. е. $\mu_2 = |\lambda_1\gamma| - 1$.

В параграфе 1.1 приведена постановка задачи и сформулированы основные результаты. Пусть $U = U(O \cup \Gamma_0)$ — достаточно малая фиксированная окрестность замыкания гомоклинической траектории Γ_0. Она представляется в виде объединения малого диска U_0, содержащего точку O, с некоторым числом малых окрестностей тех точек траектории Γ_0, которые не лежат в U_0. Периодическая траектория, целиком лежащая в U, называется однообходной, если она пересекает каждую из окрестностей в множестве $U \backslash U_0$ ровно в одной точке.

Основной задачей здесь является изучение бифуркаций однообходных периодических траекторий из U. Точки таких периодических траектории являются неподвижными точками отображений первого возвращения. Эти отображения строятся в виде суперпозиций двух отображений: локального отображения $T_0(\mu)$, определенного в окрестности U_0 седловой неподвижной точки O диффеоморфизма f_μ, и глобального отображения $T_1(\mu)$, определенного вблизи глобального куска орбиты Γ_0, т.е. $T_1(\mu) = f_\mu^{n_0}$ для некоторого натурального n_0. Тогда однообходной периодической траектории периода $k + n_0$ для всех достаточно больших k отвечает неподвижная точка соответствующего отображения первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$.

Основной результат в случае 1 сформулирован в виде теоремы 1, описывающей структуру бифуркационной диаграммы семейства $f_\mu = f_{\mu_1,\mu_2}$. Здесь $J_1 \neq 0$ — некоторый инвариант глобального отображения.

Теорема 1 [1, 5] *Пусть f_0 удовлетворяет условиям* **A1 - D1**. *Семейство близких к f_0 диффеоморфизмов f_μ имеет на плоскости параметров (μ_1, μ_2) следующие бифуркационные кривые:*

1. Счетное множество бифуркационных кривых L_k^+, L_k^-, накапливающихся к прямой $\mu_1 = 0$ при $k \to \infty$ и отвечающих появлению у однообходных периодических траекторий мультипликаторов $+1$ и -1 соответственно.

2. Если $\lambda_1\gamma > 0$ и $J_1 > 0$, то существует также счетное множество кривых L_k^φ и L_{k2}^φ, стягивающихся к точке $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ при $k \to \infty$ и отвечающих наличию у однообходных и двухобходных периодических траекторий соответственно, пары мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$.

3. Если $\lambda_1\gamma > 0$ и $J_1 < 0$, то существует счетное множество кривых L_{2k-}^φ, стягивающихся к точке $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ при $k \to \infty$ и отвечающих наличию у двухобходных периодических траекторий пары мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$.

4. Если $\lambda_1\gamma < 0$, то f_μ имеет кривые L_k^φ и L_{k2}^φ при $J_1(\lambda_1\gamma)^k > 0$ и кривые L_{2k-}^φ при $J_1(\lambda_1\gamma)^k < 0$.

В параграфе 1.2 строится отображение первого возвращения T_k и доказывается лемма 1 о том, что отображение T_k в определенной области параметров Δ_k имеет асимптотически устойчивое двумерное гладкое инвариантное центральное многообразие W_c^k, в ограничении на которое оно может быть записано в виде обобщенного отображения Эно:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y + o(\lambda_1^k), \\ \bar{Y} &= M_1 - M_2 X - Y^2 + \lambda_1^k RXY + \lambda_1^k SY^3 + o(\lambda_1^k). \end{aligned} \tag{2}$$

При этом, координаты X и Y могут принимать произвольные конечные значения при больших k, кроме того, $M_1 \sim \gamma^{2k}(\mu_1 + \alpha_k)$, $M_2 \sim J_1(\lambda_1\gamma)^k$, где $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Величины R и S — некоторые инварианты глобального отображения. Из данных формул видно, что при варьировании μ_1 и μ_2 вблизи нуля параметры M_1 и M_2 при достаточно больших k могут принимать произвольные конечные значения, более того, M_2 сохраняет при этом свой знак. Мы будем называть случай $M_2 > 0$ "ориентируемым", а $M_2 < 0$ — "неориентируемым". Заметим, что при $\lambda_1\gamma > 0$ знак M_2 не зависит от k, и при всех натуральных $k \geq \bar{k}$ мы будем иметь на

W^k_c только ориентируемые (при $J_1 > 0$) или только неориентируемые (при $J_1 < 0$) случаи. При $\lambda_1\gamma < 0$ знак M_2 зависит от четности k, и, соответственно, ориентируемые и неориентируемые случаи будут чередоваться.

В параграфе 1.3 исследуются бифуркации рождения замкнутой инвариантной кривой в обобщенном отображении Эно для ориентируемого и неориентируемого случаев (леммы 2 и 3). В параграфе 1.4 выводятся уравнения бифуркационных кривых основных бифуркаций в семействе f_{μ_1,μ_2}.

В главе 2 рассматривается случай 2. В параграфе 2.1 приведена постановка задачи. Здесь исследование проводится в рамках трехпараметрического семейства диффеоморфизмов f_μ, $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где μ_1 — параметр расщепления устойчивого и неустойчивого многообразий, μ_2 — параметр, отвечающий за отклонение седловой величины σ от единицы, и μ_3 — комплексный аргумент φ устойчивых мультипликаторов. Задача изучения основных бифуркаций в семействе f_μ ставится аналогично случаю 1, а именно, изучение бифуркаций однообходных периодических траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гомоклинической орбиты.

Основной результат в случае 2 сформулирован в виде теоремы 2:

Теорема 2 [9] *Пусть f_0 удовлетворяет условиям* **A2** - **C2**. *Тогда имеют место следующие утверждения о структуре бифуркационной диаграммы $\mathbb{B}_\delta$ однообходных периодических траекторий семейства f_μ близких к f_0 диффеоморфизмов при достаточно малых $\|\mu\| \leq \delta$.*
1) $\mathbb{B}_\delta$ содержит счетное множество поверхностей L^+_k, L^-_k и L^ψ_k, $k = \bar{k}, \bar{k}{+}1, \ldots$, накапливающихся к плоскости $\mu_1 = 0$ при $k \to +\infty$. Эти бифуркационные поверхности вместе с линиями $B^{+-}_k \subset L^+_k \cap L^-_k$, $B^{++}_k \subset L^+_k \cap L^\psi_k$ и $B^{--}_k \subset L^-_k \cap L^\varphi_k$ определяют границы области устойчивости S_k, т.е. такой открытой области в $\|\mu\| \leq \delta$, при значении μ из которой диффеоморфизм f_μ имеет асимптотически устойчивую однообходную периодическую траекторию периода $k + n_0$.
2) Зона устойчивости S_k имеет форму гребенки, как на рис. 1. При отрицательных μ_2 только поверхности L^+_k и L^-_k являются границами области S_k, которая выглядит как плоский слой толщины порядка

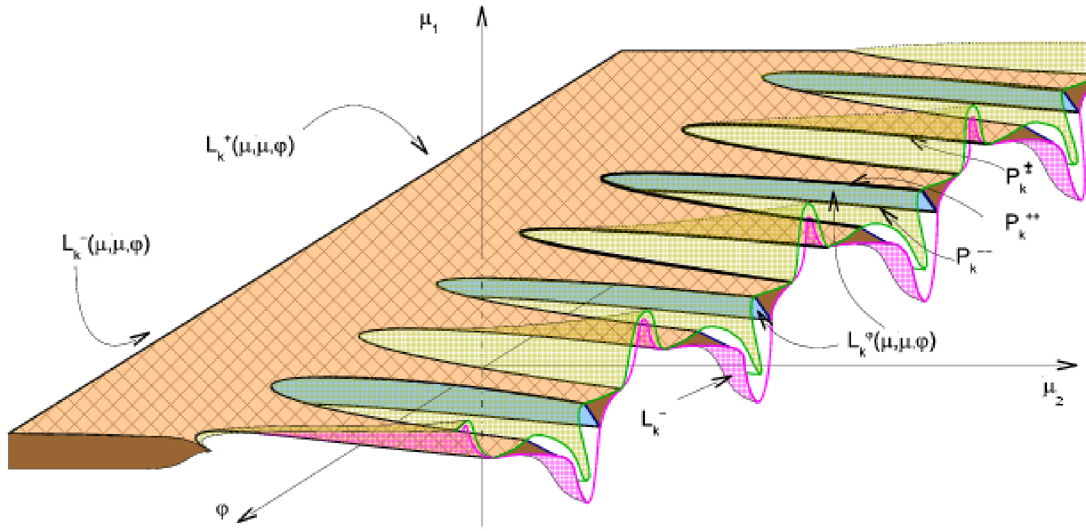

Рис. 1: Вид области устойчивости S_k для неподвижных точек отображения T_k в трехпараметрическом пространстве.

γ^{-2k}, лежащий вблизи плоскости $\mu_1 = \gamma^{-k}y^-$. При приближении к положительным μ_2 возникают новые границы устойчивости – поверхности L_k^ψ с кривыми $B_k^{+-}, B_k^{++}, B_k^{--}$. При этом, множество $S_k \cap \{\mu_2 = const > 0\}$ при любом достаточно большом k состоит из криволинейных треугольников, имеющих размеры порядка $\gamma^{-2k} \times (\lambda\gamma)^{-k}$ на (μ_1, φ)-сечениях) и, расположенных периодически (с периодом $2\pi/k$) вдоль координаты φ, см. рис. 2.

Отображение первого возвращения T_k строится в параграфе 2.2. В параграфе 2.3 формулируется лемма 4 о том, что с помощью аффинных замен координат и параметров отображение T_k может быть приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y + o(1), \\ \bar{Y} &= M_1 - M_2 X - Y^2 + o(1), \\ \bar{Z} &= o(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь координаты X, Y и Z могут принимать произвольные конечные значения, а параметры M_1 и M_2 связаны с исходными следующим образом: $M_1 \sim \gamma^{2k}(\mu_1 + \tau_k)$, $M_2 \sim (1 + \mu_2)^k \cos(k\varphi + \beta)$, где $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$, β — некоторая константа, зависящая от коэффициентов глобального отображения. При варьировании μ_1 вблизи нуля параметр M_1

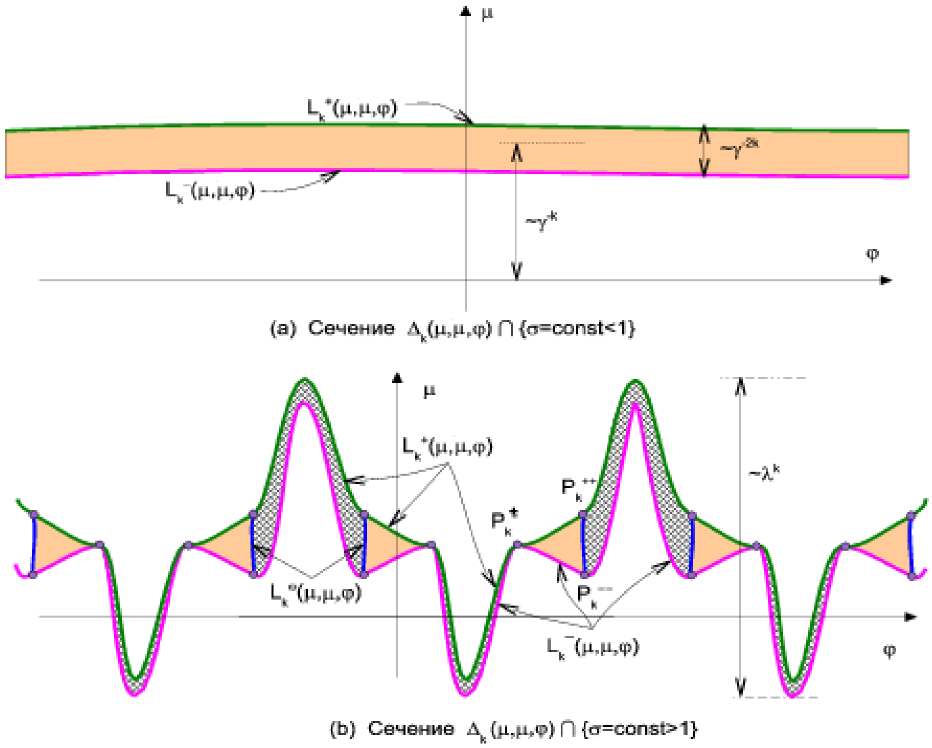

Рис. 2: Сечения области устойчивости при $\sigma < 1$ и $\sigma > 1$.

может принимать произвольные конечные значения. При $\mu_2 > 0$ (т.е. $\sigma > 1$), варьируя φ, можно добиться, чтобы параметр M_2 принимал произвольные конечные значения. Данное отображение, когда M_2 не мало (что возможно только при $\mu_2 > 0$), с точностью до асимптотически малых членов совпадает на некотором центральном многообразии с отображением Эно. Если же $\mu_2 < 0$, то $M_2 \to 0$ при $k \to \infty$, динамика становится одномерной и описывается отображением параболы:

$$\bar{Y} = M_1 - Y^2. \tag{4}$$

Бифуркации отображений Эно и параболы хорошо известны. Что касается устойчивых неподвижных точек, то у отображения параболы она существует при $-1/4 < M_1 < 3/4$, в отображении Эно — при значениях параметров M_1 и M_2, принадлежащих криволинейному треугольнику, ограниченному кривыми L^+, L^- и L^ψ. Поэтому области устойчивости неподвижных точек отображений T_k будут выглядеть по-разному при $\mu_2 < 0$ и $\mu_2 > 0$.

В параграфе 2.4 выводятся уравнения бифуркационных поверхностей семейства f_μ, которые являются границами области существования устойчивых периодических траекторий (лемма 5). В параграфе 2.5 приведено доказательство рескейлинг-леммы 4.

В главе 3 рассматривается случай 3. Здесь в параграфе 3.1 строится трехпараметрическое семейство диффеоморфизмов f_μ, $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где μ_1 — параметр расщепления устойчивого и неустойчивого многообразий, μ_2 — комплексный аргумент устойчивых мультипликаторов одной из неподвижных точек, являющийся Ω-модулем, и μ_3 — параметр, управляющий значениями якобианов в неподвижных точках. Задача в случае 3 ставится следующая: изучение основных бифуркаций однообходных периодических траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гетероклинического контура.

Имеет место следующий результат:

Теорема 3 [4] *В любой окрестности точки $\mu = 0$ в пространстве параметров существуют открытые области $\mathcal{N}$, в которых плотны значения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ такие, что соответствующий диффеоморфизм f_μ имеет счетное множество сосуществующих диких гиперболических аттракторов лоренцевского типа.*

Доказательство теоремы 3 приведено в параграфе 3.2. В параграфе 3.3 доказывается рескейлинг-лемма 6 о том, что отображение первого возвращения T_{kj} в семействе f_{μ_1,μ_2,μ_3} с помощью аффинных преобразований координат и параметров может быть приведено к виду, асимптотически близкому к трехмерному отображению Эно (1). Таким образом, изучение бифуркаций однообходных периодических траекторий в семействе f_μ может быть сведено к изучению бифуркаций неподвижных точек трехмерного отображения Эно (1).

В главе 4 изучен ряд таких бифуркаций в трехмерном отображении Эно (1). В параграфе 4.1 рассматриваются следующие бифуркации коразмерности один: седло-узловая, удвоения периода и рождения замкнутой инвариантной кривой. Для каждой из бифуркаций записаны нормальные формы и вычислены ляпуновские величины. В случае бифуркации рождения замкнутой инвариантной кривой качественно описаны кривые в пространстве параметров, на которых первая ляпуновская величина обращается в нуль.

В параграфе 4.2 исследованы бифуркации коразмерности два, связанные с появлением у неподвижной точки двух единичных мультипликаторов. Соответственно, здесь были исследованы бифуркации, когда неподвижная точка имеет пару мультипликаторов $+1, +1$ (резонанс $1:1$), $-1, -1$ (резонанс $1:2$), или $+1, -1$ (в англоязычной литературе используется термин "fold-flip" для обозначения такой бифуркации). Также были рассмотрены случаи резонансов $1:3$ и $1:4$, когда неподвижная точка имеет пару мультипликаторов $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ и $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ соответственно. Для всех бифуркаций на соответствующем центральном многообразии были вычислены коэффициенты нормальных форм, найдены условия невырожденности и построены локальные бифуркационные диаграммы.

Из многочисленных бифуркаций коразмерности три главное внимание в диссертации (в параграфе 4.3) уделяется только одной, приводящей к появлению в отображении (1) странного аттрактора лоренцевского типа, а именно, случаю, когда отображение (1) имеет неподвижную точку в мультипликаторами $(-1, -1, +1)$ при значениях параметров $(M_1 = -1/4,\ M_2 = 1,\ B = 1)$. В параграфе 4.3.1 сформулирована лемма 8, [2, 3]. о том, что потоковая нормальная форма отображения (1) в окрестности бифуркационной точки имеет вид системы Шимицу-Мариока:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1-z) - \lambda y, \\ \dot{z} &= -\alpha z + x^2, \end{aligned} \tag{5}$$

которая, как известно, обладает аттрактором Лоренца в некоторой области параметров (λ, α), и, следовательно, трехмерное отображение Эно (1) также обладает так называемым диким странным аттрактором лоренцевского типа. Такой аттрактор может быть получен при малых периодических возмущениях автономной системы (5), обладающей аттрактором Лоренца. При этом, также как и исходный аттрактор Лоренца, он не будет содержать устойчивых периодических траекторий, но, в отличие от последнего, будет допускать гомоклинические касания. Доказательство леммы 8 приведено в параграфе 4.3.2.

Основные публикации автора по теме диссетрации.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

[1] *Gonchenko, V.S.* On bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with a homoclinic tangency to a "neutral" saddle fixed point / V.S. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov // *Записки научных семинаров ПОМИ.*— 2003.— Т. 300.— С. 167-172.

[2] *Gonchenko, S.V.* Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors / S.V. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, C. Simó, D.V. Turaev // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.*— 2005.— Vol. 15.— P. 3493-3508.

[3] *Gonchenko, S.V.* Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation / S.V. Gonchenko, J.D. Meiss, I.I. Ovsyannikov // *Regular Chaotic Dyn.*— 2006.— Vol. 11.— P. 191-212.

[4] *Гонченко, С.В.* О бифуркациях трехмерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим седло-фокусы / С.В. Гонченко, И.И. Овсянников // *Нелинейная динамика.*— 2010.— Т. 6, № 1.— С.61-77.

Прочие публикации:

[5] *Гонченко, В.С.* Бифуркация рождения замкнутых инвариантных кривых в обобщённых отображениях Эно / В.С. Гонченко, И.И. Овсянников // *Математика и кибернетика: Сборник научных статей юбилейной научно-технической конференции факультета ВМК ННГУ и НИИ ПМК.*— ННГУ.— 2003.— С. 101-103.

[6] *Овсянников, И.И.* О бифуркациях Андронова-Хопфа точек периода два в обобщенном отображении Эно / И.И. Овсянников // *Труды 7-й научной конференции по радиофизике, посвященной 90-летию со дня рождения В.С. Троицкого.*— ННГУ.— 2003.— С. 275-276.

[7] *Овсянников, И.И.* Изучение бифуркации рождения инвариантного тора в случае гомоклинического касания многообразий трехмерного нейтрального седла / И.И. Овсянников // *Тезисы Международной*

конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.— Суздаль.— 2004.— С. 150-152.

[8] *Овсянников, И.И.* Локальные бифуркации в трехмерном отображении Эно / И.И. Овсянников // *Труды десятой научной конференции по радиофизике, посвященной 90-летию ННГУ и 100-летию со дня рождения Г.С. Горелика.*— ННГУ.— 2006.

[9] *Гонченко, С.В.* О бифуркациях трехмерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к неподвижной точке типа "нейтральный седло-фокус" / С.В. Гонченко, И.И. Овсянников // *Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства".*— ННГУ.— 2007.

[10] *Овсянников, И.И.* Рождение странных аттракторов в системах, имеющих гетероклинический контур с квадратичным касанием / И.И. Овсянников // *Труды тринадцатой научной конференции по радиофизике, посвященной 85-летию со дня рождения М.А.Миллера.* — ННГУ.— 2009.— С. 202-203

[11] *Овсянников, И.И.* Об одной глобальной бифуркации, ведущей к рождению странного аттрактора: случай двух седло-фокусов / И.И. Овсянников // *Тезисы докладов Всероссийской конференции "Динамические системы, управление и наномеханика".*— Ижевск.— 2009.— С.21-22.