На правах рукописи

Исаенкова Наталья Викторовна

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМИ БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

НИЖНИЙ НОВГОРОД, 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа Нижегородского государственного педагогического университета им. Козьмы Минина.

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор Жужома Евгений Викторович (г. Нижний Новгород)

Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук, профессор Сатаев Евгений Анатольевич (г. Обнинск Московской обл.)
Кандидат физико-математических наук, доцент Ефремова Людмила Сергеевна (г. Нижний Новгород)

Ведущая организация:
Математический Институт им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук.

Защита диссертации состоится 16 февраля 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского Государственного университета им. Н.И. Лобачевского (603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)
С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского Государственного университета им. Н.И. Лобачевского http://www.unn.ru

Автореферат разослан 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
(В.И. Лукьянов)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Одной из основных задач качественной теории динамических систем является классификация диффеоморфизмов с точностью до (топологической) сопряженности. При решении задачи классификации выделяется класс диффеоморфизмов, внутри которого сперва решается задача топологической эквивалентности (нахождение необходимых и достаточных условий существования гомеоморфизма многообразия, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма, с наличием коммутативной диаграммы отображений) и задача реализации. При этом один из этапов состоит в описании возможных инвариантных множеств, определяющих динамику диффеоморфизмов из рассматриваемого класса. Благодаря работам Аносова Д.В.[1], Плыкина Р.В.[2], Смейла С.[3] и др. было установлено, что даже у структурно устойчивых (грубых) диффеоморфизмов могут быть сложно устроенные, с топологической точки зрения, инвариантные множества. Одним из первых примеров таких множеств является соленоид.

Соленоиды изучаются в таких разделах математики как топология, теория групп и теория динамических систем. Как инвариантное множество динамической системы соленоид впервые появился в книге "Качественная Теория Дифференциальных Уравнений" Немыцкого В.В. и Степанова В.В. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды были введены Смейлом С., который построил несколько (ставших уже, классическими) примеров структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов с притягивающими инвариантными множествами (растягивающимися аттракторами). Напомним, что основы гиперболической теории были заложены в работах Аносова Д.В., Синая Я.Г., Смейла С. и др. и восходят к работе Андронова А.А., Понтрягина Л.С. [4] о грубых потоках на плоской области.

Соленоид впервые был введен Виеторисом[5] в 1927 году, как пример однородного множества, для которого была не применима стандартная теория гомологий и когомологий. Однородность означает, что локальная структура соленоида одинакова во всех точках соленоида. Известно, что *соленоидом* называется множество, которое можно представить в виде

[1] **Аносов Д.В.** Геодезические потоки на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. института им. В.А.Стеклова. - 1967. - Т. XC.

[2] **Плыкин Р.В.** Источники и стоки А - диффеоморфизмов поверхостей // Матем. сб. - 1974. - Т. 94, № 2.

[3] **Smale S.** Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. - 1967. - V. 73. - P. 747-817.

[4] **Андронов А.А., Понтрягин Л.С.** Грубые системы // Докл. А.Н. СССР. - 1937. - Т. 17, № 5. - С. 247-250.

[5] **Vietoris L.** Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen // Math. Ann. - 1927. - V. 97. - P. 454-472.

пересечения последовательности полноторий $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{B}_i \supset \ldots$, таких, что для любого $i \geq 1$ ось полнотория $\mathcal{B}_{i+1}$ обходит $n_i \geq 2$ раз ось полнотория $\mathcal{B}_i$, не образуя крюков. Нетрудно видеть, что соленоид является множеством канторовского типа (совершенным, нигде не плотным), связным и вполне разрывным континуумом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество. Топологическая размерность соленоида равна единице. Развитие понятий гомологии и когомологии для таких множеств, как соленоид, привело в дальнейшем к известным понятиям гомологии и когомологии Чеха.

Независимо в 1930 году Ван Данциг[6] ввел понятие соленоида, в виде компактной абелевой топологической группы. Наиболее общее теоретико-множественное определение соленоида было дано в 60-х гг. XXв. Бингом который доказал, что соленоид представляет собой неразложимым континуум, не вкладывающийся в поверхность.

Как объект теории динамических систем в 40-х гг. XXв. соленоид появился в книге В.В.Немыцкого, В.В.Степанова "Качественная теория дифференциальных уравнений". Авторы построили пример потока на полнотории с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Полученное минимальное множество являлось соленоидом. Итта Кан[7] рассматривал потоки на полнотории $D^2 \times S^1$, трансверсальные границе полнотория и всем дискам $D^2 \times t$, где $t \in S^1$. Автор описал все возможные типы минимальных множеств, среди которых был и соленоид.

В современную теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл. Он построил пример диффеоморфизма полнотория в себя вида:

$$f(\varphi, x_1, x_2) = \left(2\varphi, \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{2}\cos\varphi, \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{2}\sin\varphi\right).$$

Смейл доказал, что данный диффеоморфизм имеет притягивающее инвариантное множество $ST \bigcap f(ST) \bigcap f^2(ST) \bigcap \ldots = \bigcap f^i(ST)$, где $ST = S^1 \times D^2$, гомеоморфное соленоиду с гиперболической структурой. Первым обобщением данного примера была конструкция Р. Вильямса[8], который рассматривал обобщенные соленоиды и получил их внутреннюю классификацию. Это означает, что Вильямс получил необходимое и достаточное условие сопряженности ограничений двух диффеоморфизмов

[6]**van Danzig D.** Über topologisch homogene Kontinua // Fund. Math. - 1930. - V. 14. - P. 102-105.

[7]**Ittai Kan.** Strange attractors of uniform flows // Trans. of Amer. Math. Soc. - 1986. - V. 293. - P. 135-159.

[8]**Williams R.F.** One-dimensional non-wandering sets // Topology. - 1967. - V. 6. - P. 473-487.; Classification of subshifts of finite type // Annals of Math. - 1973. - V. 9. - P. 8120-153.; Expanding attractors // Publ. Math. I.H.E.S. - 1974. - V. 43. - P. 169-203.

на их одномерные растягивающиеся аттракторы, гомеоморфные соленоиду.

Важный класс обобщенных соленоидов составляют одномерные растягивающиеся аттракторы на двумерных поверхностях. Внешняя классификация таких аттракторов произведена Плыкиным Р.В.[9], Гринесом В.З.[10] и их учениками. Одномерные растягивающиеся аттракторы на трехмерных многообразиях изучались немецким математиком Боте[11]. В частности им изучалось локальное вложение аттрактора в многообразие, и рассматривались вопросы продолжения диффеоморфизма с трехмерного полнотория на замкнутые трехмерные многообразия. Инвариантные соленоидальные множества естественным образом возникают в бифуркациях многомерных динамических систем с непрерывным временем, связанных с разрушением седлоузловых предельных циклов. Открытие и изучение подобных бифуркаций было получено в работах Шильникова Л.П., Ильяшенко Ю.С.[12] и их учеников.

Цель работы. Цель настоящей работы состоит:

1. Изучить класс диффеоморфизмов с инвариантными соленоидальными множествами, который включает в себя классический пример Смейла с соленоидальным растягивающимся аттрактором, и описать все возможные типы инвариантных (базисных) множеств.

2. Получить необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов на базовых многообразиях.

3. Построить примеры демонстрирующие разницу между внутренней классификацией и окрестностной классификацией.

Методы исследования. В диссертации используются методы геометрической теории динамических систем, символической динамики и топологии.

Научная новизна. Основные результаты работы новые, именно:

---

[9]**Плыкин Р.В.** О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // Успехи мат. наук. - 1980. - Т. 35, № 3. - С. 94-104.

[10]**Гринес В.З.** О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I (II). Труды ММО. 1975. Т. 32, 35-61 (Труды ММО. 1977. Т. 34, 243-252).; Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports. J. Math. Sci. 1999. V. 95, No. 5, 2523-2545.

[11]**Bothe H.** The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods // Math. Nachr. - 1982. - V. 107. - P. 327-348.; The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds // Math. Nachr. - 1983. - V. 112. - P. 69-102.

[12]**Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.** Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНИТИ РАН, 1986. - Т. 5. - 5-218 с.

1. Изучен класс диффеоморфизмов с инвариантными соленоидальными множествами. Показано, что неблуждающее множество таких диффеоморфизмов, принадлежащее базовому многообразию, содержит ровно одно нетривиальное базисное множество, которое есть либо одномерный растягивающийся аттрактор, либо нульмерное базисное множество. Доказано, что обе возможности реализуются.

2. Получено необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов с инвариантными соленоидальными множествами на базовых многообразиях.

3. Сделана классификация d-накрытий степени $d \geq 2$ окружности с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Как следствие получена классификация неособых эндоморфизмов, включая важный класс структурно устойчивых эндоморфизмов.

4. Показано, что из внутренней классификации соленоидальных базисных множеств не следует окрестностная классификация.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях, связанных с изучением структуры инвариантных множеств, диффеоморфизмов, солениодов, базисных множеств.

Апробация полученных результатов. Основные результаты были представлены на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция "Lamination and Group Actions in Dynamics", МЦНМО Независимый Московский университет, г. Москва, 19-23 февраля 2007г.

2. Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 30 марта - 2 апреля 2009 г.

3. III всероссийская молодежная научно - инновационная школа "Математика и Математическое Моделирование", г. Саров, Саровский физико - технический институт - филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 20-23 апреля 2009 г.

4. IV всероссийская молодежная научно - инновационная школа "Математика и Математическое Моделирование", г. Саров, Саровский

физико-технический институт - филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ" , г. Саров, 19-22 апреля 2010 г.

5. Международная математическая конференция "Математика и динамические системы" , г. Суздаль, 2–7 июля 2010 г.

6. Международная конференция "Дифференциальные вопросы и смежные вопросы" , посвящённая 110-летию со дня рождения И. Г. Петровского, МГУ им. М.В. Ломоносова и Математический Институт РАН им. В.А. Стеклова, г. Москва, 29 мая - 4 июня 2011 г.

7. Международная конференция "Потоки на поверхностях, символическая динамика и динамика в пространствах модулей" , посвящённая 75-летию Д. В. Аносова, МЦНМО Независимый Московский университет, г. Москва, 5-9 декабря 2011 г.

По теме диссертации были также сделаны доклады на следующих семинарах:

1. Научный семинар отдела дифференциальных уравнений Математического института им. В.А. Стеклова РАН (2011 г., руководители академик Д. В. Аносов, проф. А.И.Буфетов).

2. Научный семинар кафедры численного и функционального анализа факультета ВМК Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2009 г., 2011 г., руководитель проф. В. З. Гринес).

3. Научный семинар отдела дифференциальных уравнений НИИ прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете (2009 г., руководитель проф. Л. П. Шильников).

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем работы 116 страниц, количество рисунков - 27, наименований литературы - 71. Основные утверждения диссертации составляют теоремы 1 - 6.

Публикации. Всего по теме диссертации автором опубликовано 9 работ, из них 2 - в изданиях, рекомендованных ВАК (см. список публикаций ниже). Все основные результаты диссертации являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно, автору диссертации принадлежат доказательства всех основных результатов, Е. В. Жужоме принадлежит постановка задачи и общее руководство.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Во введении приводится обоснование работы, ее актуальность, научная новизна и практическая ценность, представлена структура диссертации и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации подробно изучаются диффеоморфизмы, являющиеся обобщением конструкции Смейла и получившие в дальнейшем название диффеоморфизмов класса SV[13].

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого n-многообразия M^n принадлежит классу SV, если существует вложенное в M^n *базовое многообразие* $\mathcal{B}^n = S^1 \times D^{n-1}$ такое, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^n} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^n \to F(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{B}^n$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t,z) = (g(t), w(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{1}$$
где $g : S^1 \to S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;
- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^{n-1}} : \{t\} \times D^{n-1} \to \mathcal{B}^n$ является равномерно сжимающим C^1 вложением
$$\{t\} \times D^{n-1} \to int\left(\{g(t)\} \times D^{n-1}\right) \tag{2}$$
т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что
$$diam\ (F^k(\{t\} \times D^{n-1})) \leq C\lambda^k diam\ (\{t\} \times D^{n-1}),\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Рассмотрим $F \in SV$, тогда пересечение $\cap_{k\geq 0} F^k(\mathcal{B}^n) \stackrel{\text{def}}{=} Sol\ (F)$ является соленоидом.

Главным результатом этой главы является изучение динамики диффеоморфизмов SV, сосредоточенной на базовом многообразии. Описание неблуждающего множества и возможных базисных множеств представлено в следующей теореме:

Теорема 1 *Пусть $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм из класса SV замкнутого n-многообразия M^n. Тогда*

1. *Ограничение $f|_{Sol\ (F)}$ сопряжено обратному пределу отображения g.*
2. *Неблуждающее множество содержит ровно одно нетривиальное базисное множество $\Lambda(F)$, которое есть либо*

[13] Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale, Vietoris

- *одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда* $\Lambda(F) = Sol\ (F)$*, либо*

- *нульмерное базисное множество, и тогда* $NW(F)$ *состоит из* $\Lambda(F)$*, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.*

Обе возможности реализуются.

Очень важной для решения задачи, посвященной построению обратного предела отображения g, является лемма, где строится символическая модель ограничения отображения F на соленоид $Sol\ (F)$.

Лемма 1 *Каждой точке* $p \in Sol\ (F)$ *соответствует единственная последовательность точек* $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$, *и соответствующая последовательность замкнутых* n*–мерных дисков* $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ *таких, что*

- $p \in \cdots \subset D_i \subset \cdots \subset D_0,\ \ p = \cap_{i\geq 0} D_i;$

- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Обозначим $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией, где $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ - множество целых неотрицательных чисел. Точками множества $\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i \in S_i^1$.

Пусть $\prod_g$ подмножество множества $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на $\prod_g$ индуцируется топологией на $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. Определим на $\prod_g$ отображение $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$, положив

$$\hat{g}\left(\{t_0, \ldots, t_i, \ldots\}\right) = \{g(t_0), t_0, \ldots, t_i \ldots\}.$$

Пространство $\prod_g$ с отображением $\hat{g}$ называется *обратным пределом преобразования* g.

Рассмотрим отображение $\theta : Sol\ (F) \to \prod_g$, действующее по правилу $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$.

Лемма 2 *Отображение* θ *является гомеоморфизмом таким, что* $\theta \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{g} \circ \theta$.

Для того чтобы понять как устроено неблуждающее множество диффеоморфизмов SV необходимо рассмотреть неблуждающее множество отображения $\hat{g}$, являющегося обратным пределом неособого эндоморфизма окружности g. Поэтому особое внимание уделяется изучению неблуждающего множества таких эндоморфизмов.

Пусть $g : S^1 \to S^1$ – неособый эндоморфизм степени $d \geq 2$. Рассмотрим непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение $h : S^1 \to h(S^1) = S^1$. Из результата Шуба следует равенство $h \circ g = E_d \circ h$, где $E_d : S^1 \to S^1$ – линейный растягивающий эндоморфизм степени $d \geq 2$.

Обозначим через Σ° подмножество таких $x \in S^1$, что $h^{-1}(h(x))$ – одна точка. Множество $S^1 \setminus \Sigma^\circ$ представляет собой объединение попарно непересекающихся замкнутых интервалов. $S^1 \setminus \Sigma^\circ = \cup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$, причем можно считать, что $h^{-1}(h[a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$, при $i \neq j$. Интервалы $[a_i, b_i]$ называются *смежными*. Соответствующие открытые интервалы (a_i, b_i) - *открытыми смежными*. Смежный интервал $[a, b]$ называется *периодическим*, если $g^k([a, b]) = [a, b]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками.

Обозначим через Σ_g объединение Σ° со всеми концевыми точками a_i, b_i смежных интервалов множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$, $\Sigma_g = \Sigma^\circ \bigcup_{i \geq 1} (\{a_i\} \cup \{b_i\})$.

Если g – транзитивный эндоморфизм, то $NW(g) = S^1$. Когда g – нетранзитивный, то $NW(g) \neq S^1$. Следующая лемма описывает неблуждающее множество таких эндоморфизмов.

Лемма 3 *Пусть $g : S^1 \to S^1$ – неособый и нетранзитивный эндоморфизм степени $d \geq 2$. Тогда его неблуждающее множество $NW(g)$ есть объединение Σ_g со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.*

Доказательство второй части теоремы, где изучается неблуждающее множество диффеоморфизмов класса SV, принадлежащее базовому многообразию, основывается на нижеследующих леммах.

Лемма 4 *Имеет место включение*

$$NW(F) \subset Sol\ (F) \cap p_1^{-1}\left[NW(g)\right],$$

где $p_1 : S^1 \times D^{n-1} \to S^1$ – естественная проекция.

Лемма 5 *Пусть $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ удовлетворяет условиям (1)-(3). Тогда*

1. *$p_1^{-1}(\Sigma_g) \cap Sol\ (F) \subset NW(F)$.*
2. *Если эндоморфизм g нетранзитивный и $[a; b]$ – периодический смежный интервал минимального периода $l \geq 1$, то*

- *для любой периодической точки* $t_0 \in (a;b)$ *пересечение* $D^{n-1}_{t_0} \cap NW(F)$ *состоит из одной периодической точки* (t_0, z_0) *минимального периода* l*; при этом, если* t_0 *– изолированная в* $NW(g)$*, то точка* (t_0, z_0) *изолированная в* $NW(F)$*, а если* t_0 *– не изолированная в* $NW(g)$*, то* (t_0, z_0) *не изолированная в* $NW(F)$*;*
- *пересечение* $(int\ D^{n-1}_{ab}) \cap NW(F)$ *состоит из периодических точек периода* l*.*

Лемма 6 *Пусть* $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ *удовлетворяет условиям (1)-(3), и эндоморфизм* g *нетранзитивный. Тогда пересечение* $(int\ D^{n-1}_{ab}) \cap NW(F)$ *для любого периодического смежного интервала* $[a, b]$ *состоит из конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.*

Также в этой главе рассматриваются топологические свойства несущих многообразий. Следующая теорема описывает топологическую структуру 3 - многообразий, допускающих SV диффеоморфизмы. В этом случае базовое многообразие $\mathcal{B}^3 = S^1 \times D^2$, в силу конструкции, будем называть *базовым полноторием.*

Теорема 2 *Пусть* $f : M^3 \to M^3$ *– диффеоморфизм из класса* SV *замкнутого 3-многообразия* M^3*. Тогда* M^3 *можно представить в виде связной суммы* $M^3 = L_{p,q} \# M_1$ *линзы* $L_{p,q}$*,* $p \geq 1$*, и некоторого 3-многообразия* M_1*. Более того, существует 3-шар* $B \subset L_{p,q}$ *такой, что* $L_{p,q} \setminus B \subset M^3$ *и базовый полноторий принадлежит* $L_{p,q} \setminus B$*. На любой линзе* $L_{p,q}$*,* $p \geq 1$*, существует диффеоморфизм* $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$ *из класса* SV*.*

Как будет показано ниже, из внутренней классификации соленоидальных базисных множеств не следует окрестностная классификация. Если рассматривать эту задачу в обратном порядке, то смысл становится более понятным, то есть из окрестностной классификации внутренняя классификация следует. Вильямсом получена только внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы, окрестностная классификация соленоидальных базисных множеств, заданных на многообразиях размерности не менее трех, до настоящего времени изучена не полностью.

Во второй главе диссертации для диффеоморфизмов SV, являющихся обобщением конструкции Смейла, получено необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов класса SV на базовых многообразиях, что является частичным решение задачи классификации диффеоморфизмов, задача реализации здесь не рассматривается. Одним из необходимых условий сопряженности SV-диффеоморфизмов выступает сопряженность соответствующих неособых эндоморфизмов окружности.

Важным результатом в этой главе является классификация d-накрытий окружности степени $d \geq 2$ с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов.

d-накрытия окружности S^1 - сюрьективные локальные гомеоморфизмы $S^1 \to S^1$ степени $|d| \geq 2$. Эти отображения образуют более широкий класс эндоморфизмов. Показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d. Как следствие, была получена классификация неособых эндоморфизмов, включая важный класс структурно устойчивых эндоморфизмов.

Обозначим через γ_j жесткий поворот окружности вида $x \to x + \frac{j}{d-1} (\mathrm{mod}\ 1)$, где $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Рассмотрим два отмеченных множества $\Xi_{g_i} = \{x \in S^1 : h_i^{-1}(x) - \text{нетривиальный интервал}\}$, $i = 1, 2$ d-накрытий g_1 и g_2 соответственно. Будем говорить, что Ξ_{g_1} и Ξ_{g_2} *d-эквивалентны*, пишется $\Xi_{g_1} \equiv_d \Xi_{g_2}$, если $\gamma_j(\Xi_{g_1}) = \Xi_{g_2}$ для некоторого γ_j. Поставим в соответствие точке x множество $Per\ (g|_{h^{-1}(x)}) \stackrel{\text{def}}{=} P_x$ периодических точек d-накрытия g, принадлежащих $h^{-1}(x)$. Совокупность множеств P_x, где $x \in \Xi_g \cap Per\ (E_d)$ пробегает все периодические отмеченные точки и называется *схемой d-накрытия g*.

Предположим, что отмеченные множества d-накрытий g_1, g_2 d-эквивалентны, то есть $\gamma_j(\Xi_{g_1}) = \Xi_{g_2}$ для некоторого γ_j. Схемы d-накрытий g_1, g_2 *изоморфны*, если для каждой периодической отмеченной точки $x \in \Xi_1$ существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\mu_x : h_1^{-1}(x) \to h_2^{-1}(\gamma_j(x))$, переводящий P_x в $P_{\gamma_j(x)}$ и сохраняющий тип монотонности на интервалах, дополнительных к P_x. *Сохранение типа монотонности* на интервалах (α, β) и $(\mu_x(\alpha), \mu_x(\beta))$ означает, что $[g_1(x_1) - x_1][g_2(x_2) - x_2] > 0$ для любых точек $x_1 \in (\alpha, \beta)$, $x_2 \in (\mu_x(\alpha), \mu_x(\beta))$. При этом интервал $(\alpha, \beta) \subset h^{-1}(x) \backslash Per\ (g_1)$ является периодическим интервалом d-накрытия g, не содержащим периодические точки g и $\alpha, \beta \in Per\ (g_1)$, а интервал $(\mu_x(\alpha), \mu_x(\beta)) \subset h_2^{-1}(\gamma_j(x)) \backslash Per\ (g_2)$, где $\mu_x(\alpha), \mu_x(\beta) \in Per\ (g_2)$.

Сформулируем теорему, где получена классификация d-накрытий окружности степени $d \geq 2$ с точностью до сопряженности и показано, что отмеченное множество d-накрытия определяется с точностью до поворота γ_j.

Теорема 3 *Пусть g_1, $g_2 : S^1 \to S^1$ – d-накрытия окружности степени $d \geq 2$, не сопряженные E_d. Тогда g_1 сопряжено с g_2 тогда и только тогда, когда их отмеченные множества d-эквивалентны ($\Xi_{g_1} \equiv_d \Xi_{g_2}$), а их схемы изоморфны.*

Следующее следствие применяется для классификации нульмерных соленоидальных базисных множеств.

Следствие 1 *Пусть g_1, $g_2 : S^1 \to S^1$ – d-накрытия, $d \geq 2$, не сопряженные E_d. Предположим, что внутри периодических смежных интервалов этих эндоморфизмов нет периодических точек. Тогда g_1 сопряжено с g_2 тогда и только тогда, когда их отмеченные множества d-эквивалентны, $\Xi_{g_1} \equiv_d \Xi_{g_2}$.*

Следствие 2 *Пусть g_1, $g_2 : S^1 \to S^1$ – неособые структурно устойчивые C^1 эндоморфизмы окружности степени $d \geq 2$, не сопряженные E_d. Предположим, что внутри периодических смежных интервалов этих эндоморфизмов лежит одинаковое число периодических точек. Тогда g_1 сопряжено с g_2 тогда и только тогда, когда отмеченные множества этих эндоморфизмов d-эквивалентны, $\Xi_{g_1} \equiv_d \Xi_{g_2}$.*

Возьмем два диффеоморфизма $F_1 : \mathcal{B}_1^n \to \mathcal{B}_1^n$ и $F_2 : \mathcal{B}_2^n \to \mathcal{B}_2^n$, принадлежащих классу SV таких, что $F_1(t,z) = (g_1(t), w_1(t,z))$, и $F_2(t,z) = (g_2(t), w_2(t,z))$, $\quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}$. В нижеследующей теореме получено необходимое условие существования гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы F_1 и F_2 класса SV на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$. Она является важным этапом для решении задачи классификации SV-диффеоморфизмов.

Теорема 4 *Если SV-диффеоморфизмы F_1 и F_2 сопряжены на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$, тогда существует гомеоморфизм*

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus intF_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus intF_2(\mathcal{B}_2^n)$$

такой, что выполняются следующие условия:

- ψ_* *имеет вид:*

$$\psi_*(t,z) = (\psi(t), w_*(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1},$$

- $\psi : S^1 \to S^1$ *сопрягает эндоморфизмы g_1 и g_2, т.е. выполняются равенство*

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1$$

Третья глава посвящена изучению внутренней и окрестностной классификации одномерных растягивающихся аттракторов. Итак, пусть Λ_f, Λ_g инвариантные множества преобразований $f : M \to M$, $g : N \to N$ соответственно. Ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ называются *внутренне сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : \Lambda_f \to \Lambda_g$, такой, что $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$. Если φ можно продолжить до гомеоморфизма $\varphi : M \to N$ или $\varphi : U(\Lambda_f) \to U(\Lambda_g)$, где $U(\Lambda_f)$, $U(\Lambda_g)$ некоторые окрестности множеств Λ_f, Λ_g соответственно, сохранив соотношение $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$, то $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ называются *окрестностно сопряженными.* Из окрестностной сопряженности следует внутренняя сопряженность. Вильямс в своих работах получил внутреннюю классификацию ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы.

В свою очередь, внутренняя классификация не всегда влечет окрестностную, так, например, Робинсоном и Вильямсом были построены два диффеоморфизма $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ пятимерных компактных многообразий M, N в себя с двумерными растягивающимися аттракторами Λ_f, Λ_g такими, что $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены. Что касается других размерностей, то этот вопрос до настоящего времени оставался открытым.

Главным результатом третьей главы является теорема:

Теорема 5 *Существуют четырехмерные компактные многообразия M, N и диффеоморфизмы $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ с одномерными растягивающими аттракторами Λ_f, Λ_g соответственно такие, что ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.*

Для доказательства этого факта сперва строится общая конструкция диффеоморфизма F с одномерным растягивающимся аттрактором $Sol(F)$, а затем приводятся примеры диффеоморфизмов f, g в рамках этой конструкции.

Пусть $M^n = M$ - компактное гладкое n-многообразие с непустым краем, наделенное римановой структурой. Рассмотрим гомотопную тождественному периодическую изометрию $R : M \to M$ такую, что

$$R^k \equiv id, \quad k \geq 2, \quad DR^i = id, \quad i \geq 1.$$

Пусть $e : M \to e(M) \subset M$ - гладкое вложение M в себя, являющееся равномерно сжимающим отображением $e(M) \subset int\ M$, т.е. существует $0 < \lambda < 1$ такое, что

$$diam\ (e^n(M)) \leq \lambda^n \cdot diam\ (M)$$

и множества

$$e(M), R\left(e(M)\right), \ldots, R^{k-1}\left(e(M)\right) \quad \text{попарно не пересекаются.}$$

Определим отображение $f_i : [\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}] \times M \to [0;1] \times M$, $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, положив

$$f_i(t,z) = \left(kt - i, R^i \circ e(z)\right), \quad t \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right], \quad z \in M.$$

Рассмотрим M_1 – фактор-многообразие, получаемое из прямого произведения $[0;1] \times M$ отождествлением точек $(1,z)$, $(0, R(z))$,

$$M_1 = [0;1] \times M / \left((1,z) \simeq (0, R(z))\right), z \in M.$$

Тогда получаем

$$f_i\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (1, R^i \circ e(z)),$$

$$f_{i+1}\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (0, R^{i+1} \circ e(z)) \simeq (1, R^i \circ e(z)).$$

Совокупность отображений $f_0, \ldots, f_{k-1}$ порождает отображение $F : M_1 \to M_1$, которое является гомеоморфизмом на свой образ, $M_1 \to F(M_1) \subset M_1$. Так как R гомотопно тождественному, то M_1 гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times M$.

Поскольку $DR^i \circ e(z) = DR(R^{i-1} \circ e(z)) \cdot \ldots \cdot DR \circ e(z) \cdot De(z) = De(z)$, получаем $Df_i(t,z) = Df_{i+1}(t,z) = (k, De(z))$. Таким образом, F является диффеоморфизмом на свой образ, и дифференциал DF сохраняет естественное разложение $T(M_1) = T(S^1 \times M) = T(S^1) \oplus T(M)$.

Так как включение $F(M_1) \subset M_1$ собственное, отображение $M_1 \to F(M_1)$ является диффеоморфизмом на свой образ, то получаем цепочку последовательно вложенных множеств

$$\cdots \subset \mathcal{N}_{j+1} \subset \mathcal{N}_j \subset \cdots \subset \mathcal{N}_1 \subset M_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_j = \bigcap_{i=0}^{j} F^i(M_1).$$

Рассмотрим множество $Sol(F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \geq 0} F^i(M_1)$, локальная структура которого описана следующей леммой:

Лемма 7 *Пересечение $M_t \cap Sol(F) = C_t$, где $M_t \stackrel{\text{def}}{=} \{t\} \times M$, есть множество канторовского типа для любого фиксированного $t \in S^1$. Более того, $Sol(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению C_t на $\mathbb{R}$.*

Ограничение диффеоморфизма F на множестве $Sol(F)$ сопряжено специальному сдвигу на обратном пределе линейного растягивающего отображения окружности. Для доказательства этого факта строится символическая модель ограничения $F|_{Sol(F)}$.

Завершающим в построении искомого диффеоморфизма с одномерным растягивающим аттрактором является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6 *Пусть отображение $F : S^1 \times M \to S^1 \times M$ определяется преобразованиями e, R, f_1, $\dots$, f_k. Тогда множество $Sol\ (F)$ является одномерным растягивающимся аттрактором отображения F, локально гомеоморфным прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.*

В основе построения первого примера $f : S^1 \times D^3 \to f(S^1 \times D^3) \subset S^1 \times D^3$ лежит диффеоморфизм Смейла с одномерным растягивающимся аттрактором Λ_f, который локально гомеоморфен прямому произведению стандартного канторовского множества $\mathfrak{K}$ в D^3 на $\mathbb{R}$. Любая простая замкнутая кривая, принадлежащая множеству $D^3 - \mathfrak{K}$, стягивается в точку в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$.

Для второго примера используется конструкция Антуана. В результате построенный диффеоморфизм g имеет одномерный растягивающийся аттрактор Λ_g, который локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}$ на ожерелье Антуана $\mathfrak{C}$. Известно, что $\mathfrak{C}$ является вполне разрывным множеством канторовского типа таким, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathfrak{C}) \neq 0$.

Далее доказывается, что ограничения диффеоморфизмов f и g на их одномерные растягивающие аттракторы Λ_f и Λ_g соответственно внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.

Замечание 1

Для размерности $n = 3$ данный результат следует из работы Боте, в которой рассматривается окрестностная классификация так называемых чистых соленоидов Смейла и приводятся примеры окрестностно не сопряженных диффеоморфизмов.

Замечание 2

Для размерности $n \geq 5$ применяется обобщение конструкции Антуана. Повторяя метод Антуана, строится нульмерное компактное множество (ожерелье Антуана-Бланкеншипа).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Из списка периодических изданий, рекомендованных ВАК:

1. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** О классификации одномерных растягивающихся аттракторов // Математические заметки. - Отделение математических наук РАН. - 2009. - Т. 86, №3.

2. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** О нульмерных соленоидальных базисных множествах // Математический сборник. - Российская академия наук. - 2011. - Т. 202, №1.

Публикации в прочих изданиях:

1. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** О классификации одномерных растягивающихся аттракторов // Тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений" , посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. - г. Москва, Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносов. - 30 марта-2 апреля 2009 года.

2. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** О соленоидальных базисных множествах // Тезисы докладов III всероссийской молодежной научно - инновационной школы "Математика и Математическое Моделирование". - г. Саров, Саровский физико-технический институт - филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". - 20-23 апреля 2009 года.

3. **Исаенкова Н.В.** О соленоидальных базисных множествах // Тезисы докладов XIV Нижегородской сессии молодых ученых. Математические науки. - 2009.

4. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** Динамика диффеоморфизмов класса SV, сосредоточенная в базовых полноториях // Тезисы докладов IV всероссийской молодежной научно - инновационной школы "Математика и Математическое Моделирование". - г. Саров, Саровский физико-технический институт - филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". - 19-22 апреля 2010 года. - С.17-18.

5. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** Динамика диффеоморфизмов класса SV, сосредоточенная в базовых полноториях // Труды Средневолжского математического общества. - 2010. - Т. 12.

6. **Исаенкова Н.В.** Соленоидальные базисные множества // Тезисы докладов на международную математическую конференцию "Математика и динамические системы". - г. Суздаль. - 2–7 июля 2010 года. - С. 92.

7. **Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.** О классификации накрытий окружности // Тезисы докладов на международную конференцию "Дифференциальные вопросы и смежные вопросы", посвящённую 110-летию со дня рождения И. Г. Петровского. - МГУ им. М.В. Ломоносова и Математический Институт РАН им. В.А. Стеклова. - г. Москва. - 29 мая - 4 июня 2011 г.