На правах рукописи

Новоженин Алексей Владимирович

Оптимальное управление системами на счетномерном симплексе

Специальность: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород

2012

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Кузенков Олег Анатольевич

Официальные оппоненты:
Рязанцева Ирина Прокофьевна,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета им Р.Е. Алексеева

Кузнецов Юрий Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования экономических систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Ведущая организация:
Удмуртский государственный университет,
математический факультет.

Защита состоится 10 мая 2012г. в 16:20 час. на заседании диссертационного совета Д. 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу 603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, корп.2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ННГУ

Автореферат разослан "..."......... 2012г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.166.06,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.И. Лукьянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Подмножество пространства абсолютно суммируемых последовательностей $\mathbf{l}_1$, состоящее из последовательностей с неотрицательными компонентами, сумма ряда из которых равна единице, называется стандартным счетномерным симплексом:

$$S = \left\{ (z_1, \ldots, z_n, \ldots): \quad z_i \geq 0, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} z_i = 1 \right\}. \tag{1}$$

В дальнейшем счетные системы дифференциальных уравнений, для которой решение любой задачи Коши в каждый момент времени принадлежит симплексу S (1) при условии, что начальные условия принадлежат симплексу S, будем называть системами на стандартном счетномерном симплексе.

Эти системы используются для моделирования разнообразных реальных объектов и процессов. В первую очередь к ним относятся случайные, в том числе марковские процессы со счетным числом состояний и непрерывным временем.

Счетные системы дифференциальных уравнений активно используются в решении задач математической физики. В частности, используя метод Фурье, от дифференциальных уравнений в частных производных можно перейти к рассмотрению счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов их решения. Как правило, значения фазовых координат в системах, описывающих реальные процессы, ограничены. В таком случае решение исходной системы принадлежит некоторому ограниченному замкнутому множеству, например, части сферы, эллипсоида в счетномерном пространстве и т.п., которое можно взаимнооднозначно и непрерывно отобразить на стандартный счетномерный симплекс. Тогда исходная система может быть сведена к системе на стандартном счетномерном симплексе.

Системы, описывающие процессы коагуляции, химической кинетики (со счетным числом реагентов), процессы количественного распределения особей биологического вида по счетному множеству генотипов также могут быть представлены в виде систем дифференциальных уравнений на стандартном счетномерном симплексе.

Несмотря на то, что дифференциальные уравнения на стандартном счетномерном симплексе можно рассматривать как частный случай дифференциального уравнения в банаховом пространстве, существует много специфических свойств, характерных только для уравнений на счетномерном симплексе и обуславливающих их дополнительные возможности для описания реальных процессов. Уже для конечномерного случая известно, что системы на симплексе имеют ряд важных особенностей по сравнению с системами общего вида. Математические особенности систем на стандартном конечномерном симплексе изучались в работах О.А. Кузенкова, Е.А. Рябовой.

По сравнению с теорией динамических систем на конечномерном симплексе на данный момент теория систем на счетномерном симплексе развита существенно менее полно. Так же, как и в конечномерном случае, при исследовании счетных систем дифференциальных уравнений встают вопросы о критерии принадлежности классу систем на стандартном счетномерном симплексе, формах представления таких систем, методиках решения задачи Коши. Но перенос результатов, полученных для конечномерного случая, на счетномерный случай нетривиален, он наталкивается на значительные трудности, поскольку, в отличии от конечномерного счетномерный симплекс не является компактным множеством. В связи с этим изменяются формулировки и доказательства ряда теорем.

Во многих прикладных задачах приходится осуществлять целенаправленное воздействие на объекты, описываемые системами с распределенными параметрами, в том числе и системами уравнений на стандартном счетномерном симплексе, как, например, в задачах оптимального управления случайными процессами, возникающих в инженерном деле, экономике, экологии.

Задачи оптимального управления счетной системой дифференциальных уравнений часто возникают при оптимизации процессов теплопроводности, играющих важную роль в многочисленных технологических производствах: в металлургии и энергетике, при сушке влажных материалов, термической обработке в томильных и индукционных печах, в ядерных реакторах. Эти производства являются весьма дорогостоящими, и экономическая целесообразность диктует поиск наиболее эффективного режима их эксплуатации. Нередко приходится рассматривать задачи оптимального управления нагревом тела с фазовыми ограничениями. В ряде случаев они сводятся к оптимизационным задачам для счетных систем дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями.

Решение задач оптимального управления для нелинейных систем является сложной проблемой, и, невзирая на огромное количество исследований, не создано универсального метода, который мог бы дать аналитическое решение для всех случаев. Современные исследования направлены на разработку методов, наиболее приспособленных для решения определенных классов задач, максимально учитывающих особенности этих классов.

Эффективным в задачах оптимального управления является использование управления с обратной связью. Этот тип управления более помехозащищен по сравнению с программируемым управлением. Практическая целесообразность приводит в этом случае к естественному изменению ограничения на ресурс управления: ограничивается не абсолютная величина мощности воздействия, а коэффициент обратной связи.

Как правило, задачи оптимального управления распределенными системами не поддаются полному аналитическому исследованию и требуют применения численных методов и современных ЭВМ (аналитическое решение задач оптимального управления возможно лишь в простых случаях, которые далеки от запросов современной практики). Среди всех методов можно выделить класс, общий подход для которого состоит в том, что исходная задача оптимального управления, описываемая системой уравнений с частными производными сводится к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд Фурье, которая в свою очередь аппроксимируется конечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. К этому классу относятся, например, метод моментов, финитного управления и др. Отличаются они друг от друга способом решения получаемых аппроксимирующих задач. В.И. Плотниковым для этой цели был использован принцип максимума Л.С. Понтрягина (необходимые условия оптимальности) при определении наискорейшего режима нагрева твердого тела до заданной температуры. Как было показано А.И. Егоровым, этот метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с широко известным методом моментов, в частности, большей устойчивостью относительно погрешностей в промежуточных вычислениях.

Проблема отыскания наилучшего управления системами на стандартном счетномерном симплексе приводит к оптимизационной задаче относительно дифференциального уравнения, заданного в банаховом пространстве $\mathbf{l}_1$ абсолютно суммируемых последовательностей, с фазовыми ограничениями типа равенства $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i = 1$ и неравенства $z_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, \infty}$. Задачи с фазовыми ограничениями являются наиболее трудным классом задач оптимального управления даже для конечномерного случая евклидова пространства в частности из-за того, что при этом принцип максимума формулируется через функцию Гамильтона, содержащую неопределенные меры.

Если поставить общую задачу оптимального управления для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с фазовыми ограничениями, то она будет чрезвычайно сложной. Является перспективным решение задачи оптимального управления, опирающегося на специфические особенности системы на счетномерном симплексе, позволяющие в той или иной степени обойти указанные затруднения. С одной стороны, как уже отмечалось выше, с помощью динамических систем на стандартном счетномерном симплексе может быть описано значительное число процессов физики, химии, биологии, теории массового обслуживания, что обеспечивает общность получаемых математических результатов, с другой стороны, системы на стандартном счетномерном симплексе обладают важной спецификой по сравнению с общим случаем банахова пространства, что дает возможность получить простое и удобное решение поставленной задачи.

Сказанное выше позволяет сделать вывод об актуальности проблемы изучения систем на стандартном счетномерном симплексе и исследования вопросов оптимального управления для таких систем на ограниченных и неограниченных интервалах времени.

Цель работы состоит в установлении формы систем на стандартном счетномерном симплексе; получении необходимых условий оптимальности операторного управления в форме принципа максимума для квазилинейной системы на стандартном счетномерном симплексе; в решении конкретных задач оптимального управления процессами коагуляции, случайным процессом и оптимального управления нагревом тела с обратной связью при наличии фазового ограничения; а также в обосновании необходимых условий достижения абсолютного максимума критерием качества на оптимальном управлении с обратной связью в задаче нагрева тела до заданного состояния с фазовыми ограничениями.

Методы исследования. В диссертации использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, а также теории оптимального управления.

Научная новизна и основные результаты. Основные результаты, которые выносятся на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

– доказан критерий принадлежности счетной системы дифференциальных уравнений классу систем на стандартном счетномерном симплексе; установлены формы представления таких систем (в том числе управляемых); доказаны условия, при которых счетную систему дифференциальных уравнений можно свести к системе на стандартном счетномерном симплексе, либо выделить ее в качестве подсистемы;

– обоснована связь между решением задачи Коши для системы на стандартном счетномерном симплексе и решением вспомогательной однородной системы;

– доказаны необходимые и достаточные условия выполнения в рассматриваемых системах предельного свойства, заключающегося в стремлении решения системы уравнений с течением времени к вершине симплекса;

– выведены необходимые условия оптимальности операторного управления в оптимизационной задаче для квазилинейной системы на счетномерном симплексе;

– решены конкретные задачи оптимального управления процессами коагуляции и оптимального управления случайными процессами;

– решена задача оптимального управления нагревом тела при сохранении среднеквадратичной нормы решения с помощью обратной связи;

– для задачи оптимального управления нагревом тела при сохранении среднеквадратичной нормы решения найдены ограничения на область управления, при которых критерий качества, характеризующий степень отклонения температурного распределения от k-ой собственной функции, достигает своего абсолютного максимума на неограниченных интервалах времени.

Степень обоснования результатов. Все научные положения и выводы диссертационной работы строго математически обоснованы и сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, отдельные результаты могут быть использованы в прикладных исследованиях.

Проведенное исследование систем дифференциальных уравнений на счетномерном симплексе (особенно доказанные теоремы о представлении, разрешимости, выделении системы на симплексе) позволяет сводить решение задачи Коши для этих систем к решению более простых вспомогательных однородных систем. Изучение предельного поведения решения задачи Коши для систем на счетномерном симплексе, а именно доказательство необходимых и достаточных условий стремления решения системы уравнений с течением времени к вершине симплекса, является необходимым этапом в изучении абсолютной глобальной устойчивости вершины симплекса. Эти исследования служат основой для построения области управляемости таких систем на неограниченных интервалах времени в случае принадлежности начала координат границе рассматриваемой области, а также для исследования предельных возможностей управляющего воздействия, позволяющих оценить, достаточен ли запас управляющего воздействия для достижения абсолютного максимума критерием качества на неограниченных интервалах времени. Полученные необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума являются теоретической базой для аналитического или численного решения задач оптимального управления указанными системами, что продемонстрировано в диссертации на ряде конкретных примеров. Разработанная методика учета фазовых ограничений имеет значение для решения реальных задач оптимального нагрева тела при сохранении постоянной внутренней энергии тепла, играющих важную роль в многочисленных технологических процессах. Эта методика позволяет особым образом учесть возникающие фазовые ограничения до применения принципа максимума, тем самым позволяя обойти математические трудности, связанные с возникновением неопределенных мер Лебега-Стильтьеса в сопряженных уравнениях и функции Гамильтона.

Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс в рамках специального курса "Теория меры"и вошли составной частью в учебное пособие (Кузенков О.А., Новоженин А.В. Уравнение динамики меры: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госунивеситета, 2010), предназначенного для студентов вузов, обучающихся по специальностям 010501 "Прикладная математика и информатика"и 010400 "Фундаментальная информатика и информационные технологии". Справка о внедрении результатов имеется.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Итоговая научная конференция учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства" (Нижний Новгород, 2007); II Международная научно-техническая конференция молодых специалистов, аспирантов и студентов "Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем"(Пенза, 2008); III Международная научно-техническая конференция "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем"(Пенза, 2008); Всероссийская конференция молодых ученых "Технологии Microsoft в теории и практике программирования"(Нижний Новгород, 2010); XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(конференция Пятницкого) (Москва, 2010); XV International Conference "Dynamical System modeling and stability investigation"(Kyiv, 2011), кроме этого результаты диссертационной работы докладывались на научном семинаре кафедры численного и функционального анализа 26.04.2011.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано в научных журналах и сборниках - 6 статей, в материалах конференций и семинарах - 4 работы, 1 учебное пособие. Из них в изданиях, рекомендованных ВАК, опубликовано 3 работы. В работах, выполненных совместно с научным руководителем О.А. Кузенковым, формулировки утверждений и их доказательства даны диссертантом. О.А. Кузенкову принадлежит постановка задач исследования и общее руководство. В совместном с О.А. Кузенковым учебном пособии А.В. Новоженину принадлежат разделы 1.1, 1.3, 3.7.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав. Библиография включает 203 наименования. Общий объем диссертации составляет 119 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Системы дифференциальных уравнений на стандартном счетномерном симплексе. В первой главе диссертации изучаются свойства счетных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t,x), \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{2}$$

$x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t),\dots)$ – функция вещественного переменного со значениями в $\mathbf{l}_1$, $F(t,x) = (F_1(t,x_1,\dots,x_n,\dots),\dots,F_n(t,x_1,\dots,x_n,\dots),\dots)$, $F(t,x) : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$, с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0,\dots). \tag{3}$$

Решением системы (2) при начальных условиях (3) считается непрерывно дифференцируемая функция $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t),\dots)$, удовлетворяющая при $t > t_0$ уравнениям (2) и начальным условиям (3). Производная понимается в сильном смысле, т.е. производной в точке τ называется элемент $\dot{x}(\tau) = (\dot{x}_1(\tau),\dots,\dot{x}_n(t),\dots)$, принадлежащий пространству $\mathbf{l}_1$, к которому сильно сходится разностное отношение $\delta^{-1}[x(\tau+\delta) - x(\tau)]$, когда $\delta \to 0$.

В случае, когда имеет место непрерывная зависимость решения системы (2) от параметра, показано, что решение системы (2) удовлетворяет тождеству $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \equiv 1$ при любых начальных условиях, принадлежащих стандартному счетномерному симплексу S, тогда и только тогда, когда в точках симплекса сумма правых частей (2) равняется нулю.

В параграфе 1.3 показано, что в некоторых случаях произвольную систему вида (2) (например, когда ее решение принадлежит некоторому ограниченному множеству) можно свести к системе на стандартном счетномерном симплексе или выделить систему на симплексе в качестве подсистемы. Выводятся методы приведения к системе на стандартном счетномерном симплексе (метод нормирующей замены, метод степенной замены).

В параграфе 1.4. рассматриваются формы представления систем на стандартном счетномерном симплексе, играющие важную роль в процессе решения этих систем.

Теорема 1. *Любая система* (2) *на стандартном счетномерном симплексе может быть представлена в виде:*

$$\dot{x}_i = \Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(t,x),\ \ i = \overline{1,\infty}, \tag{4}$$

где $\Phi(t,x) = (\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x), \ldots)$ – *оператор, действующий из* $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{l}_1$ *в* $\mathbf{l}_1$*, функции* $\Phi_i(t,x)$ *непрерывные по* t*, квазиположительные, положительно однородные по переменным* x*.*

Благодаря представлению системы на стандартном счетномерном симплексе в виде (4) каждой такой системе можно поставить во взаимно-однозначное соответствие вспомогательную однородную систему дифференциальных уравнений. При этом решение исходной системы выражается через решение вспомогательной посредством нормирующей замены. Таким образом, в ряде случаев можно облегчить процесс решения системы на стандартном счетномерном симплексе, сведя его к интегрированию вспомогательной однородной системы. Справедлив и обратный переход по решению системы на стандартном счетномерном симплексе, заданной в виде (4), можно восстановить решение вспомогательной однородной системы.

Теорема 2. *Пусть система на стандартном симплексе задана в виде* (4)*, ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t,x)$ *равномерно сходится по* t*. Пусть существует единственное, нетривиальное в каждый момент времени, непрерывно зависящее от параметра решение* $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t), \ldots) \in \mathbf{l}_1$ *вспомогательной задачи Коши*

$$\dot{\xi}_i = \Phi_i(t,\xi), \quad i = \overline{1,\infty}, \quad \xi(t_0) = x^0.$$

Тогда решение системы (4)*, удовлетворяющее начальным условиям* $x(t_0) = x^0 \in S$*, определяется формулой* $x_i(t) = \xi_i(t) / \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j(t)$*,* $i = \overline{1,\infty}$*.*

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \Phi_i(t,x) - x_i f(t,x), \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{5}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{6}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots)$, – функция действительного числового аргумента t со значениями в пространстве $\mathbf{l}_1$, $x(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{l}_1$; оператор $\Phi(t,x)$ линейный со всюду плотной в $\mathbf{l}_1$ областью определения $D(\Phi)$; $f(t,x)$ – функция вещественного переменного t и $x \in \mathbf{l}_1$ со значениями в $\mathbf{R}^1$, непрерывная по совокупности аргументов, однородная порядка $k > 0$ по x.

Наряду с этим рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\dot{z}_i = \Phi_i(t,z), \tag{7}$$

$$z_i(t_0) = x_i^0. \tag{8}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть задача* (7), (8) *имеет единственное решение* $z(t)$ *в некотором промежутке* $t_0 \leqslant t \leqslant T$, *и существует непрерывная функция*

$$q = \left(\int\limits_{t_0}^{t} k f(\tau, z(\tau)) d\tau + 1 \right)^{1/k}. \tag{9}$$

Тогда существует единственное решение $x(t)$ *задачи* (5), (6). *При этом справедливы соотношения*

$$x_i = \frac{z_i}{q}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Представляет интерес исследование предельного поведения решения задачи Коши для систем на стандартном счетномерном симплексе.

В исследованиях предельного поведения решения системы (2) на стандартном симплексе с начальными условиями (3) большую роль играет следующее свойство:

Определение 1. Будем говорить, что система (4) на стандартном счетномерном симплексе S обладает *предельным свойством A*, если найдется индекс j такой, что независимо от начальных условий, принадлежащих симплексу, с ненулевой j-й координатой, соответствующая j-я компонента решения стремится к единице при t, стремящемся к бесконечности, в то время как все остальные компоненты стремятся к нулю.

Не уменьшая общности, можно считать $j = 1$ в противном случае достаточно переобозначить переменные. При этом $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 1$, если $x_1(0) \neq 0$.

Теорема 4. *Для того, чтобы система* (4), *где функции* $\Phi_i(t,x)$, $i=\overline{1,\infty}$ *удовлетворяют условию*

$$\Phi_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n,\ldots)=0, \tag{10}$$

обладала предельным свойством А, *необходимо, чтобы вдоль любой фазовой траектории системы* (4), *соответствующей начальным условиям* $x(t_0)=x^0\in S$, *удовлетворяющим неравенствам* $0<x_i^0<1$, $i=\overline{1,\infty}$, *были справедливы равенства*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\Phi_1(t,x(t))}{x_1(t)}-\frac{\Phi_i(t,x(t))}{x_i(t)}\right)dt=+\infty.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы система, заданная уравнениями* (4), (10), *где ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Phi_i(t,x)$ *сходится равномерно по* t, *обладала* предельным свойством А, *необходимо и достаточно, чтобы вдоль любой фазовой траектории системы* (4), *соответствующей начальным условиям* $x(t_0)=x^0\in S$, *удовлетворяющим неравенствам* $0<x_i^0<1$, $i=\overline{1,\infty}$ *были справедливы равенства*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\Phi_1(t,x(t))}{x_1(t)}-\frac{\sum\limits_{i=2}^{\infty}\Phi_i(t,x(t))}{\sum\limits_{i=2}^{\infty}x_i(t)}\right)dt=+\infty.$$

Теорема 6. *Для того, чтобы система* (4), (10) *обладала* предельным свойством А *достаточно, чтобы были справедливы неравенства:*

$$\left\langle\frac{\Phi_1}{x_1}\right\rangle>\left\langle\frac{\sum\limits_{i=2}^{\infty}\Phi_i}{\sum\limits_{i=2}^{\infty}x_i}\right\rangle$$

вдоль любой фазовой траектории системы (4), *соответствующей начальным условиям* $x(t_0)=x^0\in S$, *удовлетворяющим неравенствам* $0<x_i^0<1$, $i=\overline{1,\infty}$. *Здесь символом* $\langle\xi\rangle$ *обозначается временное среднее величины* ξ, *определяемое следующим образом:*

$$\langle\xi\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T-t_0}\int\limits_{t_0}^{T}\xi(t)dt.$$

В параграфе 1.6 полученная теория применяется для исследования систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы коагуляции.

Принцип максимума для управляемых систем на стандартном счетномерном симплексе. Вторая глава диссертации посвящена выводу необходимых условий оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина для управляемых систем на стандартном счетномерном симплексе.

Рассматривается управляемая система на стандартном счётномерном симплексе вида:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(t)x_j - x_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j + \sum_{j=1}^{\infty} u_{kj}(t)x_j \right), \ i = \overline{1, \infty}, \tag{11}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \tag{12}$$

где $t \in R^1$ – переменная времени, $x(t): \ \mathbf{R}^1 \to \mathbf{l}_1$, $x = x(t)$ – функция, зависящая от времени. Матрица $U(t) = (u_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, \infty}$, в каждый момент времени задает линейный ограниченный оператор U, принадлежащий некоторому множеству $Y \subset [\mathbf{l}_1]$. Здесь через $[\mathbf{l}_1]$ обозначается множество линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathbf{l}_1$ в $\mathbf{l}_1$. Предполагается, что функция $U(t)$ кусочно-непрерывная. Матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, \infty}$ задает линейный оператор L. Рассматривается задача, при различных предположениях относительно оператора L:

1) L – линейный ограниченный оператор, $L : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$.

2) L – линейный замкнутый оператор, $L : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$, резольвента $R(\lambda, L)$ которого удовлетворяет условию $\|[R(\lambda, A)]^n\| \leqslant M\lambda^{-n}, \ \lambda > 0, \ n = 1, 2, \ldots$, где M – некоторая константа, значения λ принадлежат резольвентному множеству оператора.

Пусть время управления T фиксировано. Заданы функционалы $f_{i1}(z, t) : \mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, $f_{i2}(U, t) : [\mathbf{l}_1] \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, $\phi_i(z) : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{R}^1$, $i = \overline{0, k}$, непрерывные по совокупности своих переменных, $\partial f_{i1}/\partial z$, $\partial \phi_i/\partial z$ – их производные по Гато, непрерывные по совокупности своих переменных, удовлетворяющие условию Липшица по переменной z, k – некоторая константа. Введем в рассмотрение функционалы вида:

$$J_i = \int_0^T (f_{i1}(z(t), t) + f_{i2}(U(t), t))dt + \phi_i(z(T)), \quad i = \overline{0, k}. \tag{13}$$

Требуется найти функцию $U(t)$, кусочно-непрерывную, принимающую значение из множества Y, для которой выполняются условия

$$J_i[U] \leqslant 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad J_0 \to \min. \tag{14}$$

Наряду с матрицами (a_{ij}) и $(u_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, \infty}$, можно рассмотреть транспонированные матрицы $(a_{ij})^T$, $(u_{ij}(t))^T$. Матрица $(u_{ij}(t))^T$ задает сопряженный оператор U^*. Если выполнены условие 1) или 2), то матрица $(a_{ij})^T$ тоже задает сопряженный оператор L^*.

Для рассматриваемой задачи справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть выполнены все предположения для задачи* (11)–(14). *Для того, чтобы матричная функция* $U(t) = (u_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, \infty}$, *задавала оптимальное управ-*

ление, необходимо существование нетривиального набора неотрицательных констант $\mu_0, \ldots, \mu_k$ *такого, чтобы функция* $H_t[U] = c(t)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\psi_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}u_{ij}x_j^0 - \sum\limits_{j=0}^{k}\mu_j f_{j2}(U,t)$ *принимала минимальное во множестве* $Y \subset [\mathbf{l}_1]$ *значение на элементе* $U_0(t)$*:* $H_t[U_0(t)] = \min\limits_{U\in Y\subset[\mathbf{l}_1]} H_t[U]$*, за исключением точек разрыва функции* $U(t)$*, а также чтобы выполнялись соотношения* $\mu_1 J_1[U_0] = \cdots = \mu_k J_k[U_0] = 0$*. Здесь функция* $c(t)$ *— решение задачи*

$$\dot{c}(t) = c(t)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}x_j + \sum_{j=1}^{\infty}u_{kj}(t)x_j\right), \quad c(0) = 1;$$

функция $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots)$ *удовлетворяет сопряженной системе уравнений*

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=1}^{\infty}a_{ji}\psi_j - \sum_{j=1}^{\infty}u_{ji}\psi_j - \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{n=0}^{k}\mu_n f_{n1}(x^0(t), t),$$

и условиям трансверсальности

$$\psi(T) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{k}\mu_n\phi_n(x^0(T)).$$

Способы использования полученных необходимых условий оптимальности проиллюстрированы на конкретных задачах управления случайными процессами. В ходе решения этих задач определяется структура оптимального управления и производится его расчет с помощью численных методов.

Оптимальное выделение заданной гармоники при сохранении постоянной суммы фазовых координат. В третьей главе диссертации рассматривается управляемый процесс распространения тепла в твердом неоднородном теле при отсутствии потоков тепла через границу, описываемый линейным параболическим уравнением второго порядка со вторыми однородными краевыми условиями.

Рассматривается управляемый процесс на множестве $Q = \Omega \times (0, T)$:

$$z_t = \frac{1}{2}(\triangle z + w), \quad z(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = 0, \tag{15}$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Σ; $\partial/\partial n|_{\Sigma}$ – производная по конормали к границе Σ, $\varphi \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, w – некоторое управляющее воздействие из $\mathbf{L}_2(Q)$, кусочно-непрерывное по t.

Предполагается, что

$$\int\limits_{\Omega}\varphi^2(x)dx = 1. \tag{16}$$

Функцию $z(x,t)$ можно представить в виде ряда Фурье по системе v_n собственных функций оператора $\triangle$: $z(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_n(t)v_n(x)$, где $\zeta_n(t)$ – коэффициенты Фурье функции z.

Требуется найти функцию $w(x,t)$, на которой реализуется минимум функционала

$$J = -\left(\int\limits_{\Omega} z(x,T)v_k(x)dx\right)^2, \tag{17}$$

и при этом в каждый момент времени выполняется условие

$$\int\limits_{\Omega} z^2(x,t)dx = 1. \tag{18}$$

Поставленная задача сводится к задаче оптимального управления для счетной системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье:

$$\frac{d\zeta_n}{dt} = \frac{1}{2}(-\lambda_n\zeta_n + \eta_n) \quad \zeta_n(0) = \varphi_n, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2(t) = 1, \quad \zeta_n(t) \geqslant 0, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$J = -\zeta_k^2(T) \to \min, \tag{21}$$

где η_n, φ_n – коэффициенты Фурье функций w, φ соответственно, λ_n – система собственных чисел оператора $\triangle$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $\lambda_n \geqslant 0$.

Для выполнения фазового ограничения (20) предлагается в качестве управляющих функций взять величины

$$\eta_n = \omega_n\zeta_n - \zeta_n \sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda_i + \omega_i)\zeta_i^2, \tag{22}$$

где $\omega_n(t)$ – кусочно-непрерывные функции времени, последовательность которых в каждый момент времени суммируема с квадратом и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_n(t))^2 \leqslant c^2, \tag{23}$$

где c – константа. Форме (22) соответствует управление вида:

$$w = u * z - z((u * z, z) + (\triangle z, z)),$$

где u – некоторое управляющее воздействие из $\mathbf{L}_2(Q)$, кусочно-непрерывное по t. Под операцией $u * z$ понимается операция свертки:

$$(u * z)(x,t) = \int\limits_{\Omega} u(\xi)z(x-\xi)d\xi, \quad x,\xi \in \Omega.$$

В этом случае методами, изложенными в параграфе 1.3, система (19), (22) сводится к управляемой системе на стандартном счетномерном симплексе, что позволяет для ее решения применять доказанную теорему 7.

В ходе решения определяется структура оптимального управления и на основе полученной информации строится численный метод.

Для приближенного построения решения рассматривается последовательность вспомогательных аппроксимирующих конечномерных задач: управлять системой

$$d\zeta_n/dt = \frac{1}{2}(-\lambda_n + \omega_n)\zeta_n - \frac{1}{2}\zeta_n \sum_{i=1}^{M}(-\lambda_i + \omega_i)\zeta_i^2, \quad n = 1, \ldots, M, \tag{24}$$

$$\zeta_n(0) = \varphi_n \equiv \varphi_{Mn}, \quad n = 1, \ldots, M-1, \quad \zeta_M(0) = 1 - \sum_{n=1}^{M-1} \varphi_n \equiv \varphi_{MM} \tag{25}$$

при выполнении ограничения на управляющие параметры

$$\sum_{n=1}^{M} \omega_n^2 \leqslant c^2 \tag{26}$$

так, чтобы минимизировать функционал (21)

Теорема 8. *Пусть* $\nu_M = (\omega_{M1}, \ldots, \omega_{MM}, 0, 0, \ldots)$ *– последовательность, первые* M *компонент которой представляют вектор оптимального управления в* M*-ой аппроксимирующей задаче, а остальные нули. Последовательность* ν_M *оптимальных управлений задачи* (24) – (26), (21) *сходится к оптимальному управлению* ν_0 *задачи* (19) – (23) *слабо в пространстве* $\mathbf{l}_2$*, соответствующая последовательность решений* $w_M = (\zeta_1, ..., \zeta_M, 0, 0, \ldots)$ *сходится к решению задачи* (19) – (23) w_0*, отвечающему управлению* ν_0*, сильно в пространстве* $\mathbf{l}_2$*.*

Для иллюстрации использования полученного численного метода на ЭВМ был произведен ряд экспериментов. Рассматривалась поставленная задача оптимального управления для процессов распространения тепла в стержне и круглой пластине. В ходе решения этих задач определена структура оптимального управления и произведен его расчет с помощью выведенного численного метода, а также произведен анализ полученных результатов.

Основные публикации по теме диссертации.

1. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Необходимые условия оптимальности для линейных управляемых систем в банаховом пространстве // Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства". Нижний Новгород, – 2007. – С. 230 – 232.

2. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Оптимальное выделение заданной гармоники при сохранении суммы фазовых координат // Сборник статей второй международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов "Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем". Пенза, – 2008. – С. 20 – 23.

3. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Принцип минимума для задачи оптимального выделения заданной гармоники // Сборник статей третьей международной научно-технической конференции "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем". Пенза, – 2008. – С. 56 – 58.

4. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Системы дифференциальных уравнений на счетномерном симплексе // "Вестник" Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 3. – С. 145 – 151.

5. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Принцип минимума для класса квазилинейных управляемых систем в банаховом пространстве // Материалы всероссийской конференции молодых ученых "Технологии Microsoft в теории и практике программирования". Нижний Новгород, – 2010. – С. 235 – 236.

6. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Оптимальное управление для квазилинейных управляемых систем в банаховом пространстве // Тезисы докладов XI международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва, – 2010. – С. 226 – 227.

7. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Уравнение динамики меры: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госунивеситета, 2010.

8. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Принцип минимума для оптимального операторного управления // XV International Conference "Dynamical System modeling and stability investigation Abstracts of conference reports, Kyiv, Ukraine, – 2011. – P. 374.

9. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Системы отбора на счетномерном симплексе // "Вестник" Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – № 3. – С. 92 – 98.

10. Новоженин А.В. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем в банаховом пространстве // "Вестник" Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – № 4. – С. 173 – 178.

11. Кузенков О.А., Новоженин А.В. Оптимальное операторное управление в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 132 – 142.