

На правах рукописи

Малышев Александр Игоревич

**СЛАБЫЙ КВАНТОВЫЙ ХАОС
В НАНОСТРУКТУРАХ:
ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА**

(01.04.07 – физика конденсированного состояния)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2006 г.

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета ГОУ ВПО “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор *Демиховский Валерий Яковлевич*

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,
профессор *Кузнецов Сергей Петрович*

доктор физико-математических наук,
профессор *Маргулис Виктор Александрович*

Ведущая организация

Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород

Защита состоится 13 декабря 2006 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д212.166.01 при государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского” по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 3 (НИФТИ).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «___» ноября 2006 г.

Отзывы направлять по адресу:
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 3, физический факультет ННГУ

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

А.И. Машин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Изучение явлений квантового хаоса — одна из актуальных проблем теории конденсированного состояния и, в частности, физики микро- и наноструктур. В этой области активно ведутся как теоретические так и экспериментальные исследования. Так, например, необходимо отметить эксперименты с резонаторами различной формы, квантовыми бильярдами и кораллами, опыты с ультрахолодными атомами в магнито-оптических ловушках, атомами водорода в сильном магнитном поле и многими другими системами, так или иначе демонстрирующими хаотическое поведение (см., например, книгу Штокмана [1]).

Активно развивается и теория квантового хаоса: теория случайных матриц или, например, теория периодических орбит Гутцвиллера стали уже широко известны. Одним из значительных достижений, несомненно, можно считать предсказание явления динамической локализации в системах, возбуждаемых внешним переменным полем. Это явление было впервые исследовано в модели квантового ротатора с δ -толчками [2], а совсем недавно был сделан расчет динамической локализации в отклике хаотической системы (квантовой точки) на внешнее излучение [3]. Заметим, что в регулярном случае для расчета линейного отклика используется известная формула Кубо.

В классических гамильтоновских системах динамический хаос связан с разрушением сепаратрис нелинейных резонансов [4]. В случае слабого хаоса нерегулярная динамика имеет место лишь в узких стохастических слоях, образовавшихся на месте сепаратрис. Слабый хаос в квантовых системах первоначально исследовался в рамках модели гармонического осциллятора с толчками [5, 6]. В частности, в работе [6] был исследован эффект подавления квантовой диффузии внутри стохастической паутины, пронизывающей все фазовое пространство. Слабый квантовый хаос также изучался в работах [7, 8], в вырожденной гамильтоновской системе — заряженная частица, движущаяся в постоянном однородном магнитном поле и поле продольной звуковой монохроматической волны. В этой системе, в частности, изучалась квантовая диффузия и локализация состояний на стохастической паутине.

Одним из ярких проявлений слабого хаоса в классических системах является *диффузия Арнольда*, теоретически предсказанная в 1964 г. в работе [9]. Суть этого универсального динамического явления заключается в следующем. В $2N$ -мерном фазовом пространстве резонансы, определяемые соотношением $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}) = 0$, где $\vec{\omega}$ — это набор частот, а вектор \vec{m} имеет целочисленные компоненты, образуют $(2N - 1)$ -мерные поверхности. В то же время КАМ-поверхности являются N -мерными [10]. Для того, чтобы резонансные поверхности не были изолированы друг от друга инвариантными

поверхностями, необходимо чтобы их размерности отличались более чем на единицу, т.е. должно быть $N > 2$. Таким образом, пересечение стохастических слоев различных резонансов является общим свойством систем с числом степеней свободы, бóльшим двух. Пересекаясь друг с другом, резонансы образуют в фазовом пространстве единую всюду плотную “паутину”. Медленно диффундируя вдоль стохастических слоев этой сети, за достаточно долгое время система может уйти от своего начального состояния очень далеко.

Впервые диффузия Арнольда наблюдалась в численных экспериментах Чирикова с сотрудниками [11], а позже подробно, в том числе аналитически, изучалась в многих работах (см., например, обзор [4]). Позднее была замечена связь диффузии Арнольда с задачей динамики трех гравитационно взаимодействующих тел, динамики галактик и движения элементарных частиц в ускорителе (см., например, кн. [12]), а также с задачей о сильно возбужденном атоме водорода, находящемся в скрещенных электрическом и магнитном полях [13]. Диффузия Арнольда для классической частицы, движущейся в трехмерном канале, одна из границ которого промодулирована в двух взаимно перпендикулярных направлениях, рассматривалась в монографии Лихтенберга и Либермана [10].

В работе [14] было проведено квазиклассическое квантование модели диффузии Арнольда, называемой моделью стохастической накачки. При рассмотрении системы, состоящей из двух пар слабосвязанных осцилляторов, которые слабо взаимодействуют друг с другом, авторы показали, что такая квазиклассическая модель полностью эквивалентна задаче о распространении волнового пакета в одномерном случайном потенциале.

Все известные нам исследования диффузии Арнольда имеют в своей основе ее классическую модель. Однако необходимо понять, каково влияние диффузии Арнольда на поведение квантовой системы. Ответ на этот вопрос далеко не тривиален, поскольку ранее предполагалось, что квантовые эффекты могут полностью подавить экспоненциально слабую диффузию даже в квазиклассическом режиме.

С развитием нанотехнологий и общей миниатюризацией современных устройств актуальной задачей является изучение самых разных эффектов квантового хаоса, которые так или иначе могут проявляться в этих системах. Одним из таких интересных эффектов как раз и является квантовая диффузия Арнольда.

Цели и задачи работы

Цель работы состоит в изучении особенностей проявления диффузии Арнольда в квантовых системах на примере двух моделей с 2.5 степенями свободы. В связи с этим в работе решаются следующие задачи:

1. проводится расчет диффузии Арнольда в соответствующих классических системах для того, чтобы сделать возможным сравнение получа-

емых результатов в классической и квантовой областях;

2. определяется область параметров задачи, в которой может иметь место квантовая диффузия Арнольда, — такие значения параметров, при которых с одной стороны обеспечивается стохастичность на резонансах, а с другой стороны соседние резонансы далеки от момента их перекрытия;
3. проводится решение стационарного уравнения Шрёдингера для состояний, отвечающих резонансу связи двух степеней свободы, после чего проводится их классификация и изучение структуры волновых функций и энергетического спектра;
4. проводится решение нестационарного уравнения Шрёдингера для различных начальных условий с целью построения оператора эволюции системы за один период внешнего поля;
5. находятся собственные функции и собственные значения оператора эволюции — квазиэнергетические функции и спектр квазиэнергий, изучаются их свойства с точки зрения проявления в системе слабого квантового хаоса;
6. проводится сравнение диффузии Арнольда в классическом и квантовом случаях, выявляются их сходства и различия;
7. обсуждается механизм динамической локализации, известной ранее для систем с меньшей размерностью, определяются ее параметры.

Научная новизна диссертации

Данная работа является первым исследованием квантовой диффузии Арнольда — особого типа динамики квантовых систем с числом степеней свободы $N > 2$. Такое исследование проводится впервые с использованием чисто квантового языка. В диссертации проведено рассмотрение двух систем с двумя степенями свободы, помещенных во внешнее поле — двумерной квантовой точки и двумерного канала с гофрированной границей. Согласно общепринятой терминологии в таком случае говорят о 2.5 степени свободы. Для указанных систем впервые рассчитан коэффициент квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи. Установлено, что в некоторой области параметров характер его зависимости от интенсивности взаимодействия двух степеней свободы близок к соответствующей классической величине. Выяснено также, что на достаточно больших временах наблюдения квантовая диффузия Арнольда останавливается, что связано с проявлением динамической локализации в системе с $N = 2.5$, в отличие от известной ранее для модели ротатора с δ -толчками [2], где $N = 1.5$. Отмечено, что в условиях, когда в классический стохастический слой резонанса связи попадает лишь несколько квантовых состояний, квантовая

диффузия Арнольда подавляется, что связано с переходом через “границу Шурыяка” [16].

Практическая значимость

Результаты, изложенные в данной работе, являются новыми, оригинальными и важны с точки зрения развития общей теории квантового хаоса. Их анализ может быть полезен для дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований, связанных с поведением мезоскопических систем во внешних полях.

Основные научные положения, выносимые на защиту

1. Впервые аналитически и численно исследовано универсальное явление — квантовая диффузия Арнольда — в двумерных системах, подверженных воздействию внешнего периодического во времени поля. Результаты развитого подхода могут быть использованы для описания мезоскопических систем, находящихся в электромагнитных полях большой амплитуды, т.е. в сильно нелинейных системах.
2. Проведены расчеты для двух мезоскопических систем — двумерной квантовой точки и двумерного канала с гофрированной границей, облучаемых переменным электромагнитным полем. При этом найдены стационарные электронные состояния, построены операторы эволюции систем за период внешнего поля, исследованы квазиэнергетические состояния, а также динамика конкретных начальных условий.
3. В исследованных квазиклассических системах стационарные состояния на резонансах связи имеют следующую структуру. Энергетический спектр представляет собой последовательность групп уровней с внутренней структурой, подобной спектру Матье. Присепаратрисные состояния имеют наибольшую дисперсию распределения в базисах невозмущенных систем.
4. Проведенный анализ распределений электронной плотности для канала с гофрированной границей показал, что состояниям, попавшим в резонанс, можно поставить в соответствие группы классических резонансных траекторий.
5. При анализе временной динамики систем под действием внешнего переменного поля уже на этапе построения оператора эволюции можно отметить более высокую интенсивность переходов между присепаратрисными состояниями различных групп уровней, чем между состояниями, отвечающими центрам резонансов, или слабозвозмущенными состояниями, не попавшими в резонанс.

6. В двух указанных выше моделях рассчитаны коэффициенты квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи для широкого набора параметров систем. Показано, что во всех случаях значения квантового коэффициента диффузии оказываются на один-два порядка ниже классических результатов.
7. Квантовая диффузия Арнольда проявляется в квазиклассической области и в отличие от классической диффузии, имеет порог по амплитуде возмущения. Этот результат напрямую связан с количеством квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя. Квантовая диффузия может проявляться, лишь когда это число много больше единицы. В противном случае квантовые эффекты полностью подавляют диффузионную динамику волновых пакетов.
8. Обнаружен и исследован эффект остановки квантовой диффузии Арнольда через определенный промежуток времени вследствие динамической локализации. Это явление связано с тем, что получаемый в результате расчетов квазиэнергетический спектр системы является дискретным, число эффективно занятых в эволюции квазиэнергетических состояний конечно, а также и с тем, что они имеют конечную величину дисперсии распределения по группам стационарных состояний (вдоль резонанса связи). В данном случае динамическая локализация имеет место в системах с числом степеней свободы $N = 2.5$, в то время как в исследовавшейся ранее модели ротатора с периодическими толчками $N = 1.5$ [2].

Апробация результатов

По результатам исследований, отраженных в диссертации, опубликовано 13 научных работ. Основные положения и результаты докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Progress in Nonlinear Science” (Н. Новгород, 2–6 июля 2001 г.).
2. Всероссийская Школа “Нелинейные волны – 2002” (Н. Новгород, 2–9 марта 2002 г.).
3. Международная конференция “Dynamical Chaos in Classical and Quantum Physics” (ИЯФ им. Г.И. Будкера, Новосибирск, 4–9 августа 2003 г.)
4. Вторая Летняя научная школа ФНП “Династия” (пос. Московский, Моск. обл-ть, 17–21 июля 2005 г.)
5. VI–X Нижегородские сессии молодых ученых (Н. Новгород, 2001–2005 гг.).

Структура диссертации

Диссертация состоит из Введения, трёх Глав, Заключения, Приложения и списка литературы из 56 наименований. Объём диссертации составляет 105 страниц. В диссертации приведено 25 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении рассматривается актуальность работы, формулируются её цели и положения, выносимые на защиту. Обсуждаются методы и подходы к решению поставленных задач, описывается новизна, практическая значимость и апробация работы.

В первой Главе приводится обзор работ, послуживших отправной точкой к исследованиям, изложенным в диссертации. Так в разделе 1.1 кратко излагается теория классической диффузии Арнольда, перечисляются основные модели, на примере которых она изучалась. В разделе 1.2 подробно рассмотрена система из двух взаимодействующих осцилляторов, на один из которых действует внешнее переменное электрическое поле. В обзор вошли результаты работ Чирикова [4], Либермана и Лихтенберга [10] и др. В заключении первой Главы (разд. 1.3) кратко обсуждается физика наноструктур, помещенных во внешнее поле, с точки зрения расчета электромагнитного отклика в условиях слабого хаоса.

Во второй Главе рассматривается динамика электрона в двумерной квантовой точке — квантовом аналоге системы двух взаимодействующих классических осцилляторов, обсуждавшейся ранее в известной работе Чирикова [4]. Соответствующий одноэлектронный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2} + \frac{x^4 + y^4}{4} - \mu xy - f_0 x (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t), \quad (1)$$

где μ и f_0 — малые параметры (там, где отдельно это не оговорено, выполняется соотношение $f_0/\mu = 0.01$).

Заметим, что квантовая точка, имеющая форму квадрата, слегка растянутого вдоль одной диагонали, со сглаженными углами и описываемая уравнением $x^4/4 + y^4/4 - \mu xy = \text{const}$, может быть изготовлена, например, методом электронной литографии. Оценки характерных размеров такой точки вместе с другими параметрами приведены в заключении второй главы.

Раздел 2.1 посвящен нахождению стационарных состояний системы двух взаимодействующих нелинейных осцилляторов (при $f_0 = 0$) с целью изучения структуры квантового резонанса связи. В этом случае волновая функция ищется в виде ряда по функциям невзаимодействующих осцилляторов. Режим резонанса связи соответствует ситуации, когда оба осциллятора находятся на одном энергетическом уровне n_0 , а их частоты равны $\omega_x = \omega_y \equiv \omega$.

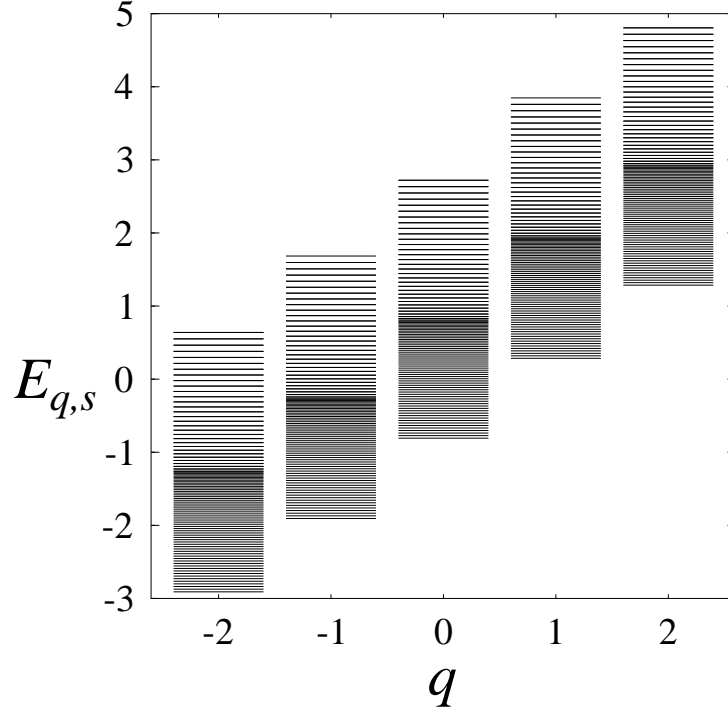


Рис. 1: Фрагмент энергетического спектра системы (1) при $f_0 = 0$ в единицах $\hbar_0\omega$ для $\mu = 10^{-4}$ и $n_0 = 446$. Показаны пять групп по 121 уровню в каждой группе.

Фрагмент энергетического спектра системы двух взаимодействующих осцилляторов показан на рис. 1. Он представляет собой последовательность отдельных групп уровней, каждая из которых подобна спектру Матье [15]: нижние уровни расположены практически эквидистантно, точка сгущения уровней соответствует классической сепаратрису нелинейного резонанса, а уровни, расположенные выше, практически вырождены двукратно и соответствуют классическим “пролетным” состояниям. Расстояние между соседними группами составляет $\hbar_0\omega$ (\hbar_0 — безразмерная постоянная Планка). В соответствии с такой структурой спектра стационарные состояния на резонансе связи удобно характеризовать с помощью номера группы q и номера уровня внутри каждой группы s . В этом случае энергетический спектр системы может быть записан в следующем виде:

$$E_{q,s} = \hbar_0\omega q + E_{q,s}^M, \quad (2)$$

где $E_{q,s}^M$ есть Матье-подобный спектр группы с номером q .

Далее в разделе 2.2 рассмотрено поведение системы двух взаимодействующих осцилляторов при условии, что на один из них действует периодическая во времени сила. Начальные условия были выбраны на резонансе связи и посередине между резонансами x -го осциллятора на частотах Ω_1 , Ω_2 , таким образом, выполнялось равенство $\omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$; частоты внешней силы были выбраны соизмеримыми: $\Omega_1/\Omega_2 = 5/6$.

В частности, п. 2.2.1 посвящен построению оператора эволюции сис-

темы во внешнем поле, что очень удобно в случае, когда гамильтониан зависит от времени периодически [12]. Важно, что такой подход дает возможность изучать эволюцию состояний на больших временах.

Для построения оператора эволюции необходимо решить нестационарное уравнение Шрёдингера для различных начальных условий за один период поля. Этому посвящен п. 2.2.2. Здесь показано, что в резонансном приближении наиболее важными оказываются переходы между состояниями s и s' соседних групп уровней. За интенсивность этих переходов отвечают матричные элементы $x_{q,s;q\pm 1,s'}$. Их анализ показывает, что переходы между присепаратрисными состояниями соседних групп имеют качественно иной характер по сравнению с эволюцией начальных условий на центре резонанса связи или вне его.

Интересно, что анализ свойств квазиэнергетических функций (п. 2.2.3) — собственных функций оператора эволюции — показывает наличие некоторой доли функций, обладающих большой дисперсией распределения по группам состояний спектра. Именно такие функции обеспечивают квантовую диффузию Арнольда вдоль резонанса связи.

Чтобы характеризовать эволюцию состояний во времени, в п. 2.2.4 рассчитано значение дисперсии энергии $\overline{(\Delta H)^2} = \hbar_0^2 \omega^2 \Delta_q^2$, характеризующей протяженность состояния вдоль резонанса связи (по q), как функции времени t , измеряемого в числе периодов внешнего поля N . Здесь Δ_q^2 — дисперсия распределения состояния по группам уровней. На рис. 2 изображена зависимость $\Delta_q^2(N)$ для трех различных начальных условий: кривая (1) соответствует начальному условию в центре резонанса связи, (2) — начальному условию на одном из надсепаратрисных состояний, а кривая (3) — начальному условию, выбранному на одном из сепаратрисных уровней. Данный график указывает на качественное различие между эволюциями во времени данных начальных условий: для под- и надсепаратрисных состояний величина Δ_q^2 квазипериодически осциллирует около некоторого значения, а для состояний на сепаратрисе резонанса связи величина Δ_q^2 после некоторого времени начинает немонотонно, но тем не менее устойчиво, расти. Линейная аппроксимация функции $\overline{(\Delta H)^2}(t)$, указывает на скорость диффузии, т.е. на ее коэффициент.

Рассчитанные классический и квантовый коэффициенты диффузии оказываются близки по порядку величины для одних и тех же значений μ (см. рис. 3), однако в квантовом случае эта величина всегда ниже, чем в классическом. Замечено, что квантовая диффузия Арнольда имеет место лишь при условии, что число энергетических стационарных состояний, попадающих в область классического стохастического слоя, достаточно велико; впервые это было отмечено в работе Шурыка [16]. Так нами обнаружено, что при $\mu > 1.25 \cdot 10^{-4}$ число уровней в сепаратрисной области порядка или больше 10, поэтому можно говорить о квантовой стохастизации. А при $\mu = 3 \cdot 10^{-5}$ уже можно говорить о достижении “границы Шурыка” —

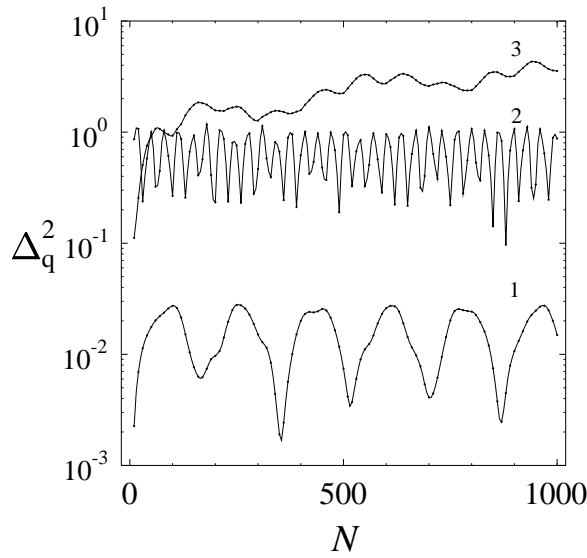


Рис. 2: Зависимость дисперсии энергии Δ_q^2 от времени для $\mu = 1.25 \cdot 10^{-4}$ для различных начальных условий: кривая 1 — начальное условие в центре резонанса связи, 2 — на одном из надсепаратрисных состояний, 3 — вблизи квантовой сепаратрисы резонанса связи.

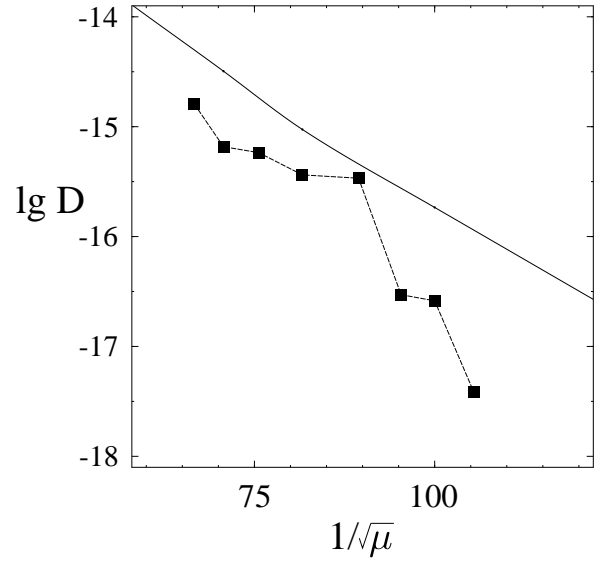


Рис. 3: Значения квантового (прерывистая линия) и классического (сплошная линия) коэффициентов диффузии Арнольда в зависимости от параметра взаимодействия μ .

области значений параметров, при нахождении внутри которой классическое хаотическое движение вдоль резонанса связи полностью подавляется квантовыми эффектами.

Дальнейший анализ (п. 2.2.5) показал, что на временах порядка $t_0 \approx 10^3 T$ диффузионное поведение эволюции прекращается во всей области параметров взаимодействия μ . Вместо этого величина Δ_q^2 начинает осциллировать вокруг некоторого среднего значения $\overline{\Delta_q^2}$. Период этих осцилляций от параметра μ зависит немонотонно, изменяясь от $10^3 T$ до $10^4 T$. Таким образом, в системе проявляется динамическая локализация, подобная андерсеновской локализации в случайном потенциале.

Третья Глава посвящена изучению динамики электрона в двумерном канале, ширина которого периодически меняется (см. рис. 4), помещенном в переменное электрическое поле. Отметим, что структуры подобного типа исследуются и экспериментально (см., например, [17]), и теоретически: работа [18] посвящена классической динамике и транспорту в таком канале, а в работе [19] изучаются низкоэнергетические квантовые состояния.

Раздел 3.1 посвящен изучению классической диффузии Арнольда в описанном канале. В классическом случае в отсутствие внешнего поля в периоды между абсолютно упругими соударениями частица движется прямолинейно, и её динамику удобно изучать с помощью отображений, свя-

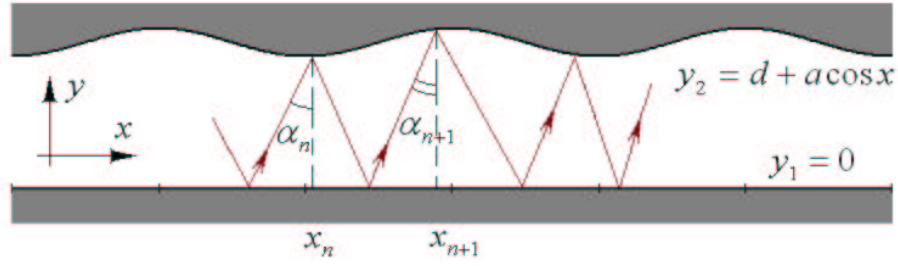


Рис. 4: Пример траектории частицы в двумерном канале с гофрированной границей.

зывающих между собой последовательные значения углов отражения α_n , отмеряемых от вертикали, и координат точек отражения от гофрированной границы x_n :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2 \operatorname{arctg}(a \sin x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \operatorname{tg} \alpha_{n+1} (2d + a(\cos x_n + \cos x_{n+1})), \end{cases} \quad (3)$$

где d — ширина канала, а a — амплитуда гофрировки.

Фазовое пространство системы содержит множество резонансов связи двух степеней свободы, которые характеризуются рациональным соотношением между временем движения поперек канала (туда и обратно) T_y и временем пролета одного периода гофрировки вдоль канала T_x . Для их характеристики используется параметр $\eta = T_x/T_y = \omega_y/\omega_x$.

При помещении всей системы во внешнее поле $V(y, t) = -f_0 y (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)$ становится возможной диффузия Арнольда вдоль резонансов связи. Для того, чтобы обеспечить стохастичность на сепаратрисах отдельных резонансов и в то же время избежать их перекрытия, полагаем выполненным соотношение $a/f_0 = 10^{-3} \ll 1$.

В работе проведен расчет коэффициента классической диффузии Арнольда вдоль резонансов связи $\eta = 1$, $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$.

Раздел 3.2 посвящен решению задачи о нахождении квантовых стационарных состояний внутри канала. Для этого удобно перейти к криволинейным координатам $\tilde{x} = x$ и $\tilde{y} = y/(1 + \epsilon \cos x)$, где $\epsilon = a/d$. При этом границы канала становятся плоскими, а граничные условия простыми: $\psi(\tilde{x}, 0) = \psi(\tilde{x}, d) = 0$. Гамильтониан же приобретает дополнительные слагаемые, зависящие от координат и содержащие операторы дифференцирования [20]. Если амплитуда гофрировки a мала по сравнению с шириной канала d , в уравнении Шрёдингера можно оставить лишь слагаемые первого порядка по ϵ . Таким образом, в нашем случае имеем

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{\epsilon}{2} \left(\cos x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y \cos x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \cos x - \sin x \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее опущен значок “тильда” над координатами \tilde{x} и \tilde{y} , а также

безразмерные эффективная масса и постоянная Планка положены равными единице.

В отсутствие возмущения ($\epsilon = 0$) энергетический спектр системы имеет вид $E_{nm}^0(k) = ((n+k)^2 + \pi^2 m^2/d^2)/2$, где $-\infty < n < \infty$, $m = 1, \dots, \infty$, а k — квазиволновой вектор, изменяющийся в пределах первой зоны Бриллюэна $-1/2 \leq k \leq 1/2$. Волновая функция при этом

$$\psi_{nm}^0(k, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} e^{i(n+k)x} \sin\left(\frac{\pi m y}{d}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим резонанс связи $\eta = 1$, определяемый условием $\omega_{n_0} = \omega_{m_0}$. В квазиклассической области можно принять $\omega_{n_0} \approx n_0$ и $\omega_{m_0} \approx \pi^2 m_0/d^2$. Аналогичное резонансное условие выполняется также и для отрицательных n_0 , когда $-n_0 \approx \pi^2 m_0/d^2$, что соответствует движению частицы в противоположном направлении. Поскольку предполагается $|n| \gg 1$, туннелированием с резонанса с $n > 0$ на парный ему с $n < 0$ можно пренебречь, что позволяет рассматривать их отдельно друг от друга.

Для положительного значения n_0 и $-1/2 < k < 1/2$ (но $k \neq 0$) найдено, что спектр состоит из последовательности групп уровней с Матье-подобной структурой. Эти группы отделены одна от другой на ω_{n_0} . В целом, свойства спектра такие же, что и в системе двух связанных осцилляторов (см. рис. 1 и комментарий к нему), однако уровни, расположенные над точкой сгущения в каждой группе, невырождены даже при нулевой гофрировке.

Состояния с $k = 0$ и $k = \pm 1/2$ не имеют классического аналога, поскольку здесь определяющую роль играет Брэгговское взаимодействие волн, бегущих в противоположных направлениях. В самом деле, в центре и на краях зоны Бриллюэна, где групповая скорость зануляется $\partial E/\partial k = 0$, ряд Фурье для блоховской функции $\psi^k(x, y) = \sum_{n,m} c_{nm}^k \psi_{nm}^0(k, x, y)$ содержит слагаемые с положительными и отрицательными n в равной мере. В результате функция $\psi^k(x, y)$ является либо четной, либо нечетной стоячей волной. В связи с этим спектр системы в этих точках состоит из двух серий групп уровней с Матье-подобной структурой, причем каждая серия уровней характеризуется определенной четностью. При $k = 0$ надсепаратрисные состояния практически вырождены двукратно, что отличает эту точку зоны Бриллюэна от всех остальных.

В соответствии с такой структурой спектра каждое состояние вновь характеризуем двумя индексами — номером группы q и номером состояния внутри группы s : $E_{q,s}(k) = \omega_{n_0}(k)q + E_{q,s}^M(k)$, где $E_{q,s}^M(k)$ есть Матье-подобный спектр группы уровней.

Волновые функции, отвечающие резонансным состояниям, имеют очень интересную и сложную структуру. Для того, чтобы сделать ее более наглядной, в диссертации построены распределения вероятностей для собственных векторов гамильтониана (4) с различными s и $q = 0$ по невозмущенному базису (5), а также распределения плотности вероятности $|\psi_{q,s}^k(x, y)|^2$ для тех же состояний в (x, y) -пространстве. Замечено, что

степень делокализации состояний в невозмущенном базисе возрастает с приближением к сепаратрисе резонанса. В частности, присепаратрисное состояние имеет наиболее широкое распределение. Именно присепаратрисные состояния, как наиболее делокализованные в исходном базисе, обеспечивают наличие в системе слабого хаоса и, в частности, диффузию Арнольда.

Анализ распределения плотности вероятности в (x, y) -пространстве позволяет каждому состоянию внутри резонанса поставить в соответствие группу классических траекторий, начальные условия для которых располагаются на замкнутых кривых, огибающих центр резонанса в фазовом пространстве. Структура распределения плотности вероятности для состояния, взятого из присепаратрисной области, также напоминает классическую неустойчивую траекторию. Распределения плотности вероятности для пары надсепаратрисных состояний практически однородны, что лишь подчеркивает тот факт, что данные состояния являются слабозмущенными. Анализ показал, что те же самые замечания справедливы и для резонансов $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$.

На этапе изучения временной динамики состояний (разд. 3.3) в первую очередь строится оператор эволюции; анализ его структуры указывает на большую интенсивность переходов между присепаратрисными состояниями соседних групп уровней, чем между другими состояниями.

Далее в диссертации рассчитывается коэффициент квантовой диффузии Арнольда D_{1q} для резонанса $\eta = 1$. Рассчитать такие коэффициенты для резонансов $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$ оказалось невозможным, ввиду отсутствия самой диффузии. Оба эти резонанса несколько уже, чем $\eta = 1$, что в квантовом случае приводит к тому, что в резонанс вовлечено всего несколько состояний, отчего число состояний, попадающих в стохастический слой, при наибольшей допустимой амплитуде гофрировки оказывается порядка одного-двух. При большей амплитуде происходит перекрытие этих резонансов с резонансами на частотах Ω_1 и Ω_2 . Таким образом, мы сразу оказываемся на границе Шурыка [16], следовательно, при текущей геометрии канала режим слабого хаоса на данных резонансах практически недостижим: регулярный режим сменяется на полный хаос в крайне узком интервале параметров модели.

Также, как и в модели двух взаимодействующих осцилляторов, величина коэффициента квантовой диффузии D_{1q} оказывается на полтора-два порядка ниже классического результата. Необходимо отметить также, что зависимости D_{1q} и D_1 от величины гофрировки в области $10 < 1/\sqrt{a} < 20$ практически линейны и имеют одинаковый наклон. При $1/\sqrt{a} < 10$ расчет коэффициента квантовой диффузии был крайне затруднен необходимостью учета громадного числа состояний (в виду большой ширины всех рассматриваемых резонансов и близости границы их перекрытия). При $1/\sqrt{a} > 20$ участок линейного роста дисперсии Δ_q^2 отсутствовал. Последнее обстоятельство, очевидно, опять-таки связано с достижением гра-

ницы Шурыяка — в стохастическом слое резонанса оказывается слишком мало квантовых состояний.

В заключении третьей Главы (разд. 3.4) приведены возможные параметры реальной полуметаллической структуры, на примере которой возможно экспериментальное наблюдение квантовой диффузии Арнольда и динамической локализации в электромагнитном отклике. Так, если взять канал шириной $d = 1$ мкм с периодом гофрировки $l = 2$ мкм, то безразмерная величина $a = 0.01$ будет отвечать амплитуде гофрировки порядка 3.2 нм, т.е. в несколько моноатомных слоев. Соответственно для эффективной массы электрона $m \simeq 0.1m_e$ уровень $n_0 = 400$ имеет энергию $E_{n_0} \simeq 0.61$ эВ, а частота перехода между ближайшими уровнями есть $\omega_{n_0}/2\pi \simeq 740$ ГГц. В этих единицах период внешнего поля равняется 1.1×10^{-11} с, а безразмерная амплитуда возмущения $f_0 = 10$ соответствует напряженности электрического поля $E \simeq 0.24$ В/см. Заметим, что для таких параметров время остановки диффузии, равное приблизительно 200 периодам внешнего поля, имеет порядок 2.2 нс. Очевидно, для наблюдения эффекта время жизни электрона должно быть на порядок больше. Последнее условие можно удовлетворить в полуметаллических структурах типа Bi или Sb , где при температуре ~ 1 К длина свободного пробега составляет порядка 1 мм, а время жизни около 10 нс.

В Заключении сформулированы выводы, сделанные по результатам работы:

1. На примере двух двумерных систем, подверженных воздействию внешнего периодического во времени поля — квантовой точки и канала с гофрированной границей — впервые исследовано универсальное динамическое явление — квантовая диффузия Арнольда.
2. Для указанных систем найдены стационарные электронные состояния, построены операторы эволюции систем за период внешнего поля, исследованы квазиэнергетические состояния, а также динамика конкретных начальных условий. Результаты развитого подхода могут быть использованы для описания мезоскопических систем, находящихся в электромагнитных полях большой интенсивности, т.е. в сильно нелинейных системах.
3. Найденные стационарные состояния на резонансах связи в обеих системах имеют следующую структуру. Энергетический спектр представляет собой последовательность групп уровней с внутренней структурой, подобной спектру Матье. Присепаратрисные состояния имеют наибольшую дисперсию распределения в базисах невозмущенных систем.
4. Распределения плотности вероятности состояний, попавших в резонанс, для канала с гофрированной границей имеют структуру, позво-

ляющую поставить им в соответствие группы классических резонансных траекторий.

5. На этапе расчета временной динамики систем под действием внешнего переменного поля анализ матричных элементов оператора эволюции указывает на более высокую интенсивность переходов между присепаратрисными состояниями различных групп уровней, нежели между состояниями, отвечающими центрам резонансов, или слабозвмущенными состояниями, не попавшими в резонанс.
6. Для обеих изучаемых моделей рассчитаны коэффициенты квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи. Показано, что в некотором диапазоне параметров двух систем зависимость коэффициентов квантовой и классической диффузии от параметра, отвечающего за интенсивность взаимодействия двух степеней свободы, носит сходный характер, при этом во всех случаях значения квантового коэффициента диффузии оказываются на один-два порядка ниже классических результатов.
7. Подтверждено, что в отличие от классической диффузии квантовая диффузия Арнольда имеет порог по амплитуде возмущения, т.к. проявляется лишь в квазиклассическом режиме. Этот факт связан с количеством квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя. Квантовая диффузия может проявляться, лишь когда это число много больше единицы. В противном случае квантовые эффекты полностью подавляют диффузионную динамику.
8. Обнаружено также, что квантовая диффузия Арнольда вследствие динамической локализации через определенный промежуток времени останавливается. Явление остановки диффузионного роста дисперсии объясняется тем, что получаемый в результате расчетов квазиэнергетический спектр системы является дискретным, число эффективно занятых в эволюции квазиэнергетических состояний конечно, а также и с тем, что они имеют конечную величину дисперсии распределения по группам стационарных состояний (вдоль резонанса связи). Важно, что в данном случае динамическая локализация проявляется в системах с числом степеней свободы $N = 2.5$, в то время как в случае ротатора с периодическими толчками $N = 1.5$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Штокман Х.-Ю., *Квантовый хаос: Введение*, М., Физматлит, 2004.
- [2] Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M., and Ford J., *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation*, Lect. Notes Phys., **93** // Ed. by G. Casati, J. Ford — Berlin: Springer-Verlag, 1979, p. 334.

- [3] Basko D.M., Skvortsov M.A. and Kravtsov V.E., *Dynamic Localization in Quantum Dots: Analytical Theory*, Phys. Rev. Lett., **90**, 096801 (2003).
- [4] Chirikov B.V., *A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems*, Phys. Rep., **52**, 263 (1979).
- [5] Berman V.Yu., Rubaev A.A., Zaslavsky G.M., *The problem of quantum chaos in a kicked harmonic oscillator*, Nonlinearity, **4**, 543-566 (1991).
- [6] Dana I., *Quantum suppression of diffusion on stochastic web*, Phys. Rev. Lett., **73**, 1609-1612 (1994).
- [7] Demikhovskii V.Ya., Kamenev D.I. and Luna-Acosta G.A., *Quantum weak chaos in a degenerate system*, Phys. Rev. E, **59**, 294 (1999).
- [8] Demikhovskii V.Ya., Kamenev D.I., *Localization of quantum states at the cyclotron resonance*, Phys. Lett. A, **228**, 391 (1997).
- [9] Арнольд В.И., *О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы*, ДАН СССР, **156**, 9 (1964).
- [10] Лихтенберг А., Либман М., *Регулярная и стохастическая динамика*, М., Мир, 1984.
- [11] Gadiyak G.V., Izrailev F.M., Chirikov B.V., *Proc. 7th Int. conf. on nonlinear oscillations*, Berlin, **II-1**, 315 (1975).
- [12] Reichl L.E., *The Transition to Chaos*, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [13] Milczewski J. von, Diercksen G.H.F., Uzer T., *Computation of the Arnol'd Web for the Hydrogen Atom in Crossed Electric and Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett., **76**, 2890 (1996).
- [14] Leitner D.M., Wolynes P.G., *Quantization of the Stochastic Pump Model of Arnold Diffusion*, Phys. Rev. Lett., **79**, 55 (1997).
- [15] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., *Специальные функции*, М., Наука, 1968.
- [16] Шурык Э.В., *Нелинейный резонанс в квантовых системах*, ЖЭТФ, **71**, 2039 (1976).
- [17] Kouwenhoven L.P. *et al.*, *Transport through a finite one-dimensional crystal*, Phys. Rev. Lett., **65**, 361 (1990).
- [18] Luna-Acosta G.A., Na K., Reichl L.E. and Krokhin A.A., *Band structure and quantum Poincare sections of a classically chaotic quantum rippled channel*, Phys. Rev. E, **53**, 3271 (1996).
- [19] Luna-Acosta G.A., Krokhin A.A., Rodriguez M.A., Hernandez-Tejeda P.H., *Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel*, Phys. Rev. B, **54**, 11410 (1996).
- [20] Демиховский В.Я., Потапенко С.Ю., Сатанин А.М., *Электронный спектр в системах с периодически модулированной поверхностью*, ФТП, **17**, 213 (1983).

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Manifestation of Arnol'd Diffusion in Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett., **88**, 154101 (2002); arXiv: [quant-ph/0109147](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0109147).
2. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion in a simple nonlinear system*, Phys. Rev. E, **66**, 036211 (2002); arXiv: [quant-ph/0205062](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205062).
3. Демиховский В.Я., Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля*, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, т. 12, вып. 5, стр. 3, 2004.
4. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion in a rippled waveguide*, Phys. Lett. A, vol. 352, p. 491 (2006); arXiv: [quant-ph/0507254](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0507254).
5. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Nonlinear electron dynamics in a rippled channel with time-dependent electric field: Quantum Arnol'd diffusion*, (направлено в Physica E); arXiv: [cond-mat/0610390](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0610390).
6. Шандор А.С., Малышев А.И., *Распространение луча света в двумерном гофрированном волноводе*, Структура и свойства твердых тел, с. 75: Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 2003.
7. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion*, Proc. of the Int. Conf. "Progress in Nonlinear Science", vol. II, p. 591, 2002.
8. Демиховский В.Я., Малышев А.И., *Диффузия Арнольда в классическом и квантовом пределах*, VI Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2001, стр. 23.
9. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion*, Int. Conf. "Progress in Nonlinear Science": Abstracts, 2001, p. 128.
10. Малышев А.И., *Особенности диффузии Арнольда в квантовых системах*, VII Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2002, стр. 38.
11. Малышев А.И., *Диффузия Арнольда в простой динамической системе*, VIII Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2003, с. 83.
12. Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей*, IX Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2004, стр. 28.
13. Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале переменной толщины*, X Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2005, стр. 31.

Малышев Александр Игоревич

**СЛАБЫЙ КВАНТОВЫЙ ХАОС В НАНОСТРУКТУРАХ:
ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА**

(01.04.07 – физика конденсированного состояния)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать _____ 2006 г. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 1 Заказ № _____ Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского гуманитарного центра
603122, Н.Новгород, ул. Ванеева, 203.
Лицензия ИД №00023 от 14 августа 1999 г.