На правах рукописи

Кондрашов Роман Евгеньевич

К теории резонанса в системах с двумя степенями свободы, близких к нелинейным интегрируемым

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Морозов Альберт Дмитриевич, зав. каф. ДУиМА ММФ
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Белых Владимир Николаевич, зав. каф. Математики ВГАВТ г.Н.Новгород
	кандидат физико-математических наук, доцент Ежевская Наталья Александровна, каф. ТУиДМ факультета ВМК
Ведущая организация:	Удмурский государственный университет г. Ижевск

Защита состоится 17 мая 2012 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского по адресу: 603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, корп.2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ННГУ.

Автореферат разослан _________ 2012г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.06,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И.Лукьянов

Общая характеристика работы

Предмет исследования. Основной темой диссертации является исследование резонансов в системах с двумя степенями свободы, близких к нелинейным интегрируемым, и, в первую очередь, в системах двух уравнений Дюффинга-Ван дер Поля.

Актуальность исследования. Настоящая работа относится к одному из основных разделов качественной теории и теории бифуркаций динамических систем - теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к нелинейным консервативным интегрируемым, играющих фундаментальную роль в теории колебаний.

История вопроса. Основными методами исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к нелинейным консервативным интегрируемым, являются: метод малого параметра Пуанкаре, методы определения устойчивости, восходящие к работам Ляпунова, и методы усреднения, разработанные Крыловым, Боголюбовым и Митропольским.

Эти методы особенно эффективны в квазилинейном случае, когда уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x,t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $A - (n \times n)$ постоянная матрица, ε – малый параметр, F – периодическая по t n - мерная вектор - функция. Именно при рассмотрении квазилинейных двумерных систем такого вида Андронову, Витту, Мандельштаму и Папалекси впервые удалось применить математические методы Пуанкаре - Ляпунова и раскрыть их фундаментальное значение в области нелинейных колебаний. Так введенное Андроновым понятие автоколебательной системы как системы, у которой на фазовой плоскости существует предельные циклы Пуанкаре, позволило математически адекватно описать нелинейные процессы в ламповом генераторе и, в частности, "мягкий" и "жесткий" режимы возбуждения колебаний. Эти же методы были применены для описания явлений резонанса n - го рода и "захватывания" колебаний. Далее методы Пуанкаре - Ляпунова и методы усреднения с успехом были использованы в решении различных задач, описываемых, в частности, квазилинейными системами или так называемыми системами Ляпунова. В достаточной мере эти задачи рассмотрены в книгах Андронова, Витта, Хайкина, Боголюбова и Митропольского, Малкина, Стокера, Каудерера, Блехмана, Чезари, Хейла, Бутенина, Моисеева, в работах Лоуда и Сефа, Страйбла и Йонулиса и многих других.

Рассматриваемые системы удобно записать в виде системы, близкой к нелинейной интегрируемой гамильтоновой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x,y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, или в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F_1(I,\theta) = \varepsilon(f x'_\theta - g' y_\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I,\theta) = \omega(I) + \varepsilon(-f x'_I + g y'_I), \end{aligned} \tag{3}$$

где $I = (I_1, ..., I_n)$, $\theta = (\theta_1, ...\theta_n)$ – переменные действие - угол, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, а вектор - функции F_1, F_2 периодические по θ с периодом 2π. Исследования данной диссертации посвящены системам с двумя степенями свободы, когда $n = 2$.

Принципиальный момент в исследовании таких систем связан с наличием резонансов.

Говорят, что в системе (3) имеет резонанс, если для некоторого $I = I_0$ существует такой целочисленный вектор $k = (k_1, k_2, ..., k_m)$, что $(\omega(I_0), k) = \Sigma_{i=1}^{m} \omega_i k_i = 0$, $|k| \neq 0$. При этом резонанс в существенно нелинейной системе, когда $\omega = \omega(I)$, называют нелинейным резонансом.

Изучению резонансных явлений в системах вида (1), (3) посвящено большое количество работ, ведущих свое начало от классических исследований Пуанкаре, рассмотревшего вопрос о существовании и устойчивости резонансных периодических решений. Это, например, работы Волосова и Моргунова, которые дали методику отыскания стационарных резонансных режимов и определения их устойчивости. В указанных работах содержится также и довольно полный обзор работ, в которых изучались резонансные явления в различных конкретных системах. В случае, когда $\omega = const$ вопросы существоания и устойчивости стационарных режимов в системах вида (1) с помощью методов усреднения рассматривались Митропольским и Самойленко, Хейлом и др.

Наличие нелинейного резонанса в системе приводит к малым знаменателям в рядах теории возмущений и, вообще говоря, к неинтегрируемости системы в любой конечной области изменения I.

Если говорить о резонансах в нелинейных динамических системах, то исторически следует начать с консервативных систем и, в первую очередь, с гамильтоновых систем. Благодаря задачам небесной механики они привлекают внимание математиков на протяжении многих десятков лет. Первые попытки исследования таких систем были предприняты еше Эйлером при рассмотрении движения Луны. Впоследствии наиболее существенные результаты в этой области были получены Пуанкаре, Биркгофом, а в наше время - Колмогоровым, Арнольдом и Мозером (теория КАМ). Согласно известному результату о сохранении инвариантных торов, у системы (3) в гамильтоновом случае n - мерные инвариантные торы $I = const$ невозмущенной системы, соответствующие множеству, мера которого близка к единице, сохраняются при возмущении. Лишь инвариантные торы, соответствующие дополнительному множеству малой меры разрушаются при возмущении. Этому дополнительному множеству малой меры соответствуют так называемые "зоны неустойчивости", содержащие резонансные уровни. В случае, когда число степеней свободы $n > 2$, n - мерные инвариантные торы не делят $(2n - 1)$ - мерного пространства и поэтому фазовая точка со временем может проходить между торами и убегать, например, на бесконечность (диффузия Арнольда). Оценка скорости убегания фазовой точки получена Нехорошевым. Далее, значительное место в исследовании гамильтоновых систем занимали вопросы интегрируемости. Отметим работы Эно и Хейлеса, Козлова, Чирикова и Заславского. Одним из первых указал на возможность неинтегрируемости гамильтоновых систем Пуанкаре. Основной причиной неинтегрируемости являются резонансы, а также наличие в системе двоякоасимптотических (гомоклинических по терминологии Пуанкаре) решений. Наличие таких решений в системе приводит к сложной картине поведения решений в их окрестности или, как теперь говорят, приводит к нетривиальному гиперболическому множеству, включающему счетное множество седловых периодических движений и континуальное множество устойчивых по Пуассону движений.

Только в последнее время мы стали понимать масштабы и причины трудностей, возникающих при исследовании, казалось бы, простых динамических систем. Одна из основных причин такой сложности – это возможность существования резонансов, а также гомоклинических кривых. Грубо говоря, здесь дело связано с тем, что близкие траектории в окрестности гомоклинической кривой экспоненциально по времени расходятся и, следовательно, движение является локально неустойчивым. Если при этом движение остается финитным, то экспоненциальная локальная неустойчивость приводит к сильному "перемешиванию" траекторий, и система ведет себя так, как будто бы на нее действуют случайные силы. Именно это перемешивание описали теоритически и наблюдали в численных экспериментах Чириков, Заславский и их коллеги при исследовании несложных по виду гамильтоновых систем или сохраняющих площадь отображений.

Исследование резонансных структур в системах с $3/2$ степенями свободы, близких к нелинейным гамильтоновым, наиболее продвинуто в работах Морозова. Им также намечены основные этапы в исследовании систем с двумя степенями свободы. Особо отметим работы по исследованию вырожденных резонансов.

Обратимся к системам с двумя степенями свободы.

Следует отметить работы Арнольда, Нейштадта, которые касались вопроса о влиянии отдельного резонанса на поведение двухчастотной системы общего вида. Результаты, представленные в работах Карабанова, относятся к исследованию структуры резонансных зон четырехмерных квазигамильтоновых систем вдоль выделенной резонансной кривой.

Примером гамильтоновой системы с двумя степенями свободы является система Хенона-Хейлеса, возникающая при рассмотрении ряда галактических моделей. Система типа Хенона-Хейлесса была рассмотрена в работах Морозова и Драгунова.

Система, описывающая динамику маятниковых часов на общем основании, рассматривалась в работе Белыха и его коллег.

Задача, связанная с изучением движения упругой панели под действием осевой нагрузки и потока жидкости, направленного вдоль панели была рассмотрена в работах Холмса. Данные результаты вошли в совместную с Гукенхеймером книгу.

Имеются работы, в которых исследуется система двух связанных уравнений Дюффинга-Ван дер Поля. Однако в этих работах либо изначально рассматривается квазилинейная система (см., например, работы Бутенина), либо теоретическое исследование оправдано лишь в квазилинейном случае.

Список работ, тесно связанных с приложениями и приводящих к интересующим нас системам, можно продолжить. Однако не было работ, которые были бы посвящены исследованию систем двух связанных существенно нелинейных уравнений Дюффинга-Ван дер Поля в резонансных зонах. Как известно, в таких системах существует бесчисленное множество резонансов. При неконсервативных возмущениях периодические решения могут существовать лишь для конечного подмножества резонансов. В этом случае будем говорить о нетривиальных резонансных структурах (или о нетривиальных резонансных зонах).

Цели и задачи исследования. В диссертации изучается поведение решений неконсервативных систем с двумя степенями свободы, близких к нелинейным интегрируемым, в резонансных зонах. Это исследование приводит к построению и анализу трехмерных усредненных систем. Решаются следующие задачи:

1. для общего случая исследуется упрощенная (модельная) трехмерная усредненная система;

2. для системы двух слабо связанных уравнений Дюффинга - Ван дер Поля находятся трехмерные усредненные системы и проводится их исследование;

3. доказывается, что число нетривиальных резонансных структур ограниченно; это позволяет говорить о глобальном поведении решений системы двух слабо связанных уравнений Дюффинга - Ван дер Поля.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в теории колебаний, в теории динамических систем, а также при исследовании конкретных моделей.

Результаты диссертационной работы использованы при выполнении научно - исследовательских работ по грантам РФФИ №06-01-00270, №09-01-00356, ФЦП "Кадры №НК-13П-13.

Методологическая и теоретическая основа исследования. В диссертации использованы методы усреднения, а также методы качественной теории и теории биффуркаций динамических систем.

Научная новизна. Среди новых результатов, полученных в диссертации, можно выделить следующие.

1. Исследование систем с двумя степенями свободы в резонансных случаях приводит к исследованию трехмерных систем на полнотории. В диссертации рассмотрена модельная трехмерная система и проведен ее анализ.

2. Для системы двух слабо связанных уравнений Дюффинга - Ван дер Поля получены трехмерные усредненные системы.

3. Проведено аналитико - численное исследование усредненных систем. Показано, что поведение их решений существенно зависит от того, совпадают ли выбранные замкнутые фазовые кривые в невозмущенных осцилляторах с уровнями, порождающими предельные циклы в несвязанных уравнениях.

4. Рассмотрен вопрос о существовании гомоклинических структур.

5. Показано, что для системы двух слабо связанных уравнений Дюффинга - Ван дер Поля, близких к нелинейным интегрируемым, множество нетривиальных резонансных структур ограниченно, что позволило говорить о глобальном поведении решений.

Апробация результатов исследования. По теме диссертации были сделаны доклады на Международной конференции И.Г. Петровского в г. Москва (2007г.), Международной конференции Л.С. Понтрягина в г. Москва (2008г.), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим система в г.Суздаль (2010г.), Десятом всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в г. Нижний Новгород (2011г.).

Также были сделаны доклады на семинарах кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского (руководители - проф. А.Д. Морозов, проф. Л.М. Лерман).

Публикации. Всего по теме диссертации автором опубликовано 9 работ, в том числе, четыре в изданиях, рекомендованных ВАК. Все основные результаты диссертации являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно с Морозовым А.Д., автору принадлежат доказательства всех основных результатов.

Структура диссертации. Диссертация состоит из четырех глав, приложения и списка литературы. Список литературы содержит 83 наименований. Имеется 38 иллюстраций. Иллюстрации приводятся по мере их использования в основном тексте. Общий объем работы составляет 110 страниц. Главы разделены на параграфы, параграфы - на пункты.

Содержание работы

Первая глава является вводной и содержит обзор известных результатов (необходимые сведения, результаты, касающиеся систем размерности четыре и результаты, тесно примыкающие к предмету исследования), а также постановку задачи (исходные уравнения, предмет исследования) и формулировку основных результатов диссертации.

Во второй главе содержатся известные результаты по исследованию систем с двумя степенями свободы общего вида. В резонансных случаях приводится трехмерная усредненная система. Однако до сих пор отсутствуют работы, в которых были найдены правые части этой системы. В связи с этим в этой главе рассматривается модельная трехмерная усредненная система и проводится ее анализ.

В данной главе рассматриваются системы с двумя степенями свободы, близкие к нелинейным интегрируемым, следующего вида

$$\ddot{x}_k + f_k(x_k) = \varepsilon g_k(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2),\ k = 1, 2, \tag{4}$$

где f_k, g_k – достаточно гладкие функции своих аргументов в областях из R^1 и R^4 соответственно, ε – малый положительный параметр. Предположим, что хотя бы одна из функций f_k нелинейная. Систему (4) будем рассматривать в некоторой компактной области $D = d_1 \times d_2$ четырехмерного фазового пространства. Здесь $d_k = \{(x_k, \dot{x}_k) : h_{k_1} \leq H_k(x_k, \dot{x}_k) \leq h_{k_2}\}$, $H_k(x_k, \dot{x}_k) = h_k$ суть первые интегралы несвязанных осцилляторов ($\varepsilon = 0$), причем значениям $h_k \in [h_{k_1}, h_{k_2}]$ соответствуют замкнутые фазовые кривые, не содержащие состояний равновесия, сепаратрис и параболических траекторий. Систему (4) в области D удобно записать в переменных действие (I, J) – угол (θ, φ)

$$\begin{aligned}
&\dot{I} = \varepsilon g x'_\theta \equiv \varepsilon F_1(I, J, \theta, \varphi),\\
&\dot{J} = \varepsilon g x'_\varphi \equiv \varepsilon F_2(I, J, \theta, \varphi),\\
&\dot{\theta} = \omega_1(I) - \varepsilon g x'_I \equiv \omega_1 + \varepsilon G_1(I, J, \theta, \varphi),\\
&\dot{\varphi} = \omega_2(J) - \varepsilon g x'_J \equiv \omega_2 + \varepsilon G_2(I, J, \theta, \varphi),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\omega_1(I)$, $\omega_2(J)$ – частоты несвязанных осцилляторов, F_1, F_2, G_1, G_2 – периодические по θ и φ функции с периодом 2π.

Основными проблемами в исследовании систем вида (5) являются резонансы и гомоклинические структуры. Резонансы возникают при выполнении условия соизмеримости частот ω_1, ω_2 невозмущенных нелинейных осцилляторов:

$$p\omega_1(I) = q\omega_2(J), \tag{6}$$

где p, q – взаимно простые целые числа. Данное условие можно записать в следующем виде

$$p\omega_1(h_1) = q\omega_2(h_2), \tag{7}$$

где h_1, h_2 – значения интегралов энергии невозмущенных уравнений.

Условие резонанса (7) для исходной системы (4) означает соизмеримость частот условно-периодических движений невозмущенной системы. Резонансами обусловлены существенные особенности поведения многочастотных систем. В частности, неинтегрируемость, а также неприменимость классических асимптотических методов, например, метода усреднения по углам.

Отметим, что при исследовании резонансов в системе (4) возникают следующие проблемы:

1) вычисление правых частей трехмерных усредненных систем;

2) исследование трехмерных усредненных систем на полнотории.

Первая проблема связана с нахождением решений невозмущенных осцилляторов и вычислением интегралов, определяющих усредненные системы. Как известно, если функции $f_k(x_k)$ в системе (4) являются полиномами степени 2 или 3, то эти решения выражаются через эллиптические функции. Если же функции $f_k(x_k)$ полиномы более высокой степени, то при построении решений невозмущенных уравнений возникает нерешенная до настоящего времени проблема обращения абелевых интегралов. Поэтому исследование конкретных систем вида (4) – сложная задача.

Вторая проблема приводит к исследованию класса трехмерных систем, правые части которых периодические функции по одной из координат. В данной главе рассматривается модельная усредненная система, отражающая свойства общих систем в случае, когда резонансные уровни совпадают с уровнями, в окрестности которых у несвязанных возмущенных уравнений существую предельные циклы. Несмотря на простой вид модельной системы, в ней возможны разнообразные типы аттракторов: состояния равновесия, предельные циклы разных типов, нерегулярные аттракторы.

Рассматривается $\sqrt{\varepsilon}$ – окрестность резонансной точки (I_{pq}, J_{pq}) (или в других обозначениях – окрестность точки (h_{1pq}, h_{2pq})), которая принадлежит резонансной кривой (7). Движение системы (5) в окрестности $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, J, \theta, \varphi) : I_{pq} - c\sqrt{\varepsilon} < I < I_{pq} + c\sqrt{\varepsilon}, J_{pq} - c\sqrt{\varepsilon} < J < J_{pq} + c\sqrt{\varepsilon}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ определяется частично усредненной системой (ЧУС). Вводя в системе (5) в невырожденном резонансном случае резонансную фазу $\theta = v - (q/p)\varphi$ и усредняя полученную систему по быстрой переменной φ, придем к трехмерной частично усредненной системе[1].

$$\begin{aligned} u'_k &= A_k(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[P_{k1}u_1 + P_{k2}u_2], \quad k = 1, 2, \\ v' &= b_{10}u_1 + b_{20}u_2 + \mu[b_{11}u_1^2 + b_{21}u_2^2 + Q_0(v; I_{pq}, J_{pq})], \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi p} F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi)d\varphi, \\ P_{k1} &= \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi p} (\partial F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi)/\partial I)d\varphi, \\ P_{k2} &= \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi p} (\partial F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi)/\partial J)d\varphi, k = 1, 2, \\ Q_0 &= \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi p} [G_1(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) + \\ &\quad + qG_2(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi)/p]d\varphi \\ b_{1j-1} &= \frac{d^j\omega_1(I_{pq})}{jdI^j}, \quad b_{2j-1} = \frac{q}{p}\frac{d^j\omega_2(J_{pq})}{jdJ^j} \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{9}$$

"штрих" означает производную по "медленному" времени $\tau = \mu t$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $b_{1j} = (d^{j+1}\omega_1(I_{pq})/dI^{j+1})/(j+1)!$, $b_{2j} = (q/p)(d^{j+1}\omega_2(J_{pq})/dJ^{j+1})/(j+1)!$, $j = 0, 1$. В силу невырожденности резонанса имеем $b_{10}^2 + b_{20}^2 \neq 0$. Фазовым пространством системы (8) является полноторий $D_2 \times S^1$ $(u_1, u_2 \in D_2 \subset R^2)$.

Справедлива следующая [*]

Теорема 1. *Правые части системы (8) периодические по v с наименьшим периодом $2\pi/p$.*

[1] [*] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах.-Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 420 с.

Функции $A_k(v; I_{pq}, J_{pq}), k = 1, 2$, можно представить в виде

$$A_k(v; I_{pq}, J_{pq}) = \widetilde{A}_k(v; I_{pq}, J_{pq}) + B_k, \tag{10}$$

где $B_1 = B_1(I_{pq})$,$B_2 = B_2(J_{pq})$. Функции $B_1(I), B_2(J)$ являются порождающими функциями Пуанкаре-Понтрягина для несвязанных, но возмущенных осцилляторов.

При получении усреднённой системы (8) мы пренебрегли членами $O(\mu^2)$, которые зависят как от переменных u_1, u_2, v, так и от φ.

Преобразуем систему (8) к более удобному виду. Сделаем в (8) замену

$$u_2 = (w - b_{10}u_1 - \mu Q_0(v; I_{pq}, J_{pq}))/b_{20} \tag{11}$$

и обозначим $u_1 = u$. В результате, пренебрегая членами $O(\mu^2)$, придем к системе

$$\begin{aligned} v' &= w + \mu[a_{20}u^2 + a_{02}w^2 + a_{11}wu] \\ w' &= A(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[C_1(v; I_{pq}, J_{pq})u + C_2(v; I_{pq}, J_{pq})w] \\ u' &= A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[C_3(v; I_{pq}, J_{pq})u + C_4(v; I_{pq}, J_{pq})w], \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} A &= b_{10}A_1 + b_{20}A_2, \\ a_{20} &= b_{11} + b_{21}b_{10}^2/b_{20}^2, \quad a_{02} = b_{21}/b_{20}^2, \quad a_{11} = -2(b_{21}b_{10}/b_{20}^2), \\ C_1 &= b_{10}P_{11} - (b_{10}^2/b_{20})P_{12} + b_{20}P_{21} - b_{10}P_{22}, \\ C_2 &= (b_{10}/b_{20})P_{12} + P_{22} + Q_0', \\ C_3 &= P_{11} - b_{10}P_{12}/b_{20}, \\ C_4 &= P_{12}/b_{20}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тем самым каждой резонансной точке (I_{pq}, J_{pq}) на линии (6) сопоставляется трехмерная усредненная система (12).

Решая систему

$$\begin{aligned} A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) &= 0 \\ A_2(v; I_{pq}, J_{pq}) &= 0 \\ p\omega_1(I_{pq}) + q\omega_2(J_{pq}) &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

находим, если это возможно, значения $v = v_0,\ I = I_{pq},\ J = I_{pq}$.

Резонанс, соответствующий точке (I_{pq}, J_{pq}) резонансной кривой (6), будем называть:

1. проходимым, если система (14) не имеет вещественных корней, причем $|B_k| > max_v|\widetilde{A}_k|$ хотя бы для одного значения k;

2. частично проходимым, если система (14) имеет вещественные корни, причем $B_k \neq 0$ хотя бы для одного значения k;

3. непроходимым, если система (14) имеет вещественные корни, причем $B_1 = B_2 = 0$.

Справедлива следующая теорема [*]

Теорема 2.

1. *Если резонанс (I_{pq}, J_{pq}) проходимый, то фазовые кривые усредненной системы (12) покидают при $t \to \pm\infty$ любую ограниченную область фазового пространства $R^2 \times S^1$.*

2. *Если резонанс (I_{pq}, J_{pq}) частично проходимый, то в фазовом пространстве усредненной системы (12) существуют множества начальных условий, которые отвечают ограниченным фазовым кривым (либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$), а также множества начальных условий, которые отвечают фазовым кривым, покидающим при $t \to \pm\infty$ любую ограниченную область фазового пространства $R^2 \times S^1$.*

3. *Если резонанс (I_{pq}, J_{pq}) непроходимый, причем $\delta = dB_1/dI + dB_2/dJ \neq 0$, $\Delta = (dB_1/dI)(dB_2/dJ) > 0$, то для любых начальных условий фазовые кривые усредненной системы (12) остаются (либо при $t \to +\infty$, если $\delta < 0$, либо при $t \to -\infty$, если $\delta > 0$) в ограниченной области фазового пространства.*

Как известно, простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия системы (12) соответствует устойчивое (неустойчивое) периодическое резонансное решение исходной системы, а устойчивому (неустойчивому) предельному циклу – двумерный устойчивый (неустойчивый) тор.

Система (12) в общем виде (с учетом в (12) членов $O(\mu)$) не изучена. Поведение фазовых кривых этой системы может быть достаточно сложным и, возможно, хаотическим. Чтобы прояснить проблемы, возникающие при исследовании системы вида (12), во второй главе диссертации рассмотрена упрощенная система [1]:

$$
\begin{aligned}
v' &= w \\
w' &= p_1 \sin v + p_2 + \mu(p_5 w + p_6 u) \\
u' &= p_3 \sin v + p_4 + \mu(p_7 w + p_8 u).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где $p_k, \quad k = 1..8$ – параметры. Очевидно, один из этих параметров всегда можно исключить. Положим $p_1 = -1$. Рассмотрим случай $p_2 = p_4 = 0$, когда несвязанные осцилляторы имеют предельные циклы для соответствующих значений $I = I_{pq}$, $J = J_{pq}$ $(B_1(I_{pq}) = 0, B_2(J_{pq}) = 0)$.

Итак, получаем следующую систему

$$
\begin{aligned}
v' &= w \\
w' &= -\sin(v) + \mu(p_5 w + p_6 u) \\
u' &= p_3 \sin(v) + \mu(p_7 w + p_8 u)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Проводится исследование системы (16): находятся состояния равновесия и изучаются их бифуркации; решается задача о глобальном поведении решений.

При численном счете, когда μ – фиксированное число, несмотря на простой вид модельной системы в ней наблюдаются наряду с регулярными аттракторами и нерегулярные аттракторы, а также петли седло - фокуса (аттрактор Шильникова).

Система (16) близка к трехмерной интегрируемой консервативной системе. Сделаем в системе (16) замену $u = z - p_3 w$. В результате получим систему

$$
\begin{aligned}
v' &= w \\
w' &= -\sin(v) + \mu[(p_5 - p_3 p_6)w + p_6 z] \\
z' &= \mu[(p_3 p_5 - p_3^2 p_6 + p_7 - p_3 p_8)w + (p_3 p_6 + p_8)z].
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Тогда невозмущенная система – это уравнение математического маятника $v'' + \sin v = 0$. Для этого уравнения стандартным образом можно перейти в колебательной и вращательной областях от переменных (w, v) к переменным действие-угол (L, ψ). Если записать в новых переменных систему (17), то придем к системам, у которых две медленных переменные L, z и одна быстрая ψ. К таким системам был применен метод усреднения. В результате в колебательной области получаем усредненную систему

$$\begin{aligned} \bar{L}' &= 8\mu(p_5 - p_3p_6)[(k^2(L) - 1)\mathbf{K}(k(L)) + \mathbf{E}(k(L))]/\pi \\ \bar{z}' &= \mu(p_8 + p_3p_6)z, \end{aligned} \tag{18}$$

а во вращательной области – систему

$$\begin{aligned} \bar{L}' &= \mu\left[\frac{4(p_5 - p_3p_6)}{\pi k(L)}\mathbf{E}(k(L)) \pm p_6\bar{z}\right] \\ \bar{z}' &= \mu\left[\pm\frac{\pi(p_3p_5 - p_3p_8 + p_7 - p_3^2p_6)}{k(L)\mathbf{K}(k(L))} + (p_8 + p_3p_6)\bar{z}\right], \end{aligned} \tag{19}$$

где $\mathbf{K}, \mathbf{E}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, k – их модуль.

Анализ систем (18) и (19) позволил провести глобальное исследование системы (16). Отметим, что каждому нетривиальному простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия системы (18) соответствует устойчивое (неустойчивое) периодическое решение системы (16).

В третьей главе рассматривается система двух уравнений Дюффинга - Ван дер Поля, которая принадлежит к классу систем, близких к нелинейным интегрируемым, и представляет собой систему двух слабо связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x \pm x^3 &= \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2y] \\ \ddot{y} + y + y^3 &= \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4x], \end{aligned} \tag{20}$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 – параметры, ε – малый положительный параметр. В рассматриваемых случаях, соответствующих разным знакам перед x^3 в первом уравнении, невозмущенные уравнения имеют ячейку, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. Случай 1 будем соотносить знаку "плюс" в первом уравнении (20), а случай 2 – знаку "минус".

Основными проблемами в исследовании связанных уравнений (20) являются резонансы, определяемые в (7), где h_1 и h_2 – значения интегралов энергии

$$\begin{aligned} H_1(x, \dot{x}) &\equiv \dot{x}^2/2 + x^2/2 \pm x^4/4 = h_1, \\ H_2(y, \dot{y}) &\equiv \dot{y}^2/2 + y^2/2 + y^4/4 = h_2. \end{aligned} \tag{21}$$

уравнений Дюффинга

$$\ddot{x} + x \pm x^3 = 0, \quad \ddot{y} + y + y^3 = 0. \tag{22}$$

Здесь $(h_1, h_2) \in D$, где $D = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_1 = (0, \infty), \Delta_2 = (0, \infty)$ в случае 1 и $\Delta_1 = (0, 0.25), \Delta_2 = (0, \infty)$ в случае 2.

Условие (7) определяет на плоскости (h_1, h_2) резонансные кривые. Оказывается, для большинства точек этих кривых структура резонансных зон простая – они являются "проходимыми". Лишь для некоторых точек некоторых резонансных кривых может существовать нетривиальная структура, связанная с существованием резонансных периодических движений. В случае 2 из-за существования невозмущенных сепаратрис возможно появление гомоклинического контура.

Поясним ситуацию с возникновением резонансов на примере случая 1, когда фазовые плоскости уравнений (22) заполнены замкнутыми фазовыми кривыми. Если взять начальные условия $x_0, \dot{x}_0$ вблизи уровня энергии $H_1(x, \dot{x}) = h_{10}$, а начальные условия для второго осциллятора вблизи уровня $H_2(y, \dot{y}) = h_{20}$ так, чтобы частоты движения на этих уровнях удовлетворяли условию (7), то получим резонансную ситуацию. В этом случае мы приходим к исследованию трехмерной системы вида (12), которую будем называть частично усредненной системой (ЧУС). В случае усреднения в (5) по обеим угловым координатам полученную усредненную систему будем называть полностью усредненной системой (ПУС).

В [2] была получена усредненная система первого приближения и указана структура системы второго приближения. Отметим, что правые части ЧУС первого и второго приближений получены в виде рядов, коэффициенты которых быстро убывают. При дальнейшем рассмотрении ЧУС в рядах оставим только первую гармонику. Верны следующие теоремы.

Теорема 3. *В случае 1 при p и q – нечетных, правые части частично усредненной системы имеют следующий вид*

$$\begin{aligned} A &= c_{01} \sin(pv) + c_{02}, \quad & A_1 &= c_{03} \sin(pv) + c_{04} \\ C_1 &= c_{11} \sin(pv) + c_{12}, \quad & C_2 &= c_{21} \sin(pv) + c_{22}, \\ C_3 &= c_{31} \sin(pv) + c_{32}, \quad & C_4 &= c_{41} \sin(pv), \end{aligned} \tag{23}$$

где c_{ij} - определенные постоянные, $i = 0, 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3.$

Теорема 4. *В случае 1 при четных p и/или q имеем $A(v; I_{pq}, J_{pq}) \equiv c_{02}$ и $A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) \equiv c_{04}$, где c_{02}, c_{04} – определенные постоянные.*

Теорема 5. *В случае 2 при p и q – нечетных, правые части частично усредненной системы имеют следующий вид*

$$\begin{aligned} A &= \overline{c}_{01} \cos(pv) + \overline{c}_{02}, \quad & A_1 &= \overline{c}_{03} \cos(pv) + \overline{c}_{04} \\ C_1 &= \overline{c}_{11} \cos(pv) + \overline{c}_{12}, \quad & C_2 &= \overline{c}_{21} \cos(pv) + \overline{c}_{22}, \\ C_3 &= \overline{c}_{31} \cos(pv) + \overline{c}_{32}, \quad & C_4 &= \overline{c}_{41} \cos(pv), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\overline{c}_{ij}$ - определенные постоянные, $i = 0, 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3.$

Теорема 6. *В случае 2 при четных p и/или q имеем $A(v; I_{pq}, J_{pq}) \equiv \overline{c}_{02}$ и $A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) \equiv \overline{c}_{04}$, где $\overline{c}_{02}$, $\overline{c}_{04}$ – определенные постоянные.*

В данной главе проводится анализ полученных частично усредненных систем на наличие состояний равновесия и устанавливается их тип.

Определение. *Будем говорить, что имеет место нетривиальная резонансная структура, если усредненная в окрестности резонанса система имеет простые состояния равновесия.*

В данной главе получены условия, при выполнении которых возникают нетривиальные резонансные структуры.

Резонансные структуры существенно зависят от того, совпадают ли выбранные замкнутые фазовые кривые в невозмущенных осцилляторах с уровнями, порождающими предельные циклы в несвязанных уравнениях. Решение данного вопроса связанно с понятием "синхронизации колебаний", которому в прикладных задачах уделяется значительное внимание.

В заключении третьей главы рассмотрено однопараметрическое семейство (20): в случае 1 зафиксированы параметры $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.5$; в случая 2 – $p_2 = 0.2$, $p_3 = 1.5$, $p_4 = 0.5$. Проводится анализ поведения фазовых кривых частично усредненных систем в зависимости от параметра p_1.

В четвертой главе рассматривается задача о глобальном поведении решений системы двух связанных уравнений Дюффинга - Ван дер Поля (20) [3]. Показано, что не для каждой резонансной точки (I_{pq}, J_{pq}) в частично усредненной системе (12) существуют простые состояния равновесия (периодические решения соответствующего периода в исходной системе). Обозначим через M_{pq} множество пар (p, q), для которых такие состояния равновесия существуют. Справедлива следующая теорема

Теорема 7. *При условии* $B_1(I_{pq})B_2(J_{pq}) \neq 0$ *множество* M_{pq} *не более чем конечно.*

Из данной теоремы следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на плоскости переменных действия (I, J) окрестности нетривиальных резонансов не пересекаются. По аналогии с 3/2 степенями свободы можно говорить о глобальном поведении решений. Поведение решений системы (20) в окрестности нерезонансной точки (I_0, J_0) определяется системой $\dot{u}_1 = \mu B_1(I_0), \quad \dot{u}_2 = \mu B_2(J_0)$ в случае, когда $B_1 B_2 \neq 0$. В связи с этим динамика системы (20) вне окрестностей нетривиальных резонансов фактически определяется полностью усредненной системой

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon B_1(I), \\ \dot{J} &= \varepsilon B_2(J), \end{aligned} \tag{25}$$

которая получается в результате перехода в системе (20) к переменным действие-угол и усреднения по двум угловым координатам.

Если зафиксировать точку M на плоскости (I, J) и соответственно, по одной точке на замкнутых фазовых кривых (21) и начать интегрировать систему (20), то фазовая точка начнет движение по соответствующей фазовой кривой. Если точка M не принадлежит окрестности резонансной точки, для которой частично усредненная система имеет простые состояния равновесия, то движение будет определяться траекторией полностью усредненной системой. В противном случае движение будет определяться частично усредненной системой.

Качественное поведение решений системы (25) нетрудно получить, ибо двумерная система разбивается на две одномерных системы. Так как у каждой системы имеется нетривиальное устойчивое состояние равновесия [2], то, соответственно, у двумерной системы будет существовать устойчивое состояние равновесия $O(I_0, J_0)$. В этом случае у каждого автоколебательного уравнения, получающегося из (20) при отсутствии связи ($p_2 = p_4 = 0$), существует устойчивый предельный цикл. Возможны два случая: 1) резонансный, когда $I_0 = I_{pq}$, $J_0 = J_{pq}$ и 2) нерезонансный. В резонансном случае в исходной системе будет существовать периодическое решение, в нерезонансном – двумерный устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой.

В приложении приведены программы, подготовленные с использованием Maple. Для численного анализа исходной и усредненных систем наряду с Maple была использована проргамма WInSet[2]. Численный счет использовался в первую очередь для иллюстрации полученных теоретических результатов. С использованием пакета Maple были подготовлены программы, которые выполняли следующие функции:

- построение резонансных кривых на плоскости переменных действия;
- нахождение коэффициентов для частично усредненной системы и полностью усредненной системы;
- сохранение найденных коэффициентов частично усредненной системы в специальный файл, необходимый для построения фазовых кривых частично усредненной системы с использованием программы WInSet;
- определение значения дивергенции векторного поля частично усредненной системы и динамики ее изменения;
- определение для частично усредненной системы выполнения условий на параметры, при которых происходят бифуркации состояний равновесия;
- построение области изменения параметров исходной системы, удовлетворяющих условию существования нетривиальных резонансных структур;
- построение траекторий движения полностью усредненной системы на плоскости переменных действия.

[2] Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. "Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем".-Москва-Ижевск: Изд-во Инст. компьют.исслед., 2003.-304 с.

Основные публикации автора по теме диссертации.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Morozov A.D. and Kondrashov R.E. On resonances in systems of two weakly connected oscillators// Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, No. 2, pp. 237-247.

2. Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д. К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля// Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №2, с.241-254.

3. Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д. О глобальном поведении решений системы двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля// Нелинейная динамика, 2011, Т.7, №3, с.437-449.

4. Кондрашов Р.Е. К исследованию систем двух уравнений Дюффинга - Ван дер Поля// Вестник ННГУ. №4.Часть 5.-Н.Новгород:Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011.-С. 2258-2259.

Прочие публикации:

5. Кондрашов Р.Е., Королев С.А., МорозовА.Д. К исследованию резонансов в системах с двумя степенями свободы// Межд. конф. И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы".-М.: Сборник тезисов, 2007.-С. 146.

6. Кондрашов Р.Е. О глобальном поведении решений системы двух уравнений Дюффинга-Ван дер Поля//Труды конф. "Модели, методы и программные средства Н.Новгород, изд-во Нижегородского ун-та, 2007, с. 208.

7.Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д. К исследованию некоторых классов трехмерных систем, возникающих в теории нелинейного резонанса// Межд. конф. Л.С. Понтрягина "Дифф. уравн. и топология".-М.: Тезисы докладов, 2008.-С. 144.

8. Кондрашов Р.Е., Королев С.А., Морозов А.Д. О неконсервативных системах с двумя степенями свободы, близких к интегрируемым// Тезисы докл. Межд. Конф. по дифф. уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2-7 июля 2010, с. 109.

9. Dragunov T.N., Kondrashov R.E., Morozov A.D. On visualization of resonance structures in dynamical systems with two degrees of freedom// Proceedings of 3-rd Int. Conf. on Nonlinear Dynamics, 2010, Kharkov, Ukraine, pp.62-66.