На правах рукописи

ПЕГУШИН Антон Геннадьевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕДАХ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород - 2006

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского и Нижегородском филиале Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **В.И.Ерофеев**

Научный консультант: кандидат технических наук **С.Ф.Шешенин**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **И.А.Волков**

кандидат технических наук **В.А.Зазнобин**

Ведущая организация: **Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана**

Защита состоится « 21 » декабря 2006 г. в 15^{30} час. на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр-т Гагарина, 23, корп. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ННГУ.

Автореферат разослан « 20 » ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук,
доцент Б.В. Трухин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из важных задач механики деформируемого твердого тела на современном этапе является необходимость совершенствования математических моделей различных сред: структурированных, многокомпонентных, многофазных и других. Это обусловлено широким внедрением композиционных материалов, разработкой и внедрением субмикро- и нанокристаллических материалов, а также техническими и технологическими проблемами сейсмо- и геофизики.

Изучение особенностей распространения упругих волн в средах с внутренними степенями свободы актуально в связи с тем, что волны являются высокоэффективным инструментом исследования напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств твердых тел.

Следует, однако, заметить, что количество волновых эффектов, которые используются сегодня в диагностике материалов и элементов конструкций, крайне мало. Достоверность же прогнозов часто оказывается недостаточной.

Необходимо выявлять линейные и нелинейные эффекты, которые возможны при распространении и взаимодействии волн в твердых телах, изучать особенности их проявления, влияние различных факторов. Изучение волновых эффектов позволит использовать их для разработки новых методов и средств измерения, контроля и диагностики.

Цель работы состоит в изучении дисперсионных зависимостей и нелинейных эффектов, проявляющихся в твердых двухкомпонентных материалах (сдвиговая смесь, пористый материал, среда Био, содержащая полости, заполненные жидкостью).

Научная новизна. В диссертации получила развитие теория упругих сред с микроструктурой.

- Показано, что динамика двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси и динамика твердого пористого материала могут быть описаны системой четырех нелинейных уравнений в частных производных, два из которых являются комплексно-сопряженными уравнениями Шредингера, а два – уравнениями Кортевега-де Вриза.
- Исследовано нелинейное взаимодействие квазигармонических продольных волн, распространяющихся в двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси и в твердой среде с полостями. Показано, что в результате взаимодействия низкочастотной волны (вибрационное поле) и высокочастотной волны (ультразвук) генерируется ультразвуковая волна суммарной частоты. Эта волна может находиться в фазово-групповом синхронизме с вибрационным полем. Расчеты качественно соответствуют данным о наблюдении генерации ультразвука сейсмическими воздействиями.
- Произведен расчет зависимости параметра упругой нелинейности материала от его пористости, позволяющей объяснить наблюдаемые

экспериментально аномально большие значения параметра нелинейности пористых и трещиноватых геологических пород.

– Изучено распространение нелинейных стационарных волн продольной деформации в двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси, твердом пористом материале и среде Био, содержащей полости, заполненные жидкостью. Установлено, что в этих средах могут существовать, как периодические, так и уединенные волны конечной амплитуды (солитоны), распространяющиеся без изменения своей формы. Исследовано влияние пористости на амплитуду, длину периодической волны и ширину солитона.

Практическая значимость. Результаты исследований могут служить теоретическим обоснованием при разработке новых методов неразрушающего контроля материалов и элементов конструкций. В частности, может найти применение рассчитанная зависимость параметра упругой нелинейности материала от его пористости, позволяющая объяснить наблюдаемые экспериментально аномально большие значения параметра нелинейности пористых и трещиноватых геологических пород.

В ряде недавних публикаций (В.Н. Николаевский и др.) замечено, что именно в режиме фазово-группового синхронизма происходит генерация ультразвука низкочастотными сейсмическими воздействиями. Ультразвук, в свою очередь, способствует повышению конечной нефтеотдачи пластов. Генерировать же ультразвук в обычном (линейном) режиме крайне затруднительно, т.к. проблематично создать мощный постоянно действующий его источник и преодолеть частотно зависимое затухание в земных породах. Построение достоверных математических моделей будет способствовать процессу управляемой и оптимальной генерации ультразвука. От наблюдаемого физического явления можно будет перейти к созданию новой технологии полного извлечения остаточной нефти.

Основные результаты диссертации были получены при выполнении работы по:

– Комплексной программе Российской Академии наук, раздел II «Машиностроение» по теме: «Разработка методов диагностики напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств материалов и элементов конструкций, основанных на применении эффектов нелинейной акустики» (2001-2003г.г., научн. рук проф. Ерофеев В.И.);
– Плану основных заданий Нф ИМАШ РАН:
  на 2004-2005г.г. по теме: «Волны деформации в структурно-неоднородных материалах и элементах конструкций» (научн. рук. проф. Ерофеев В.И., проф. Потапов А.И.);
  на 2006-2008г.г. по теме: «Разработка новых принципов акустической диагностики структурно-неоднородных, композитных, микро- и

нанокристаллических материалов и элементов конструкций» (научн. рук. проф. Ерофеев В.И., проф. Потапов А.И.);

- Грантам РФФИ: «Нелинейные акустические волны в неоднородных, поврежденных и структурированных средах. Теория. Эксперимент. Приложения» (2003-2005г.г., №03-02-16924, рук. проф. Ерофеев В.И.); «Теоретические и экспериментальные исследования распространения нелинейных акустических волн в структурированных и поврежденных элементах конструкций» (2006-2008г.г., № 06-02-17158 рук. проф. Ерофеев В.И.).
- Федеральной целевой программе «Интеграция»: «Экспериментальное исследование и математическое моделирование деформации и разрушения новых материалов и прогнозирование ресурса конструкций» (рук. проф. Баженов В.Г.).

Результаты работы нашли отражение в специальных курсах лекций: «Волновые процессы в механических системах. Теория и приложения» и «Волновые процессы в сплошных средах», читаемых студентам ННГУ и НГТУ.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

1. Система нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в двухкомпонентных твердых средах.
2. Результаты исследований нелинейного взаимодействия квазигармонических волн, находящихся в условиях фазово-группового синхронизма.
3. Результаты исследования нелинейных стационарных волн деформации в твердой сдвиговой смеси, твердом пористом материале и в среде Био, содержащей полости, заполненные жидкостью.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на: Международном (IUTAM) симпозиуме по аналитической и численной механике разрушения неоднородных материалов (г. Кардиф, Великобритания, 2001 г.); 16-м Международном симпозиуме по нелинейной акустике (г. Москва, 2002 г.); 2-й Международной конференции по механике пористых материалов, посвященной памяти М. Био (Poromechanics-II) (г. Гренобль, Франция); 30-й и 31-й Международных Летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (г. Санкт-Петербург, Репино, 2002, 2003, 2005 г.г.); 10-м и 12-м Международных конгрессах по звуку и вибрациям (г. Стокгольм, Швеция, 2003 г., г. Лиссабон, Португалия, 2005 г.); 5-й Европейской конференции по механике деформируемого твердого тела (ESMC-5) (г. Салоники, Греция, 2003 г.); 5-м Всемирном конгрессе по ультразвуку (WCU-2003) (г. Париж, Франция, 2003 г.); Международном симпозиуме «Актуальные проблемы нелинейной волновой физики» (г. Нижний Новгород – Москва, 2003 г.); 5-м Международном симпозиуме аспирантов по проблемам гражданского строительства (г. Дельфт, Нидерланды, 2004 г.); 21-м Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (г. Варшава, Польша, 2004 г.); Европейском научном коллоквиуме «Многомасштабное моделирование в механике деформируемого твердого тела» (EUROMECH-468) (г. Санкт-Петербург, Репино, 2005 г.); Международной конференции по управлению и синхронизации в динамических системах (г. Мехико, Мексика, 2005 г.); 5-м Международном симпозиуме «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (г. Горис, Армения, 2005 г.); Европейском научном коллоквиуме «Волновая механика длинных гибких конструкций, взаимодействующих с движущимися нагрузками и потоками» (EUROMECH-484) (г. Дельфт, Нидерланды, 2005 г.); Международной (СНГ) научно-технической конференции «Испытания материалов и конструкций» (г. Нижний Новгород, 2000 г.); Международной (СНГ) школе-конференции «Лобачевские чтения-2002» (г. Казань, 2002 г.); 11-й Сессии Российского акустического общества (г. Москва, 2001 г.); 6-й Нижегородской сессии молодых ученых (секция «Математика и математическое моделирование») (г. Саров, 2002 г.); Конференции ННГУ «Вычислительная математика и кибернетика» (г. Нижний Новгород, 2000 г.); семинарах кафедры теоретической механики ННГУ и лаборатории волновых процессов в материалах и конструкциях Нф ИМАШ РАН.

Публикации. По материалам диссертации опубликована 21 работа, основными из которых являются научные статьи [1-11].

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем составляет 131 стр., включая 21 рисунок, 20 стр. библиографии, содержащей 192 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность проведенных исследований, указывается их цель, научная новизна и практическая значимость, кратко излагается содержание диссертации.

В **первой главе** приводится обзор публикаций, посвященных динамическим процессам в многокомпонентных континуумах (пористые, водонасыщенные материалы, смеси и другие).

Идея применения математических моделей взаимопроникающих континуумов для описания механических процессов имеет полуторавековую историю. Первые работы по теории смеси, включающие в себя балансовые уравнения и соответствующие термодинамические ограничения, принадлежат А. Фику (1855г.) и Дж. Стефану (1871г.).

Работы по смесям газов и жидкостей, содержащие концепцию многих взаимодействующих континуумов, принадлежат Р. Глейзбруку (1885г.), Н.Е. Жуковскому (1899г.), О. Рейнольдсу (1903г.), Д. Гильберту (1907г.).

В 1930-х – 50-х г.г. наиболее выдающимися работами отечественных ученых по многокомпонентным континуумам являются следующие: В.М. Маккавеев, М.А. Великанов (движение наносов, 1931г.); Л.С. Лейбензон (механика жидкости в пористых средах, 1936г.); Л.Д. Ландау (гидродинамика жидкого гелия, 1941г.); Я.И. Френкель (сейсмические волны в водонасыщенных грунтах, 1944г.); С.Г. Телетов (движение парожидкостных потоков, 1945г.); Н.А. Слезкин (движение пульпы, 1952г.); Г.И. Баренблат (движение взвешенных частиц в турбулизованном потоке, 1953г.); Ф.И. Франк (методы усреднения, 1953г.).

Начало современного этапа развития механики многофазных сред принято отсчитывать от времени появления работ Х.А. Рахматулина (1956г.) и К. Трусделла (1957г.), имевших широкий резонанс.

Обзор современного состояния механики многофазных сред можно найти в монографиях Р.И. Нигматулина (1987 г.), В.Е. Накорякова, Б.Г. Покусаева и И.Р. Шрейбера (1990 г.) Д.А. Губайдуллина (1998 г.).

Близкая идейно к механике многофазных сред, теория водонасыщенных твердых пористых материалов развивалась, в основном, независимо от этих работ, ее основоположниками признаны М. Био (1955-1962г.г.) и Х. Дересевич (1960, 1964).

С 1999 г. с периодичностью раз в три года проводятся Международные конференции по механике пористых материалов (POROMECHANICS), посвященные памяти М. Био.

В <u>п.1.2.</u> диссертации содержится обзор работ, доложенных на конференциях, проходивших во Франции (2002) и в США (2005).

Основные гипотезы теории двухкомпонентных твердых смесей были сформулированы А.Грином и Т.Стилом (1966) . Согласно этим гипотезам смесь представляет собой два взаимопроникающих континуума. Каждая точка области, заполненной смесью, одновременно занята обеими компонентами, между которыми происходит взаимное относительное движение. Деформированное состояние каждого континуума определяется парциальными тензорами деформаций и вращений. Однако при движении смеси происходит не только деформирование отдельных континуумов, но и их взаимное смещение. Кинематически такое смещение может однозначно определяться компонентами вектора относительных перемещений (сдвиговая модель смеси), относительных скоростей (диффузионная модель смеси) или компонентами вектора относительных ускорений (инерционная модель смеси).

Первые работы, касающиеся смесей твердых тел, использовали гипотезы, принятые в теории газожидкостных смесей и в теории флюидонасыщенных твердых тел, т.е. это были работы по диффузионным смесям.

Сдвиговая модель смеси была обоснована Б. Лемпрайером (1969), связавшим математический аппарат смесей с реальными материалами – слоистыми композитами. Лемпрайер показал, что при движении упругого импульса вдоль слоев композита между слоями возникает силовое взаимодействие, являющееся следствием различия сдвиговых свойств слоев. Сила такого взаимодействия прямо пропорциональна разности средних перемещений в контактирующих слоях.

Дальнейшее развитие эта теория получила в работах А. Бедфорда, М. Стерна, Г. Хегемиера и других исследователей.

Теория сдвиговых смесей была обобщена Т.Ф. Тирстеном и М. Яханмиром (1977, 1978), Я.Я. Рущицким (1992, 1993) на случай учета геометрической и физической нелинейностей.

Инерционная модель смеси была предложена И.Г. Филипповым, в дальнейшем развивалась и использовалась в работах В.И. Ерофеева, В.В. Кажаева и С.Ф. Шешенина (1999, 2004).

Модели твердых пористых материалов строились, изначально, по аналогии с моделями жидкостей, содержащих пузырьки газа и их «твердотельная» специфика не всегда учитывалась.

Одномерная задача динамики упругой среды с полостями рассматривалась в работе Д. М. Донского и А. М. Сутина (1984), в работах Л.А. Островского (1988, 1989). Вывод трехмерных моделей пористых сред содержится в работах А.Г. Багдоева и А.В. Шекояна (1999, 2004), Л.Д. Акуленко и С.В. Нестерова (2005).

Во **второй главе** рассматриваются три математические модели, описывающие динамику твердой сдвиговой смеси, твердого пористого материала и водонасыщенной среды Био с полостями. Для перечисленных моделей приводятся предварительные предположения, сделанные на этапе вывода уравнений, и анализ структуры математических моделей. Для трех моделей получены дисперсионные зависимости и проведен их анализ. При помощи метода связных нормальных волн получены эволюционные уравнения и выявлены области применимости эволюционных уравнений.

В п. 2.1, двухфазный материал определяется как материал, составленный из двух твердых взаимно нерастворимых фаз и содержащий в представительном элементе достаточно много частиц обеих фаз. Между частицами происходит относительное смещение и в случае модели сдвиговой смеси такое смещение однозначно определяется вектором относительных перемещений $U_k^{(1)} - U_k^{(2)}$. В теории двухкомпонентной смеси предполагается, что внутренняя энергия U зависит от парциальных тензоров деформации Грина и описывается потенциалом Мурнагана.

Уравнения динамики двухкомпонентной сдвиговой смеси во втором приближении запишутся в виде:

$$r_{aa}\frac{\partial^2 U_i^{(a)}}{\partial t^2}-m_a\frac{\partial^2 U_i^{(a)}}{\partial x_k^2}-\left(l_a+m_a\right)\frac{\partial^2 U_l^{(a)}}{\partial x_l \partial x_i}-$$

$$-m_3\frac{\partial^2 U_i^{(d)}}{\partial x_k^2}-\left(l_3+m_3\right)\frac{\partial^2 U_l^{(d)}}{\partial x_l \partial x_i}-b\left(U_i^{(a)}-U_i^{(d)}\right)=F_i^{(a)} \qquad (1)$$

где через $F_i^{(a)}$ обозначены нелинейные слагаемые. Здесь плотность r_{aa}, как характеристика a-ой компоненты смеси, не является плотностью a-ой компоненты. Она равна произведению плотности a-ой компоненты $r_0^{(a)}$ на объемную концентрацию g_a этой компоненты в смеси, то есть: $r_{aa}=r_0^{(a)}g_a$.

Проводится анализ дисперсионных зависимостей для линеаризованной системы. Показано, что в двухкомпонентной сдвиговой смеси могут распространяться продольные и сдвиговые упругие волны. Однако эти волны, в отличие от волн в классическом изотропном твердом теле, обладают дисперсией, и каждый из типов волн характеризуется двумя дисперсионными ветвями. На частоте $w_0=\pm\sqrt{-b\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}$, $b<0$ и ниже вторая мода преобразуется в экспоненциально-затухающую. Другими словами, для второй моды смесь является фильтром высоких частот, частота w_0 определяет начало полосы непропускания.

Далее дается обзор методов определения физических постоянных в теории смеси. Существуют два подхода. Первый подход основан на гипотезе Трусделла, его основным признаком можно считать следующее: модель двухкомпонентной смеси используется для описания только двухкомпонентной реальной смеси; обязательно вводится промежуточная модель, в каждом конкретном случае имеющая свои дополнительные ограничения (влияние которых не всегда анализируется). Реальная среда моделируется некоторой идеальной кусочно-однородной двухкомпонентной (слоистой, волокнистой, зернистой) упругой средой, для которой уже тем или иным способом вычисляются физические параметры модели двух взаимодействующих континуумов. Следует обратить внимание, что в таком подходе существует, по крайней мере, два канала проникновения неточностей: вследствие неточности промежуточной модели и неточности способа вычисления приведенных физических параметров модели смеси по промежуточной модели.

Второй подход характерен тем, что моделируемая реальная смесь не предполагается двухкомпонентной. Полагается достаточным предположение, что в смеси имеется два доминирующих компонента. При таком подходе есть две возможности определения постоянных модели. Первая состоит в определении набора экспериментов, из которых могут быть найдены постоянные модели. Собственно говоря, так всегда поступают в классической теории упругости. Здесь возможно появление дополнительных неточностей за счет неточностей эксперимента. Вторая возможность состоит в построении промежуточной модели, учитывающей более чем двух компонентную структуру смеси и приводящей эту структуру к двухкомпонентному континууму.

В п. 2.2 изучается распространение волны в полубесконечной твердой вязкой среде с полостями с учетом геометрической, физической и полостной нелинейностей. Пусть имеется полубесконечная, изотропная, вязкая (модель Фойхта), среда с полостями, в которой распространяются волны с конечной амплитудой (т.е. нелинейные волны при учете геометрической, физической и полостной нелинейностей). Матрица, т.е. основная среда считается однородной. Предполагается также, что расстояние между полостями намного больше радиуса полостей и гораздо меньше, чем длина волны. При указанных предположениях, распространение квазипродольной нелинейной волны описывают следующие уравнения

$$
\begin{aligned}
& r_0 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_3^2} + (l + m) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2} \partial x_3} \\
& r_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = m \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + m \Delta_{\perp} u_3 + (l + m) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \\
& + l \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - N \frac{\partial V}{\partial x_3} (l + 2m) + b \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + \\
& + P \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
& \ddot{V} + w_0^2 V - \frac{R_0}{c_l} \dddot{V} - G V^2 - b_1 \left(2 V \ddot{V} + \dot{V}^2 \right) = \\
& (l + 2m) \frac{4 p R_0}{r_0} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - N V \right), \Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Здесь r_0 – начальная плотность материала, $w_0^2 = \dfrac{4m}{r_0 R_0^2}$ – квадрат резонансной частоты колебаний объема поры, а $c_l^2 = \dfrac{(l + 2m)}{r_0}$ – квадрат скорости продольной волны. Также введены обозначения: $G = \dfrac{11 w_0^2}{16 p R_0^3}$, $b_1 = \dfrac{1}{8 p R_0^3}$ и $P = (4m + 3l + 2A + 6B + 2C)$, где P – коэффициент, обусловленный геометрической и физической нелинейностями, A, B, C – константы Ландау третьего порядка. $b = x_1 + \frac{4}{3}h_1$ – коэффициент динамической вязкости, $u_{1,2}$ – поперечные, а u_3 – продольные компоненты перемещений, x_i – координаты, а t – время. Координаты x_1 и x_2 выбраны в касательной плоскости к невозмущенной волне, а x_3 направлена вдоль распространения волны. Продольная волна, распространяющаяся в смеси обладает дисперсией, т.е. ее фазовая скорость $V_ф = w / k \neq const$. В частотном диапазоне от $w = 0$ до $w = w_0 = \pm 2 \frac{\Lambda}{R_0} \frac{c_t}{c_l} \sqrt{1 + p\left(\frac{c_t}{c_l}\right)^2 R_0^3 N}$ (где $c_t^2 = m / r_0$) имеется одна дисперсионная ветвь, а при $w \geq w_0$ появляется вторая дисперсионная ветвь.

Определим величину $R_0^3 N$, как пористость и изучим влияния пористости на дисперсию волны. Изменение дисперсионных свойств от пористости качественно представлено на Рис. 1.

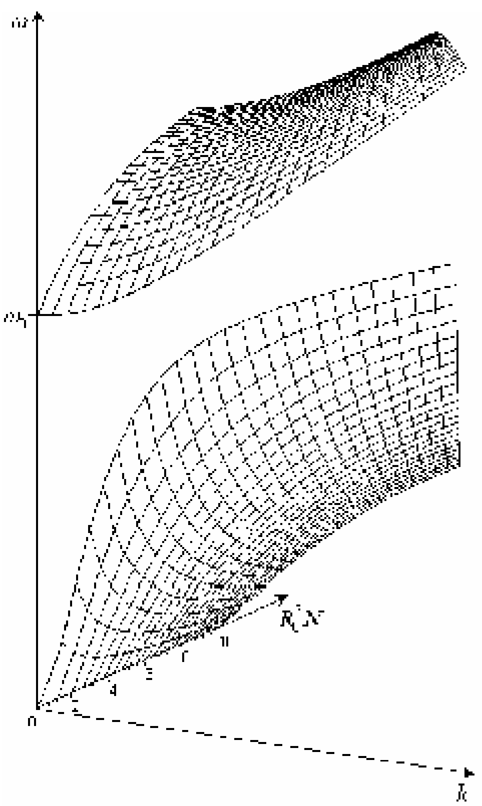

Рис. 1. *Влияние пористости на дисперсионные свойства продольной волны.*

Далее исследовано влияние вязкости на дисперсионные характеристики распространяющейся волны. На рис. 2 показана зависимость фазовой скорости волны от пористости материала на различных частотах. На более высоких частотах вязкость значительно влияет на скорость волны. Рис. 3 показывает, что пористость вносит тем больший вклад в затухание, чем выше частота распространяющейся волны.

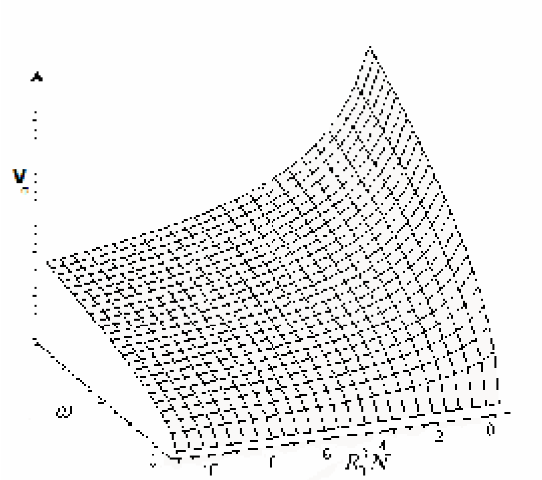

Рис. 2. *Изменение v_{ϕ} в вязком материале от пористости.*

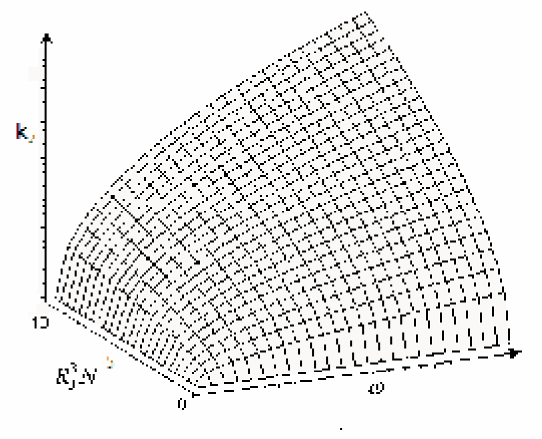

Рис. 3. *Изменение затухания от пористости.*

П. 2.3 посвящен изучению особенностей распространения волн в пористой водонасыщенной среде. В качестве модели среды выбирается твердый упругий каркас с многочисленными расположенными порами, связанными между собой и заполненными жидкостью, т.н. среда Био. Волновой процесс в такой упругопористой насыщенной жидкостью среде описывается системой из двух векторных уравнений, первое из которых описывает движение твердого каркаса, а второе – жидкости. Пусть имеется полубесконечная среда Био, в которой существуют полости с жидкостью. Предполагается, что расстояние между полостями намного больше радиуса полостей, но гораздо меньше распространяющейся в среде длины волны. Вокруг полостей есть твердый материал каркаса. Учитывается вязкость твердого каркаса по модели Фойхта и взаимное трение между двумя фазами.

Распространение плоской продольной волны в среде Био, содержащей полости, заполненные жидкостью, описывается следующей системой уравнений (вязкостью пренебрегается):

$$
\begin{cases}
r_{11}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + r_{12}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} - (l+2m)\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - Q\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + N(l+2m)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
r_{12}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + r_{22}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - Q\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + R\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0 \\
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + w_s^2 v - Gv^2 - 4pr_2 r_0^{-1}\left[(l+2m)\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x} - Nv\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}(Qv_3 + Ru_3)\right] = 0
\end{cases} \qquad (3)
$$

где v_3 и u_3 – перемещения жидкой и твердой фазы, соответственно, v – объем полости возмущенной волной, r_0 – плотность твердой фазы, $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}, Q$ и R – коэффициенты, характеризующие жидконасыщенную среду, N – количество полостей в единице объема, r_2 – радиус полостей, $w_s^2 = (r_2^2 r_0)^{-1}(3gp_0 + 4m)$, p_0 – начальное давление в жидкости внутри полости, γ – показатель адиабаты жидкости.

Продольная волна, распространяющаяся в среде, обладает дисперсией. В частотном диапазоне от $w = 0$ до $w = w_0 = \pm\dfrac{1}{r_2}\sqrt{\dfrac{3gr_0 + 4m}{r_0}}\sqrt{1 + p\dfrac{4p(l+2m)}{3gr_0 + 4m}r_2^3 N}$ имеется одна дисперсионная ветвь, а при $w \geq w_0$ появляется вторая дисперсионная ветвь.

В п. 2.4 описывается метод связных нормальных волн, позволяющий свести рассматриваемые модели к эволюционным уравнениям:

$$
\begin{gathered}
i\frac{\P W_1}{\P t} - a_1\frac{\P^2 W_1}{\P x^2} + a_2 W_1 = b_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2, \; W_2 = W_1^*, \\
\frac{\P W_{3,4}}{\P t} \pm c_2\frac{\P W_{3,4}}{\P x} \pm g\frac{\P^3 W_{3,4}}{\P x^3} = \mu b_2\frac{\P}{\P x}(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2
\end{gathered} \qquad (4)
$$

где W^* величина, комплексно-сопряженная с W.

Эволюционные уравнения одинаковы по виду для всех трех моделей. Отличаются они лишь коэффициентами и видом связей начальных переменных с новыми.

Выражения для коэффициентов в случае твердой сдвиговой смеси имеют следующий вид:

$$
a_1 = -\frac{c_1^2}{2}\sqrt{\frac{r_1 r_2}{-b(r_1 + r_2)}}, \; a_2 = -\sqrt{\frac{-b(r_1 + r_2)}{r_1 r_2}},
$$

$$
g = -r_1 r_2\left[\frac{(c_1^2 - c_2^2)^2}{4} + c_{31}^2 c_{32}^2\right] / 2b(r_1 + r_2)c_2,
$$

$$
b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1 r_2}{-b(r_1 + r_2)}}\left(\frac{c_2^2 r_1^2 + (c_1^2 + 4c_2^2)r_1 r_2 + 4c_2^2 r_2^2}{r_1^2 + 5r_1 r_2 + 4r_2^2}\right), \; b_2 = \frac{1}{2}\frac{(c_1^2 r_1 + c_2^2 r_2)}{c_2(r_1 + r_2)}.
$$

Связь новых переменных (W_i) с исходными $\left(u^{(a)}\right)$ определяются выражениями

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \left\{ \left(b\left(\frac{r_1 + 2r_2}{r_1 r_2} \right) + 2c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Big/ \left(\frac{b}{r_1} - c_{31}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right\} (W_1 + W_2) +$$

$$+ \left\{ \left(\left(c_1^2 - c_2^2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{r_1} \right) \Big/ \left(\frac{b}{r_1} - c_{31}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right\} (W_3 + W_4)$$

В случае твердого пористого материала коэффициенты и связи между исходными переменными и новыми запишутся:

$$a_1 = 2c_l^4 pR_0 N \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N} \,/ \left(w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N\right)^2, \; a_2 = \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N}$$

$$c_2 = c_l w_0 / \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N}\,, \; g = c_l^3 / 8w_0 \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N}\,,$$

$$b_1 = 0{,}5P / r_0 \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N}$$

$$b_2 = \frac{P}{2r_0} \frac{\sqrt{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N}}{c_l w_0} \left\{ 1 - r_0 G \left(1 + \frac{w_0^2}{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N} \right)^3 / 4pR_0 PN^2 \right\}.$$

Связь новых переменных (W_i) с исходными (u, ν) определяются выражениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \left(1 + \frac{w_0^2}{w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{(W_1 + W_2)}{N} - \frac{\left(w_0^2 + 4pR_0 c_l^2 N\right)(W_3 + W_4)}{c_l^2 N \dfrac{\partial}{\partial x}}$$

Для $W_{1,2}$ система (4) представляет собой комплексно-сопряженные уравнения Шредингера, а для $W_{3,4}$ – уравнения Кортевега-де Вриза. Нелинейность приводит к тому, что все четыре уравнения оказываются связанные между собой.

Анализ системы (4) показал, что в широком частотном диапазоне, эволюционные уравнения достаточно хорошо аппроксимируют дисперсионные зависимости исходных систем. Дисперсионные зависимости, соответствующие исходным системам и системам эволюционных уравнений показаны на рис. 4 и рис. 5.

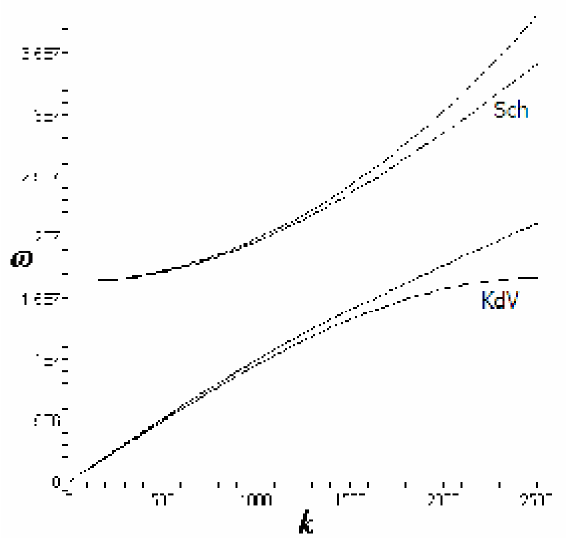

Рис. 4. *Точные и аппроксимационные дисперсионные зависимости для сдвиговой модели твердой смеси.*

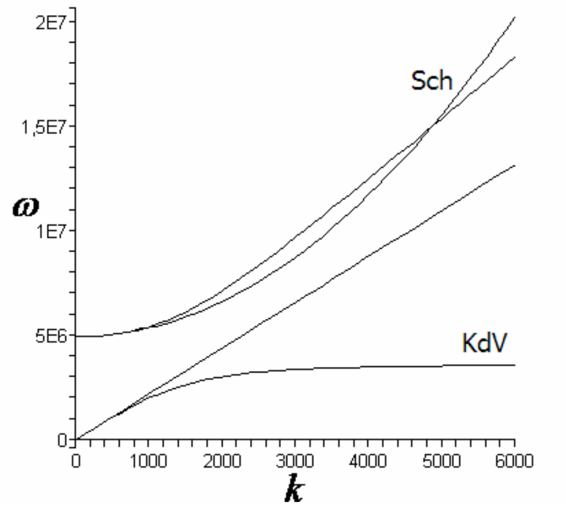

Рис. 5. *Точные и аппроксимационные дисперсионные зависимости для модели пористого материала.*

Переход к эволюционным уравнениям позволил оценить вклад «полостной» нелинейности в общую нелинейность. Это можно осуществить, проанализировав изменения коэффициента нелинейности b_2 / c_2 от пористости.

При увеличении пористости и выполнении условия $\Lambda >> L >> R_0$ коэффициент нелинейности ведет себя, как $b_2 / c_2 = \dfrac{P}{2 r_0 c_l^2}\left(1 + p\,(c_l / c_t)^2 R_0^3 N\right)$, т.е. линейно растет с ростом пористости и может достигать нескольких порядков, что согласуется с имеющимися многочисленными экспериментальными данными.

В **<u>третьей главе</u>** изучаются взаимодействия волн, частоты которых существенно отличаются друг от друга, но фазовые скорости низкочастотных волн при этом равняются групповым скоростям высокочастотных волн.

Такая картина наблюдается в различных физических задачах. При этом высокочастотная волна, как правило, генерирует низкочастотную.

В сейсмике экспериментально наблюдалась другая ситуация. Она описана В.Н. Николаевским (1996). Низкочастотное вибрационное воздействие на земные породы порождает ультразвук. При этом генерация ультразвука была наиболее эффективной, если выполнялось условие фазово-группового синхронизма.

В качестве базовых моделей для описания этого эффекта и изучения волновых взаимодействий выбираются: математическая модель двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси и математическая модель твердого пористого материала.

Считаем, что в среде распространяются волна W_3 с частотой $w_{\text{Н}}$ и волновым числом $k_{\text{н}}$ и волна W_1 с частотой $w_{\text{В}}$ и волновым числом $k_{\text{В}}$. При этом $w_{\text{н}} << w_{\text{в}}$, т.е. волну W_3 отождествляем с вибрационным полем, а волну W_1 – с ультразвуковым акустическим сигналом.

В результате взаимодействия двух волн на квадратичной нелинейности системы (4) будет генерироваться волны W_1 суммарной частоты, удовлетворяющая условиям трехчастотного резонансного взаимодействия (Рис. 6)

$w_{\Sigma} = w_{\text{н}} + w_{\text{в}} \;\; k_{\Sigma} = k_{\text{н}} + k_{\text{в}}$

Ультразвуковая волна суммарной частоты w_{Σ} должна, согласно поставленной задаче, подчиняться еще и условию фазово-группового синхронизма с вибрационным полем, т.е.

$V_{\text{гр}\,\Sigma} = V_{\text{ф}\,\text{н}}$

где $V_{\text{гр}\,\Sigma} = \dfrac{dw_{\Sigma}}{dk_{\Sigma}}$ – групповая скорость ультразвука, а $V_{\text{ф}\,\text{н}} = w_{\text{н}} / k_{\text{н}}$ – фазовая скорость вибрационного поля.

Для двухкомпонентной смеси:

$$w_{\text{Н}} = c_1^2 c_2^2 \sqrt{\frac{-b\left(r_1 + r_2\right)}{r_1 r_2}} \Bigg/ \left(\frac{\left(c_1^2 - c_2^2\right)^2}{4} + c_{31}^2 c_{32}^2 \right)$$

$$w_{\Sigma} = \left(1 + c_2^2 / 2c_1^2\right) \sqrt{\frac{-b\left(r_1 + r_2\right)}{r_1 r_2}}$$

Для твердого пористого материала:

$$w_{\text{н}} = 16 \frac{c_l^2 p R_0 N w_0^2}{\left(w_0^2 + 4pR_0 N w_0^2\right)^{3/2}}$$

$$w_{\Sigma} = \sqrt{w_0^2 + 4pR_0 N w_0^2} \left\{ 1 + \frac{w_0^2}{8pc_l^2 R_0 N} \right\}$$

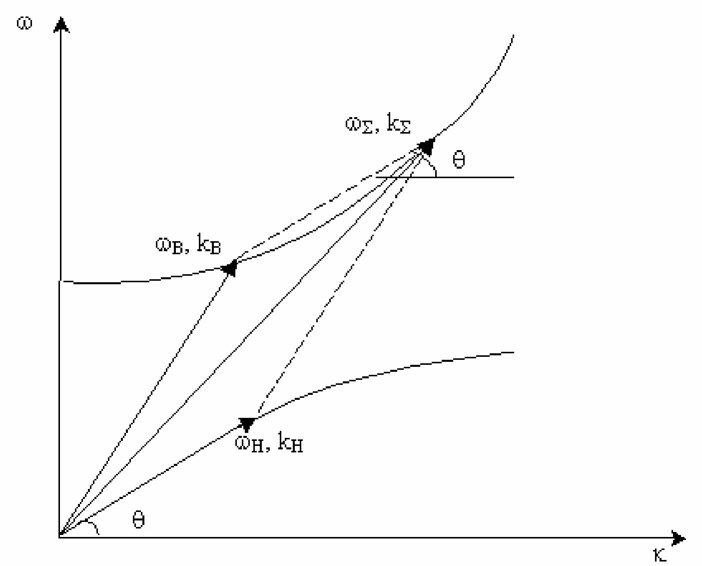

***Рис. 6.** Зависимость частоты распространения упругой волны от волнового числа (при этом* $tgq = \dfrac{dw_\Sigma}{dk_\Sigma} = \dfrac{w_н}{k_н}$*).*

Из анализа величины отношения $w_\Sigma / w_н$ были определены параметры модели твердого пористого материала, при которых возможен процесс фазово-группового синхронизма. Так, при $w_\Sigma / w_н \sim 10^2$ получаем количество полостей в единице объема $N \sim 10^5$ с радиусами $R_0 \sim 10^{-2}$ м., а из соотношения определяющего соотношение объемов пор и основной матрицы (основного материала) может быть найден объем пористого материала, для конкретных длин распространяющихся в нем волн.

Четвертая глава посвящена исследованию нелинейных стационарных волн деформации в двухкомпонентных твердых сдвиговых смесях, твердых пористых материалах и в средах Био, содержащих полости.

Показано, что в этих средах совместное действие нелинейных и дисперсионных факторов, их «конкуренция», может привести к формированию стационарных волн. Такие волны распространяются с постоянной скоростью без изменения своей формы.

В частности, показано, что в твердых пористых материалах могут существовать периодические нелинейные стационарные волны деформации и солитоны деформации.

Скорость распространения периодической волны V при этом удовлетворяет условию $0 < V < c_t / \sqrt{(c_t / c_l)^2 + pR_0^3 N}$. Качественные зависимости амплитуды A и длины периодической волны Λ от пористости $R_0^3 N$ приведены на рис. 7. С ростом пористости происходит уменьшение амплитуды и увеличение длины волны.

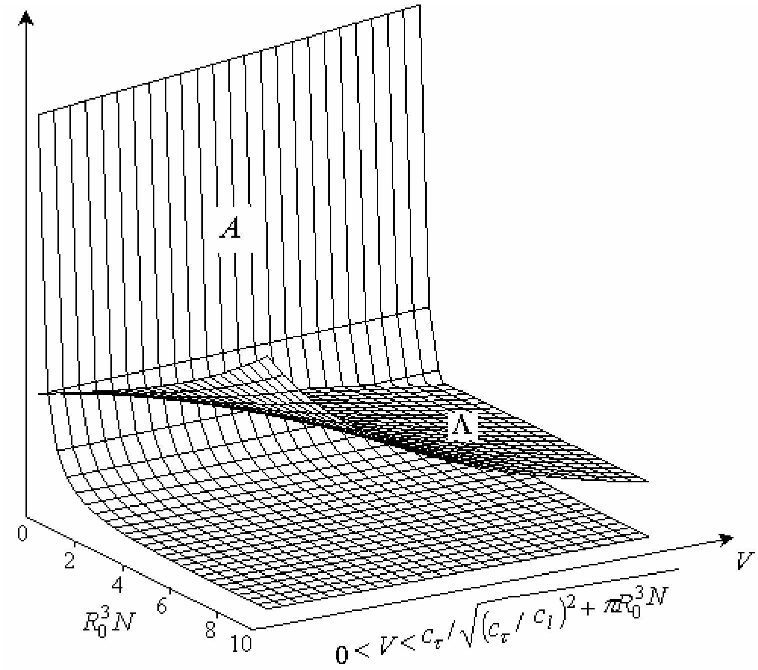

Рис. 7. *Качественные зависимости амплитуд A и периодов колебаний Λ периодической волны от пористости R_0^3N*

Скорость солитона деформации удовлетворяют условию $V > c_t / \sqrt{(c_t / c_l)^2 + pR_0^3N}$. Качественные зависимости амплитуды A_c и ширины Δ солитона от пористости R_0^3N приведены на рис. 8. С ростом пористости происходит уменьшение амплитуды и ширины, при этом амплитуда убывает быстрее.

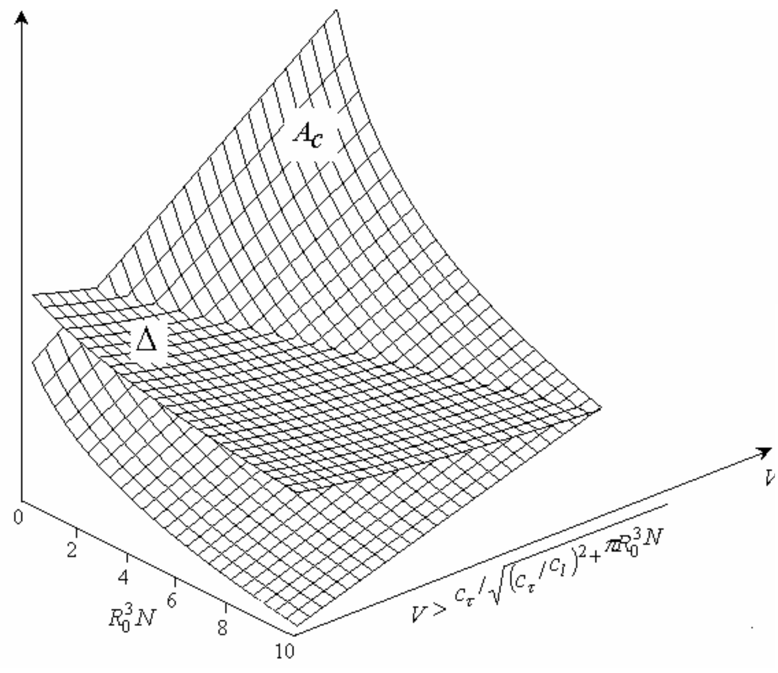

Рис. 8. *Качественные зависимости амплитуд A_c и ширины Δ солитона от пористости R_0^3N*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Осуществлен переход от систем нелинейных уравнений, описывающих динамику двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси и динамику

твердого пористого материала, к эволюционным уравнениям. Показано, что эволюционные уравнения представляют собой систему четырех нелинейных уравнений в частных производных, два из которых являются комплексно-сопряженными уравнениями Шредингера, а два – уравнениями Кортевега-де Вриза.

2. Исследовано нелинейное взаимодействие квазигармонических продольных волн, распространяющихся в двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси и в твердой среде с полостями. Показано, что в результате взаимодействия низкочастотной волны (вибрационное поле) и высокочастотной волны (ультразвук) генерируется ультразвуковая волна суммарной частоты. Эта волна может находиться в фазово-групповом синхронизме с вибрационным полем. Расчеты качественно соответствуют данным о наблюдении генерации ультразвука сейсмическими воздействиями.

3. Рассчитана зависимость параметра упругой нелинейности материала от его пористости, позволяющая объяснить наблюдаемые экспериментально аномально большие значения параметра нелинейности пористых и трещиноватых геологических пород.

4. Изучено распространение нелинейных стационарных волн продольной деформации в двухкомпонентной твердой сдвиговой смеси, твердом пористом материале и среде Био, содержащей полости, заполненные жидкостью. Установлено, что в этих средах могут существовать, как периодические, так и уединенные волны конечной амплитуды (солитоны), распространяющиеся без изменения своей формы. Исследовано влияние пористости на амплитуду, длину периодической волны и ширину солитона.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. ***Ерофеев В.И., Пегушин А.Г.*** Дисперсия и затухание акустических волн в вязкоупругих пористых материалах // Физическая акустика. Распространение и дифракция волн // Сб.трудов Х1 Сессии Российского акустического общества. М. : ГЕОС. 2001. Т.1. С.256-259.
2. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Propagation and Longitudinal Elastic Waves in Porous Materials // Acoustics Letters. 2001. V.24, No 9. P.161-164.
3. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Nonlinear Effects of Plane Longitudinal Wave Propagation in Porous Materials // Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21 st Century. Edited by O.V.Rudenko and O.A.Sapozhnikov. Fakulty of Physics, MSU, Moscow, 2002. V.2. P.791-794.
4. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Nonlinear wave propagation in porous materials // IUTAM Symposium on Analitical and Computational Fracture Mechanics of

Non-Homogeneous Materials. Proceedings. Held in Cardiff, UK, 16-22 June 2001. B.L. Karihalo (Ed.). Kluwer Academic Publishers. 2002. P.487-491.

5. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Dispersion and nonlinearity influence on plane longitudinal wave propagation in porous materials // Proc. Tenth Int. Congress on Sound and Vibration. Stockholm. Sweden. (7-10 July 2003). Published by IIAV. 2003. V.4. P.2033-2040.
6. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Propagation of a soliton in a porous medium // Proceedings of the World Congress on Ultrasonics (WCU-2003). (September 7-10, 2003. Paris, France). 2003. P. 497.
7. ***Pegushin A.G.*** Material porosity influence on dispersive and nonlinear properties of plane longitudinal waves // Proceedings of the 5th international PhD symposium in civil engineering, 16-19 June 2004, Delft, the Netherlands. A.A.Balkema Publishers. 2004. Vol.2.P.773-779.
8. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G.*** Waves of deformation propagation in nonlinear viscously elastic porous // 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (August 15-21, 2004. Warsaw, Poland). Abstracts and CD-ROM Proceeding. IPPT PAN, Warsaw, 2004.
9. ***Erofeyev V.I., Pegushin A.G. Sheshenin S.F.*** Nonlinear wave interactions in solids with microstructure // Twelfth Int. Congress on Sound and Vibration. Lisbon. Portugal. (11-14 July 2005). Abstracts and CD-ROM Proceeding. Published by IIAV. 2005.
10. ***Ерофеев В.И., Пегушин А.Г., Шешенин С.Ф.*** Резонансные взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды V Международной конференции (1-7 октября 2005, г. Горис, Армения). Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН Армении. 2005. С.191-196.
11. ***Ерофеев В.И., Пегушин А.Г., Шешенин С.Ф.*** Нелинейные эволюционные уравнения для анализа волновых процессов в твердых пористых материалах // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование и оптимальное управление». 2006. Вып. 3 (32). С. 55-58.