На правах рукописи

Стародубровская Наталья Сергеевна

БЕЗОПАСНЫЕ ЗОНЫ ОБЛАСТЕЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ АФФИННО-УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород
2012

Работа выполнена на кафедре численного и функционального анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент Бутенина Наталия Николаевна.

Официальные оппоненты:
Ризниченко Галина Юрьевна, доктор физико-математических наук, профессор, МГУ им. М. В. Ломоносова, профессор.
Савельев Владимир Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, доцент.

Ведущая организация:
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.

Защита состоится “.......” .... 2012 г. в .... часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 при Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, электронный адрес: http:// www.unn.ru.

Автореферат разослан “.......”............. 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.06
кандидат физ.-мат. наук,
доцент В. И. Лукьянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Данная работа посвящена изучению областей управляемости и зон иммунитета (максимальных безопасных зон областей управляемости) нелинейных управляемых динамических систем (УДС) второго порядка с аффинным управлением. (Безопасной зоной области управляемости будем называть подмножество этой области, граница которого допустимыми траекториями пересекается только вовнутрь). Исследование зон иммунитета тесно связано с исследованием областей управляемости и достижимости и является необходимым элементом решения задач реализации тех либо иных стационарных режимов работы УДС.

Проблема изучения множеств управляемости и достижимости – одна из основных в теории управляемых динамических систем.

К настоящему времени достаточно полно разработана теория управляемости линейных систем. Р. Калманом введено понятие управляемости и получены критерии управляемости линейных систем с неограниченным управлением. Вопросы управляемости и достижимости линейных систем при наличии ограничений на управление рассматривались Н. Н. Красовским, Р. Габасовым и Ф. М. Кирилловой, А. М. Формальским, И. В. Гайшуном, Ю. М. Семеновым, А. И. Овсеевичем и Т. Ю. Фигуриной, С. Ф. Николаевым и Е. Л. Тонковым и другими.

Большое число работ посвящено изучению билинейных управляемых динамических систем. Указанные системы исследовались К. Лобри, С. В. Емельяновым, С. К. Коровиным и С. В. Никитиным, Н. Л. Лепе, А. Филипп, Ю. Л. Сачковым, Л. Т. Ащепковым и С. В. Лифантовой, Е. Н. Хайловым и другими авторами.

В работах по управляемости нелинейных систем отражено разнообразие как решаемых задач, так и применяемых методов. Вопросы локальной управляемости нелинейных систем рассматривались С. А. Вахрамеевым и А. В. Сарычевым, В. И. Коробовым, Н. Н. Петровым, Г. В. Смирновым, Ю. В. Мастерковым, О. В. Зудашкиной, М. В. Юхановой и другими.

Одной из основных задач теории управляемых динамических систем является получение достаточных условий и критериев управляемости. Данные вопросы изучались в работах В. Н. Семенова, С. Гершвина и Д. Якобсона, Л. Ханта, С. В. Емельянова, С. К. Коровина и С. В. Никитина, Е. С. Пятницкого, О. Р. Каюмова, А. М. Ковалева, Ю. В. Мастеркова, А. П. Крищенко и других. В этих работах, в частности, доказаны критерии управляемости нелинейных систем с фазовыми ограничениями как при отсутствии, так и при наличии ограничений на управление, установлены достаточные условия полной и параметрической управляемости механических систем.

При невыполнении критериев управляемости возникает вопрос о построении (точном или приближенном) множеств управляемости и достижимости. Указанные множества аппроксимируют при помощи эллипсоидов и многогранников, оценивают с помощью функций Беллмана, Ляпунова, локально липшицевых оценочных функций, теоремы о накрытии нелинейным отображением и т.д. Оценки множеств управляемости и достижимости получены Дж. Лейтманом, В. А. Комаровым, Ф. Л. Черноусько, А. И. Овсеевичем, М. С. Никольским, М. М. Хрусталевым, В. Грантхамом, А. Плоховым и П. Бургмайером, А. И. Панасюком, Л. Т. Ащепковым и Д. В. Долгим, Е. К. Костоусовой, Д. Я. Рокитянским и многими другими авторами.

Кроме общетеоретических, имеется большое число работ, в которых исследуются частные виды управляемых динамических систем. Вопросы управляемости и достижимости таких систем рассматривались И. С. Максимовой и В. Н. Розовой, А. П. Крищенко и А. Н. Назаренко, В. И. Коробовым и С. С. Павличковым, Е. Н. Хайловым и Э. В. Григорьевой, И. В. Рублевым, Ю. Н. Корниловым и Ю. П. Петровым и другими. Исследование конкретных УДС, в частности, управляемых уравнений Ван-дер-Поля и Льенара, проведено в работах М. М. Байтмана, П. В. Плисса, Р. Конти, Л. Барбанти, Г. Виллари, И. М. Ананьевского, Ф. Л. Черноусько, Ю. И. Бердышева и других.

Одной из важнейших задач теории управляемых динамических систем является изучение зависимости множества управляемости от параметра. Данная задача в различных постановках рассматривалась в работах многих авторов. Так, Н. К. Алексеевым, Н. Н. Петровым, Д. А. Степановой и другими исследована зависимость множеств управляемости как линейных, так и нелинейных систем от ограничений на управление, П. В. Плиссом, Р. М. Бианчини – от параметров рассматриваемых систем.

Среди разнообразных методов, используемых при изучении свойств управляемости и достижимости, следует выделить методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанные методы применялись в работах Д. Бюшау, Э. Роксина и В. Спинадела, Э. Б. Ли и Л. Маркуса, М. М. Байтмана, А. Г. Бутковского, В. П. Савельева, З. Г. Павлючонок, Н. Н. Бутениной и других. В этих работах, в частности, исследованы составляющие элементы фазового портрета УДС, обоснован метод построения границ областей управляемости и достижимости простейшей нелинейной управляемой динамической системы второго порядка с ограниченным скалярным управлением. Также для двумерных нелинейных УДС общего вида с аффинным управлением изучена структура границы области управляемости, введено понятие зоны иммунитета фиксированного состояния, указаны достаточные условия существования и описана структура границы таких зон, исследована зависимость этих зон от ограничений на управление.

Отметим, что исследование вопросов управляемости и достижимости проводится как на ограниченных, так и на неограниченных промежутках времени. Данные вопросы на ограниченных интервалах времени рассматривались Н. Н. Красовским, А. П. Крищенко, Дж. Лейтманом, М. С. Никольским, Е. Н. Хайловым и Э. В. Григорьевой, И. В. Рублевым, Ю. И. Бердышевым и другими, а на неограниченных – Р. Калманом, А. М. Формальским, С. В. Емельяновым, С. К. Коровиным и С. В. Никитиным, В. И. Коробовым, Е. С. Пятницким, Ф. Л. Черноусько, Н. К. Алексеевым, П. В. Плиссом, Э. Б. Ли и Л. Маркусом, М. М. Байтманом, А. Г. Бутковским и многими другими авторами.

Цель работы состоит в 1) разработке приемов качественного исследования управляемых динамических систем второго порядка с векторным управлением; 2) изучении вопроса о возможности управления объектом в многоцелевом режиме; 3) исследовании зависимости от ограничений на управление области управляемости в окрестность устойчивого неподвижного фокуса и зоны иммунитета этого состояния.

Методы исследования. При решении поставленных в диссертации задач использованы методы теории функций действительного переменного, обыкновенных дифференциальных уравнений, качественной теории двумерных автономных динамических систем, теории бифуркаций указанных систем, а также методы качественного исследования аффинно-управляемых динамических систем на плоскости.

Результаты работы и научная новизна. Полученные в диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработана методика качественного исследования управляемых динамических систем второго порядка с векторным управлением.

2. В предположении, что автономная система, принадлежащая семейству двумерных аффинно-управляемых динамических систем, имеет несколько устойчивых предельных множеств, установлено необходимое и достаточное условие, при котором возможно управление объектом в каждое из указанных предельных множеств, а также перевод из одного предельного множества в другое.

3. Для нелинейной аффинно-управляемой динамической системы второго порядка со скалярным управлением, в которой автономные системы, отвечающие постоянным

значениям управляющего воздействия, имеют устойчивый неподвижный фокус, доказано существование ограничений на управление, при которых значения управляющей функции в пространстве параметров принадлежат области устойчивости рассматриваемого фокуса, но область управляемости в окрестность этого состояния равновесия не содержит безопасных зон.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы как в теории управляемых динамических систем, так и при исследовании конкретных УДС.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- VI Международной конференции “Математика. Компьютер. Образование” (Пущино, 1999);
- V и VI Международных конференциях “Нелинейные колебания механических систем” (Н. Новгород, 1999), (Н. Новгород, 2002);
- конференции “Математика и кибернетика 2002” (Н. Новгород, 2002);
- VII Международном семинаре “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (Москва, 2002);
- Воронежских весенних математических школах “Понтрягинские чтения – – XIV” (Воронеж, 2003), “Понтрягинские чтения – XX” (Воронеж, 2009);
- Международной конференции “Dynamics, Bifurcations and Chaos” (Н. Новгород, 2005);
- Международной конференции “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, 2009).

По теме диссертации были также сделаны доклады на семинарах кафедры ЧиФА факультета ВМК ННГУ (рук. проф. С. Н. Слугин, 2004; рук. проф. Д. В. Баландин, 2011).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, в том числе 2 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикаций материалов диссертаций. В работах, выполненных совместно с научным руководителем Н. Н. Бутениной, диссертантом проведены доказательства всех утверждений, исследованы конкретные УДС. Н. Н. Бутениной принадлежат постановки задач исследования и общее научное руководство.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 105 страниц, из них 74 страницы основного текста, 17 страниц рисунков и 14 страниц библиографического списка. Нумерация формул, лемм и теорем ведется по главам, при этом номер каждой формулы, леммы и теоремы состоит из двух частей, первая из которых означает номер главы, вторая – – порядковый номер внутри главы. Для удобства чтения рисунки расположены в соответствии с текстом.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследований, сформулированы основные результаты, кратко описан круг вопросов, рассмотренных в работе.

В первой главе диссертации приведены некоторые сведения из теории управляемых динамических систем второго порядка с гладкими по фазовым переменным правыми частями и со скалярным и векторным управлениями.

Во второй главе диссертации исследована управляемая динамическая система второго порядка с непрерывной, кусочно-гладкой по фазовым переменным правой частью, фазовыми ограничениями и векторным управлением. Указанная система при некоторых конкретных управляющих функциях является простейшей математической моделью сахарного диабета. Рассматриваемая УДС имеет вид

$$\begin{cases} dx/dt = -a_1 xy + a_2(x_0 - x)H(x_0 - x) + z(t) \\ dy/dt = b_1(x - x_0)H(x - x_0) - b_2 y + w(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $(x, y) \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = \{(x, y): 0 \le x \le x_{\max}, 0 \le y \le y_{\max}\}$; $z(t)$, $w(t)$ – внешние источники сахара и инсулина, $u(t) = (z(t), w(t))$ – допустимое управление, $u(t) \in \overline{V}$, $\overline{V} = [z_1, z_2] \times$ $\times [w_1, w_2]$, где $z_1 = w_1 = 0$. Точка $O(x_0, 0)$ – устойчивое состояние равновесия системы (1) при $u(t) \equiv (z_1, w_1)$ ($z_1 w_1$ - системы). В дальнейшем z_2 и w_2 считаем параметрами УДС (1).

Система (1) исследована как при отсутствии, так и при наличии внешнего источника инсулина. Для рассматриваемой УДС изучена зависимость множества управляемости в полуокрестность состояния O и зоны иммунитета этого состояния от ограничений на управление и параметра b_1, $b_1 \le (b_2 y_{\max} - w_2)/(x_{\max} - x_0)$. Показано, что при увеличении z_2 или w_2 либо уменьшении b_1 зона иммунитета $I(O)$ сжимается. Найдены критические значения 1) ограничений на управление и 2) параметра b_1, при переходе через которые указанная зона исчезает скачком. Этот результат может быть использован в доказательной медицине. Математически доказано, что максимальное безопасное количество введенного натощак сахара определяется индивидуально.

Отметим, что в УДС (1) существуют особые траектория и полутраектория сшитых систем одностороннего пересечения, отличные от тех, которые возможны в управляемых динамических системах с гладкими по фазовым переменным правыми частями. Такими являются сшитое состояние равновесия O $z_1 w_1$- системы и положительная полутраектория сшитой системы положительного пересечения, выходящая при возрастании t из угловой точки O контактной кривой $\Phi(x, y, w_1) = b_2 y - {}$ $- b_1(x - x_0)H(x - x_0) - w_1 = 0$.

Третья глава диссертации посвящена изучению вопроса о возможности управления объектом в многоцелевом режиме, а также решению этого вопроса для конкретной УДС.

Рассматривается управляемая динамическая система вида

$$dx/dt = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) P_i(x), \tag{2}$$

где $x \in G \subset R^2$ (G – область), $P_i(x) = (P_i^{(1)}(x), P_i^{(2)}(x))$, $i = \overline{0, n}$, – вектор-функция класса C^k $(k \geq 3)$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ – допустимое управление, $u(t) \in \overline{V}$, $\overline{V} = \{(u_1(t), \ldots, u_n(t)) : u_i^{(1)} \leq u_i(t) \leq u_i^{(2)},\ i = \overline{1, n}\}$.

Предположим, что ограничения на управление таковы, что автономная динамическая система, отвечающая некоторому постоянному значению управляющего воздействия $u(t) = u_0$, $u_0 \equiv const$, $u_0 \in \overline{V} \setminus V_0$, где $V_0 = \{(u_1(t), \ldots, u_n(t)) : u_i(t) = u_i^{(k_i)}$, $k_i = 1 \vee 2,\ i = \overline{1, n}\}$, структурно-устойчива и имеет r устойчивых предельных множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ $(r \geq 2)$. Каждое из указанных предельных множеств соответствует определенному режиму работы УДС (2). Пусть целью управления является обеспечение работы системы (2) (объекта) в каждом из таких режимов, а также переход из одного режима в другой (многоцелевой режим управления). Множество управляемости в произвольную точку множества Ω_i обозначим символом $U(\Omega_i)$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема 3.1. *Управление объектом в многоцелевом режиме возможно тогда и только тогда, когда в системе (2) имеет место равенство* $U(\Omega_i) = U_0$ *(*$i = \overline{1, r}$*).*

Рассмотрен следующий пример управляемой динамической системы:

$$\begin{cases} d\rho/dt = 2\rho(\lambda(t) - \mu(t)\rho - \sin\varphi) \\ d\varphi/dt = \rho - \cos\varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $u(t) = (\lambda(t), \mu(t))$ – допустимое управление, $u(t) \in \overline{V}$, $\overline{V} = [\lambda_1, \lambda_2] \times [\mu_1, \mu_2]$, где $\lambda_1 \geq 0,\ \mu_1 \geq 0$. Система (3) при постоянных значениях управляющего воздействия описывает движение самолета в вертикальной плоскости. В дальнейшем λ_1, λ_2, μ_1 и μ_2 считаем параметрами УДС (3).

При определенных ограничениях на управление автономная динамическая система с цилиндрическим фазовым пространством, отвечающая постоянному значению управляющего воздействия $u(t) = (\lambda_2, \mu_1)$, имеет два устойчивых предельных множества, одно из которых (состояние равновесия O) соответствует равномерному прямолинейному движению, а другое (предельный цикл L, охватывающий цилиндр) – последовательности "мертвых петель". Согласно теореме 3.1, управление движением самолета в двухцелевом режиме возможно в том и только в том случае, когда в системе (3) множества управляемости $U(O)$ и $U(L)$ совпадают, т.е. зоны иммунитета предельных множеств O и L пусты.

Для решения поставленной задачи исследована зависимость зоны иммунитета $I(O)$ от ограничений на управление. При фиксированных λ_1, λ_2 и μ_2 найдено критическое значение μ_1^*, сколь угодно малое уменьшение которого приводит к скачкообразному исчезновению $I(O)$. При $\mu_1^* - \delta \le \mu_1 < \mu_1^*$, $\delta > 0$, зона иммунитета $I(L)$ также пуста и, следовательно, при указанных ограничениях на управление возможно движение самолета в режимах равномерного прямолинейного движения и "мертвых петель". Приведен пример управления, осуществляющего одно из таких движений.

В четвертой главе диссертации рассмотрено неподвижное состояние равновесия типа устойчивый фокус, расположенное в узловой особой точке контактной кривой, и исследована зависимость зоны иммунитета этого состояния от ограничений на управление.

Задана управляемая динамическая система вида

$$dx/dt = P(x) + u(t)Q(x), \tag{4}$$

где $x \in R^2$, $P(x), Q(x)$ – вектор-функции класса C^k $(k \ge 5)$, $u(t)$ $\{R^1 \to R^1\}$ – допустимое управление, $m \le u(t) \le n$.

Пусть при $u(t) \equiv \mu$, $\mu = const$, $m \le \mu \le n$, система (4) (μ- система) имеет устойчивый фокус O, в котором $P(O) = Q(O) = 0$ (неподвижное состояние равновесия). В этом случае точка O совпадает с особой точкой контактной кривой $F(x) = \det(P(x), Q(x)) = 0$. Будем считать, что указанная особая точка является узловой и расположена в начале координат. Также будем предполагать выполненными следующие условия:

1) при $\mu_1 < \mu < \mu_0$ ($\mu_0 < \mu < \mu_2$) фокус O μ- системы устойчив (неустойчив), а при $\mu = \mu_0$ состояние равновесия O μ- системы является сложным неустойчивым фокусом кратности 1;
2) в окрестности фокуса O траектории μ- системы ориентированы отрицательно (по часовой стрелке);
3) ограничения m и n на управление удовлетворяют неравенству $\mu_1 < m < n < \mu_0$.

Изучен характер состояния равновесия O каждой из сшитых систем одностороннего пересечения (mn- и nm- систем). (Сшитая $mn\,(nm)$- система – система (4) при $u(t) = m\,(n)$ в F^+, $u(t) = n\,(m)$ в F^-, $m \le u(t) \le n$ на кривой $F(x) = 0$; $F^+(F^-)$ – часть плоскости, в которой $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$)). При расширении промежутка $[m, n]$ векторное поле $mn\,(nm)$- системы вращается в отрицательном (положительном) направлении. Следовательно, при выбранной в окрестности точки O ориентации траекторий μ- системы состояние равновесия O mn- системы является устойчивым фокусом, а характер и устойчивость состояния равновесия nm- системы в зависимости от величины промежутка $[m, n]$ могут быть различными. Для исследования характера состояния равновесия O nm- системы в некоторой окрестности точки O на одной из дуг контактной кривой, примыкающей к O, построена функция последования, определяемая траекториями этой системы. Установлено, что при определенных ограничениях на управление состояние равновесия O nm- системы является сшитым фокусом.

При дальнейшем изложении ограничения m и n, $\mu_1 < m < n \le \mu_0$, на управление будем считать параметрами УДС (4). При фиксированном m, $\mu_1 < m < \mu_0$, исследована устойчивость сшитого фокуса O nm- системы.

Теорема 4.1. *Для любого фиксированного* m, $\mu_1 < m < \mu_0$, *существует такое значение* $n = n^*$, $m < n^* < \mu_0$, *что при* $n \in (m, n^*)$ *сшитый фокус* O nm- *системы устойчив, а при* $n \in (n^*, \mu_0]$ *– неустойчив.*

Заметим, что при обращении в нуль первой фокусной величины фокуса O nm- системы, как показали вычисления, одновременно обращается в нуль и вторая фокусная величина. Знак третьей фокусной величины (если эта величина отлична от нуля) определяет характер устойчивости сложного фокуса O n^*m- системы.

В дальнейшем будем предполагать, что 1) при $n = n^*$ третья фокусная величина фокуса O nm- системы отлична от нуля; 2) сшитые mn- и nm- системы в достаточно малой окрестности точки O имеют конечное число замкнутых траекторий; 3) каждому бифуркационному значению параметра n соответствует лишь одна бифуркация особых траекторий УДС (4).

При фиксированном m, $\mu_0 - \delta < m < \mu_0$, $\delta > 0$, исследована зависимость зоны иммунитета $I(O)$ от параметра n.

Теорема 4.2. *Пусть при $\mu = \mu_0$ состояние равновесия O μ- системы является сложным неустойчивым фокусом кратности 1. Тогда существуют такие ограничения m и n, $\mu_1 < m < n < \mu_0$, на управление, что при $u(t) \in [m, n]$ множество $I(O)/O = \varnothing$.*

Отметим, что при условии положительной ориентации траекторий μ- системы в окрестности точки O с ростом параметра n при фиксированном m происходит смена устойчивости сшитого фокуса O mn- системы. Фокус O nm- системы при этом сохраняет устойчивость. Рассмотрим также случай, когда при $\tilde{\mu}_1 < \mu < \mu_0$ ($\mu_0 < \mu < \tilde{\mu}_2$) фокус O μ- системы неустойчив (устойчив), а при $\mu = \mu_0$ состояние равновесия O μ- системы является сложным неустойчивым фокусом кратности 1. В этом случае при $\mu_0 \le m < n < \tilde{\mu}_2$ в зависимости от ориентации траекторий μ- системы в окрестности точки O с уменьшением параметра m при фиксированном n происходит смена устойчивости сшитого фокуса O mn- либо nm- системы.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикаций материалов диссертаций:

1. Стародубровская Н. С. Управление движением самолета в двухканальном режиме / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(25). Н. Новгород. 2002. С. 202 – 210.

2. Стародубровская Н. С. Устойчивый неподвижный фокус и его зона иммунитета в управляемой динамической системе второго порядка / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1468 – 1478.

Публикации в прочих изданиях:

1. Стародубровская Н. С. Области управляемости и зоны иммунитета в математической модели сахарного диабета / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // VI Международная конференция “Математика. Компьютер. Образование”. Тезисы докладов. Пущино. 1999. С. 48.

2. Стародубровская Н. С. Зоны иммунитета одной управляемой динамической системы с негладкой правой частью / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 6. Часть II. Сб. научных трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. М.: “Прогресс-Традиция”. 1999. С. 478 – 484.
3. Стародубровская Н. С. Исследование одной управляемой динамической системы с векторным управлением / Стародубровская Н. С. // V Международная конференция “Нелинейные колебания механических систем”. Тезисы докладов. Н. Новгород. 1999. С. 209 – 210.
4. Стародубровская Н. С. Применение методов качественного исследования управляемых динамических систем к математической модели сахарного диабета / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: Сб. статей / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина. М.: Физматлит. 2001. С. 253 – 262.
5. Стародубровская Н. С. Исследование устойчивости сшитого фокуса, расположенного в узловой особой точке контактной кривой / Стародубровская Н. С. // Конференция “Математика и кибернетика 2002”. Материалы конференции. Н. Новгород. 2002. С. 88 – – 89.
6. Стародубровская Н. С. Управление движением самолета в двухканальном режиме / Стародубровская Н. С. // VII Международный семинар “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”. Тезисы докладов. М.: Изд-во ИПУ РАН. 2002. С. 132 – – 134.
7. Стародубровская Н. С. Собственные зоны и зоны суверенитета в области достижимости / Андреева М. С., Стародубровская Н. С. // VI Международная конференция “Нелинейные колебания механических систем”. Тезисы докладов. Н. Новгород. 2002. С. 8 – 9.
8. Стародубровская Н. С. Об одной динамической системе с двухканальным управлением / Стародубровская Н. С. // Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения – XIV”. Тезисы докладов. Воронеж. 2003. С. 137 – 138.
9. Starodubrovskaya N. S. Stable focus in the risk zone of the controllability set / Butenina N. N., Starodubrovskaya N. S. // Journal of Dynamical and Control Systems. 2004. V. 10. № 1. P. 107 – 108.
10. Стародубровская Н. С. Безопасные зоны управляемых динамических систем на плоскости / Бутенина Н. Н., Стародубровская Н. С. // Международная конференция “Dynamics, Bifurcations and Chaos”. Тезисы докладов. Н. Новгород. 2005. С. 43 – 44.
11. Стародубровская Н. С. О бифуркациях, приводящих к исчезновению безопасных зон в областях управляемости / Стародубровская Н. С. // Международная конференция

“Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. Материалы конференции. Москва. 2009. С. 215.
12. Стародубровская Н. С. Устойчивый неподвижный фокус в зоне риска области управляемости / Стародубровская Н. С. // Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения – XX”. Тезисы докладов. Воронеж. 2009. С. 171 – 172.