На правах рукописи

Жидков Артем Александрович

Исследование одного класса дифференциальных уравнений для квазистационарных потенциальных полей

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2012

Работа выполнена на кафедре математической физики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент
Калинин Алексей Вячеславович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Баландин Дмитрий Владимирович,
заведующий кафедрой численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского

доктор физико-математических наук, доцент
Потапов Михаил Михайлович,
профессор кафедры оптимального управления
МГУ им. М.В. Ломоносова

Ведущая организация:

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита состоится «24» мая 2012 г. в 14 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2, зал научных демонстраций.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

С текстом автореферата можно ознакомиться на сайте Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского http://www.unn.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Лукьянов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Дифференциальные уравнения с частными производными, содержащие дифференциальные операции векторного анализа используются при моделировании самых разнообразных физических явлений и являются основным математическим аппаратом гидродинамики, механики сплошных сред, теории поля, электромагнитной теории. Решениями таких уравнений являются векторные поля различной физической природы. Исследование таких задач опирается на специальные свойства функциональных пространств, связанных с дифференциальными операциями векторного анализа, и различные теоремы вложения, в основе которых, как правило, лежат оценки для норм векторных полей в этих пространствах.

В частности, с физической и математической точки зрения одним из важнейших моментов изучения структуры векторного поля является выделение его вихревой и потенциальной составляющих. Основополагающей в этом направлении является работа Г. Вейля[1], в которой впервые было получено ортогональное разложение произвольного векторного поля на прямую сумму ортогональных подпространств соленоидальных и потенциальных полей. В этой работе также впервые были получены оценки для норм векторных полей в функциональных пространствах, связанных с дифференциальными операциями векторного анализа. Идея ортогонального проектирования и теоремы вложения соответствующих функциональных пространств получили существенное теоретическое развитие и нашли важное применение при изучении различных прикладных задач в работах С.Л. Соболева, О.А. Ладыженской, Дж.Дж. Хейвуда, Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса, В.А. Солонникова, В.Н. Масленниковой, М.Е. Боговского, Э.Б. Быховского, Н.В. Смирнова, С.Г. Крейна, Р. Темама, Ю.А. Дубинского, В. Жиро, П.-А. Равьяра, Дж. Лере и ряда других авторов. Принципиальной основой этих исследований послужила развитая С.Л. Соболевым и его учениками теория обобщённого дифференцирования в пространствах суммируемых функций и концепция обобщённых решений уравнений с частными производными.

В диссертационной работе получены новые L_p-оценки для скалярных произведений векторных полей, находящих применение при изучении систем уравнений, моделирующих различные процессы в неоднородных сре-

[1] *Weil H.* The method of orthogonal projections in potential theory. — 1940. — Vol. 7. — Pp. 411–444.

дах. Эти результаты являются развитием работ А.В. Калинина[2,3], в которых аналогичные оценки были получены для ограниченных областей. В качестве иллюстрации применения полученных оценок изучена задача об определении потенциальных и вихревых полей для стационарной системы уравнений Максвелла.

Различные классы задач для системы уравнений Максвелла, соответствующие интегральные уравнения и методы их решения рассматривались в работах В.И. Дмитриева, Е.В. Захарова[4], В.П. Ильина[5], Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса[6] и других авторов.

В диссертационной работе изучаются некоторые постановки задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными об определении потенциальных полей, возникающих, в частности, при исследовании системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении, в котором основным предположением является потенциальность электрического поля, вообще говоря, зависящего от времени. Эта система может быть сведена к дифференциальному уравнению относительно скалярного потенциала, не разрешённому относительно производной по времени, называемому в работах по атмосферному электричеству уравнением глобальной электрической цепи[7,8]. Это уравнение относится к категории уравнений соболевского типа (также такие уравнения называются псевдопараболическими уравнениями), а соответствующие постановки смешанных задач для этих уравнений — неклассическими задачами математической физики. Впервые неклассические задачи были рассмотрены при изучении гидроди-

---

[2] *Калинин А. В.* Некоторые оценки теории векторных полей // *Вестник Нижегородского госуниверситета. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление.* — 1997. — Т. 20, № 1. — С. 32–38.

[3] *Калинин А. В.* Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике. — Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2007. — 319 с.

[4] *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 312 с.

[5] *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

[6] *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

[7] *Browning G. L., Tzur I., Roble R. G.* A global time-dependent model of thunderstorm electricity. Part I. Mathematical properties of the physical and numerical models // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 1987. — Vol. 44, no. 15. — Pp. 2166–2177.

[8] *Hays P. B., Roble R. G.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere // *J. of Geophysical Research.* — 1979. — Vol. 84, no. A7. — Pp. 3291–3305.

намических явлений в работах С.Л. Соболева[9,10] и в дальнейшем получили своё развитие в работах В.П. Маслова, А.Г. Свешникова, В.Н. Масленниковой, М.Е. Боговского, Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Р.Е. Шоуолтера и многих других авторов.

Для исследуемых в работе дифференциальных уравнений для квазистационарных потенциальных полей рассматриваются новые специальные постановки начально-краевых задач, для которых решаются следующие актуальные вопросы. В диссертации с использованием метода ортогонального проектирования обосновываются важные для практических применений результаты о корректности рассматриваемых краевых и начально-краевых задач, формулируется и обосновывается итерационный метод решения, который может быть положен в основу алгоритмов, существенно использующих идею распараллеливания вычислений, обосновывается возможность применения метода Галёркина.

Для рассматриваемых квазистационарных задач в диссертации изучается обратная задача о восстановлении источников по результатам граничного наблюдения. Эта задача относится к разряду некорректных задач и её решение требует формулировки и обоснования регуляризирующих алгоритмов. Теория некорректных задач опирается на классические результаты А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова, которые получили существенное развитие в работах Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского, В.И. Дмитриева, В.Г. Романова, В.В. Васина, С.И. Кабанихина. Важные теоретические и актуальные прикладные результаты получены в работах В.И. Агошкова, А.Б Бакушинского, Ф.П. Васильева, А.В. Гончарского, А.М. Денисова, А.С. Ильинского, А.И. Короткого, В.И. Максимова, М.М. Потапова, А.И. Прилепко, М.И. Сумина, Ю.В. Шестопалова, А.Г. Яголы и других авторов.

В диссертации для решения обратной задачи граничного наблюдения применяется итеративный вариант метода двойственной регуляризации, предложенного и развитого в последние годы в работах М.И. Сумина[11]. Он

---

[9] *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных // *Доклады АН СССР.* — 1951. — Т. 81, № 6. — С. 1007–1009.

[10] *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // *Известия АН СССР. Сер. Математическая.* — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 3–50.

[11] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2001–2019.

является основанным на теории двойственности итерационным регуляризирующим алгоритмом условной оптимизации, двойственная задача в котором решается с привлечением метода стабилизации А.Н. Тихонова.

Разработанная в диссертации теоретическая основа использована при реализации вычислительного исследовательского программного комплекса, с использованием которого были получены важные прикладные результаты теории электрических явлений в атмосфере.

Цель диссертационной работы. Целью работы является строгое математическое обоснование корректности краевых и начально-краевых задач для одного класса дифференциальных уравнений с частными производными, возникающего при описании квазистационарных потенциальных полей, изучение свойств решений этих задач и исследование эффективных для построения численных алгоритмов постановок соответствующих прямых и обратных задач.

Методы исследования. В диссертации используется аппарат функционального анализа и теории функций действительного переменного, методы теории уравнений с частными производными и дифференциально-операторных уравнений, методы выпуклого анализа, оптимизации и оптимального управления.

Научная новизна. Все сформулированные в работе результаты являются новыми и состоят в следующем:

- На основе полученных новых L_p-оценок для скалярных произведений векторных полей, исследованы задачи об определении стационарных потенциальных полей в неоднородных неограниченных областях.
- Предложены новые строгие формулировки начально-краевых задач об определении потенциальных полей для одного класса дифференциальных уравнений с частными производными, имеющего прикладное значение.
- Доказаны теоремы о корректности предложенных постановок задач.
- Доказана теорема о стабилизации решений рассматриваемых начально-краевых задач при $t \to \infty$.
- Обоснована возможность применения для решения рассматриваемых начально-краевых задач метода Галёркина.
- Предложен и обоснован итерационный метод решения рассматриваемых начально-краевых задач, который может быть использован при

конструировании параллельных алгоритмов.

- Обоснована возможность применения алгоритмов двойственной регуляризации для нахождения нормального решения задачи об определении источников по результатам граничного наблюдения.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую и практическую значимость представляют предложенные в работе постановки краевых и начально-краевых задач для рассматриваемого класса дифференциальных уравнений с частными производными, теоремы об их разрешимости и свойствах решений, обоснование сходимости некоторых новых алгоритмов их численного решения и регулризованные алгогритмы решения обратных задач. Практическая значимость этих результатов обусловлена возможностью их применения для математического и численного моделирования электромагнитных явлений в атмосфере. В качестве конкретного практического применения полученных результатов можно рассматривать результаты исследований, проведённых с помощью разработанного программного комплекса для решения прикладных задач атмосферного электричества.

Основные результаты диссертационной работы являются частью исследований, проводимых при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07-01-00495-а на 2007–2009 годы и 09-01-97019-р_поволжье_а на 2009–2010 годы), Аналитической целевой ведомственной программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)" Минобрнауки РФ (регистрационные номера 2.1.1/3927 и 2.1.1/13303), Федеральной целевой ведомственной программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2011 годы (шифр проекта НК-13П/13), гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг подведомственными высшими учебными заведениями (проект 1.1907.2011), гранта правительства Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0048).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на IV–X молодёжной школе-конференции "Лобачевские чтения" (Казань, 2005–2011 гг.), II, III международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования" (Воронеж, 2007, 2009 гг.), XVII, XIX Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2006, 2008 гг.), XI–XV Нижегородской сессии молодых учёных, математические науки (Нижний Новгород, 2006–2010 гг.), Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2007, 2009 гг.), VIII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи–Адлер, 2007 г.), VI Российской конференции по атмосферному электричеству (Нижний Новгород, 2007 г.), итоговой конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства" (Нижний Новгород, 2007 г.), VIII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Нижний Новгород, 2008 г.), X, XI международном семинаре "Супервычисления и математическое моделирование" (Саров, 2008, 2009 гг.), Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложения" (Москва, 2009 г.), I молодёжной международной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (Новосибирск, 2009 г.), IV, V Всероссийской молодёжной научно-инновационной школе "Математика и математическое моделирование" (Саров, 2010, 2011 гг.), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010 г.), 53-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" (Москва, 2010 г.), X международной конференции "Будущее технической науки" (Нижний Новгород, 2011 г.), XVI международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Нижний Новгород, 2011 г.), XIV международной конференции по атмосферному электричеству (Рио-де-Жанейро, Бразилия, 2011 г.), 8 международном конгрессе ISAAC (Москва, 2011 г.), международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2011 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на семинаре "Обратные задачи математической физики" в НИВЦ МГУ (рук. проф. А.Б. Бакушинский, проф. А.В. Тихонравов, проф. А.Г. Ягола), семинаре кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ (рук. проф. А.С. Антипин, проф. Ф.П. Васильев, проф. М.М. Потапов), расширенном семинаре отдела дифференциальных уравнений и отдела прикладных задач института математики и механики УрО РАН (рук. проф. В.И. Максимов, проф. А.И. Короткий), семинаре кафедры математической физики ННГУ (рук. проф. В.И. Сумин).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 44 печатных работах. В том числе из них 4 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. В конце автореферата приведены наиболее значимые публикации по теме диссертации.

Личный вклад автора. В публикациях, выполненных совместно с научным руководителем А.В. Калининым, соискателю принадлежат доказательства всех утверждений, А.В. Калинину принадлежат постановки задачи, формулировки некоторых утверждений, участие в обсуждении результатов и общее руководство работой. В работах, выполненных совместно с М.И. Суминым, автору принадлежит доказательство утверждений, обосновывающих возможность применения метода двойственной регуляризации при исследовании конкретных задач. В работах, выполненных совместно с А.А. Тюхтиной, автору принадлежит доказательство теорем и формулировка некоторых утверждений.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации 150 страниц. Диссертация содержит 6 рисунков и 200 наименований литературы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Введение содержит обзор литературы и краткое содержание работы.

В первой главе представлены необходимые сведения из функционального анализа, определены основные функциональные пространства и сформулированы их свойства. Приводятся и доказываются оценки для скалярных произведений векторных полей в неограниченных областях.

Пусть Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^3$. Через $L_p(\Omega)$, $\{L_p(\Omega)\}^3$ обозначаются соответственно пространства скалярных и векторных функций, суммируемых со степенью $p \geq 1$. Определим банаховы пространства

$$H_p(\mathrm{rot};\Omega) = \left\{\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 : \mathrm{rot}\,\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3\right\},$$
$$H_p(\mathrm{div};\Omega) = \left\{\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 : \mathrm{div}\,\vec{u} \in L_p(\Omega)\right\}$$

с соответствующими нормами

$$\|\vec{u}\|_{H_p(\mathrm{rot};\Omega)} = \left(\|\vec{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3}\right)^{1/p},$$
$$\|\vec{u}\|_{H_p(\mathrm{div};\Omega)} = \left(\|\vec{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathrm{div}\,\vec{u}\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

При $p = 2$ для соответствующих гильбертовых пространств использованы обозначения $H(\mathrm{rot};\Omega) = H_2(\mathrm{rot};\Omega)$, $H(\mathrm{div};\Omega) = H_2(\mathrm{div};\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{K}er(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$ обозначаются пространства

$$\overset{\circ}{K}er(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \mathrm{rot}\,\vec{u} = 0,\, \vec{u}_\tau|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega) = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{v},\, \vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\right\}$$

со скалярными произведениями, индуцированными $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ определим весовые банаховы пространства вектор–функций над $\mathbb{R}^3$

$$H^\alpha_p(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) = \left\{\vec{u} \in \left\{L_p(\mathbb{R}^3)\right\}^3 : \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/p} \mathrm{rot}\,\vec{u}(\cdot) \in \left\{L_p(\mathbb{R}^3)\right\}^3\right\},$$
$$H^\alpha_p(\mathrm{div};\mathbb{R}^3) = \left\{\vec{u} \in \left\{L_p(\mathbb{R}^3)\right\}^3 : \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/p} \mathrm{div}\,\vec{u}(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^3)\right\}.$$

Одним из результатов диссертации является следующая

Теорема 1.1 ([4], [8]) *Пусть* $1 < p < \infty$, $p \neq 3/2$, $q = \frac{p}{p-1}$, $\alpha > \frac{1}{2}\max\{p, q\}$. *Тогда существует такая положительная постоянная* $C(\alpha, p)$, *не зависящая от вектор–функций* $\vec{u} \in H^\alpha_q(\mathrm{rot};\Omega)$ *и* $\vec{v} \in H^\alpha_p(\mathrm{div};\Omega)$, *что справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x))\, dx \leq C(\alpha, p) \cdot \left(\left\|\left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/q} \mathrm{rot}\vec{u}\right\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \|\vec{v}\|_{\{L_p(\mathbb{R}^3)\}^3} + \right.$$
$$\left. + \|\vec{u}\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \left\|\left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/p} \mathrm{div}\vec{v}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Вторая глава посвящена изучению краевых и начально-краевых задач для одного класса дифференциальных уравнений, содержащих операции векторного анализа. В этой главе на основе полученных оценок для скалярных произведений векторных полей доказываются теоремы о существовании и единственности решений стационарных задач об определении потенциальных полей.

Основной задачей, изучаемой во второй главе является система уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{H}(x,t)=\frac{4\pi}{c}\Big(\sigma(x)\vec{E}(x,t)+\vec{J}^{\text{ст}}(x,t)\Big)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(x,t)}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x,t)=0, \tag{2.2}$$

дополняемая краевыми и начальным условиями

$$\vec{E}_\tau(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{2.3}$$

$$\vec{E}(x,t)\Big|_{t=0}=\vec{E}_0(x). \tag{2.4}$$

Задача (2.1)–(2.4) исследуется в области $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, где Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$, диффеоморфная шаровому слою, с границей $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, состоящей из двух компонент связности Γ_1, Γ_2, каждая из которых диффеоморфна сфере в $\mathbb{R}^3$. При решении прямых задач заданными считаются функции $\vec{J}^{\text{ст}}\in C\big([0,T];\ \{L_2(\Omega)\}^3\big)$ и $\sigma\in L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$0<\sigma_*\le\sigma(x)\le\sigma^*,\ x\in\Omega. \tag{2.5}$$

Следует отметить, что система уравнений (2.1), (2.2) соответствует квазистационарному электрическому приближению для системы уравнений Максвелла, основным предположением которого является потенциальность электрического поля (2.2), при этом в приложениях равенство нулю тангенциальной компоненты $\vec{E}$ (2.3) соответствует граничному условию с идеально проводящей границей.

Задача 1. *Определить вектор-функции* $\vec{E}\in C^1\big([0,T];\ \overset{\circ}{Ker}\,(\operatorname{rot};\Omega)\big)$ *и* $\operatorname{rot}\vec{H}\in\operatorname{rot}H(\operatorname{rot};\Omega)$, *удовлетворяющие уравнению* (2.1) *и начальному условию* (2.3).

Из уравнения (2.2) и односвязности области Ω следует справедливость представления

$$\vec{E}(x,t)=-\operatorname{grad}\varphi(x,t).$$

В этом случае уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi(x,t)-\frac{4\pi}{c}\sigma(x)\operatorname{grad}\varphi(x,t)+\frac{4\pi}{c}\vec{J}^{\text{ст}}(x,t)=\operatorname{rot}\vec{H}(x,t). \tag{2.6}$$

Применяя оператор div к последнему уравнению, получаем следующую задачу.

Задача 2. *Определить функцию* $\varphi \in C^1\big([0,T];\, H^1(\Omega)\big)$, *удовлетворяющую смешанной задаче для уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(x,t) + 4\pi \operatorname{div}\big(\sigma(x) \operatorname{grad}\varphi(x,t)\big) = 4\pi \operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}(x,t) \tag{2.7}$$

с граничными и начальным условием

$$\varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_2} = C(t), \tag{2.8}$$

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n} + 4\pi\sigma(x)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n} - 4\pi J_n^{\text{ст}}(x,t)\right) dS = 0 \tag{2.9}$$

$$\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \tag{2.10}$$

где $C(t)$ *в граничном условии* (2.8) *является неизвестной функцией и подлежит определению в процессе решения задачи.*

Условие (2.9) необходимо для обеспечения эквивалентности уравнения (2.7) и уравнения (2.6). Уравнение (2.7) относится к неклассическим уравнениям математической физики. Также в математической литературе такие уравнения называются уравнениями соболевского типа или псевдопараболическими уравнениями.

Для задачи (2.7)–(2.10) выводится обобщённая формулировка в терминах скалярного потенциала:

Задача 3. *Найти вектор-функцию* $\varphi \in C^1(0,T;V(\Omega))$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad}\varphi(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x))\,dx + 4\pi\int\limits_{\Omega}\sigma(x)(\operatorname{grad}\varphi(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x))dx =$$

$$= 4\pi\int\limits_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x))dx \tag{2.11}$$

и начальному условию

$$\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x) \tag{2.12}$$

для всех функций $\psi \in V(\Omega)$.

Здесь $V(\Omega)$ следующее гильбертово пространство

$$V(\Omega) = \big\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0, u|_{\Gamma_2} = \text{const}\big\}$$

со скалярным произведением

$$(u \cdot v)_{V(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \big(\operatorname{grad} u(x) \cdot \operatorname{grad} v(x)\big) dx.$$

Для формулировки основных результатов работы и их обоснования в дальнейшем используется операторная запись задачи (2.1)–(2.4):

$$\frac{d}{dt}\vec{E}(t) + A_\sigma \left[\vec{E}(t)\right] + 4\pi \vec{J}^{\text{ст}}(t) = \vec{F}(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.13}$$

$$\vec{E}\Big|_{t=0} = \vec{E}_0. \tag{2.14}$$

Здесь $\vec{F}(t) = c \operatorname{rot} \vec{H}(\cdot, t)$, $A_\sigma : \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega) \to \{L_2(\Omega)\}^3 : A_\sigma [\vec{u}(t)] = 4\pi\sigma \cdot \vec{u}(t)$ — линейный ограниченный оператор умножения. Уравнение (2.13) представляет собой абстрактную запись уравнения (2.1).

Для данной задачи в диссертации сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения.

Теорема 2.1. *Пусть* $\vec{E}_0 \in \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega)$, $\vec{J}^{\text{ст}} \in C\big([0, T]; \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, $\sigma \in L_\infty(\Omega)$ *удовлетворяет условиям* (2.5). *Тогда существует единственное решение* $\vec{E} \in C^1\big([0, T]; \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega)\big)$, $\vec{F} \in C\big([0, T]; \operatorname{rot} H(\text{rot}; \Omega)\big)$, *удовлетворяющее уравнению* (2.13) *и начальному условию* (2.14).

Утверждение теоремы 2.1 показывает, что из задачи (2.13), (2.14) могут быть одновременно найдены две неизвестных функции $\vec{E}$ и $\vec{F}$.

В диссертационной работе предложен и обоснован итерационный алгоритм решения задачи (2.13), (2.14).

Обозначим $\vec{E}^{(0)} = \vec{E}_0 \in \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega)$ и определим последовательность $\left(\vec{E}^{(j)}, \vec{F}^{(j)}\right) \in \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega) \times \operatorname{rot} H(\text{rot}; \Omega)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\vec{F}^{(j+1)} = P^\perp \left[A_\sigma \big[\vec{E}^{(j)}(t)\big] + 4\pi \vec{J}^{\text{ст}}(t)\right], \tag{2.15}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{E}^{(j+1)}(t) + A_\sigma \big[\vec{E}^{(j+1)}(t)\big] + 4\pi \vec{J}^{\text{ст}}(t) = \vec{F}^{(j+1)}(t), \quad \vec{E}^{(j+1)}(0) = \vec{E}_0. \tag{2.16}$$

Здесь $P : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \overset{\circ}{Ker}\ (\text{rot}; \Omega)$ и $P^\perp : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \operatorname{rot} H(\text{rot}; \Omega)$ — операторы ортогональных проектирований на соответствующие пространства.

Справедлива

Теорема 2.2. *Рекуррентные соотношения (2.15), (2.16) определяют сходящуюся последовательность $\left(\vec{E}^{(j)}, \vec{F}^{(j)}\right)$ такую, что*

$$\left\|\vec{E}^{(j)} - \vec{E}\right\|_{C^1([0,T];\{L_2(\Omega)\}^3)} \to 0, \quad \left\|\vec{F}^{(j)} - \vec{F}\right\|_{C([0,T];\{L_2(\Omega)\}^3)} \to 0 \text{ при } j \to \infty,$$

где $\vec{E}$, $\vec{F}$ — точное решение исходной задачи (2.13), (2.14).

Для задачи (2.11), (2.12) справедливы теоремы.

Теорема 2.3 (О существовании и единственности решения [7]) *Пусть $\sigma \in L_\infty(\Omega)$ удовлетворяет условию (2.5), $\vec{J}^{\text{ст}} \in C\big([0,T];\,\{L_2(\Omega)\}^3\big)$. Тогда существует единственная функция $\varphi \in C^1\big([0,T];\,V(\Omega)\big)$, удовлетворяющая интегральному тождеству (2.11) для всех функций $\psi \in V(\Omega)$ и начальному условию (2.12).*

Теорема 2.4 (О стабилизации решения [7]) *Пусть $\sigma \in L_\infty(\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.5), а $\vec{J}^{\text{ст}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ не зависит от $t \in (0, \infty)$. Тогда решение задачи (2.11), (2.12) при $t \to \infty$ сходится к решению соответствующей стационарной задачи в норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$.*

Теорема 2.5 (О непрерывной зависимости решения от параметров [3]) *Пусть в задаче (2.11), (2.12) $\left\{\varphi_0^{(1)}, \sigma_{(1)}, \vec{J}^{\text{ст}}_{(1)}\right\}$ и $\left\{\varphi_0^{(2)}, \sigma_{(2)}, \vec{J}^{\text{ст}}_{(2)}\right\}$ — два различных набора исходных данных, $\vec{J}^{\text{ст}}_{(i)} \in C\big([0,T];\,\{L_2(\Omega)\}^3\big)$, $\varphi_0^{(i)} \in V(\Omega)$, $\sigma_{(i)} \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1,\,2)$, причём*

$$0 < \sigma_* \le \sigma_{(i)}(x) \le \sigma^* \text{ для почти всех } x \in \Omega.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1\big([0,T];\,V(\Omega)\big)$ — решения, соответствующие каждому такому набору. Тогда существует $C > 0$, зависящая только от σ^*, области Ω и значения T, такая что выполняется неравенство

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{C^1\left([0,T];\,V(\Omega)\right)} \le C \cdot \left(\left\|\varphi_0^{(2)} - \varphi_0^{(1)}\right\|_{V(\Omega)} + \left\|\vec{J}^{\text{ст}}_{(2)} - \vec{J}^{\text{ст}}_{(1)}\right\|_{C(0,T;\{L_2(\Omega)\}^3)} + \right.$$
$$\left. + \left\|\sigma_{(2)} - \sigma_{(1)}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \left(\left\|\varphi_0^{(2)}\right\|_{V(\Omega)} + \left\|\vec{J}^{\text{ст}}_{(2)}\right\|_{C(0,T;\{L_2(\Omega)\}^3)} \right) \right).$$

Используя интегральное тождество (2.11), в диссертации обоснована возможность применения метода Галёркина для нахождения приближённых решений задачи (2.11), (2.12), показана сходимость галёркинских приближений к точному решению задачи.

В третьей главе исследуются обратные задачи об определении $\vec{J}^{\text{ст}}$ по данным измерений на границе Γ_1

$$E_n\big|_{x\in\Gamma_1} = -\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x\in\Gamma_1} = e_n(x,t). \tag{3.1}$$

В работе показано, что решение $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ задач 1–3 при условии, что $\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$, зависит лишь от $\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}$ и $\int_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}}\,d\Gamma$.

В диссертационной работе было проведено теоретическое исследование, связанное с определением $\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}$ и $\int_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}}\,d\Gamma$ по граничным наблюдениям векторного поля $\vec{E}$ на поверхности Γ_1. Вообще говоря, по данным измерений на Γ_1 функции $\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}$ и $\int_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}}\,d\Gamma$ однозначно не восстанавливаются, поэтому в работе речь идёт о нахождении нормального решения

$$\left\|\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}\right\|^2 + \Big(\int\limits_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}}\,d\Gamma\Big)^2 \to \min. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$Z = L_2\big(0,T;\, L_2(\Omega)\big)\times L_2(0,T)$$
$$U_1 = L_2\big(0,T;\, H^{1/2}(\Gamma_1)\big),\quad U_2 = L_2\big(0,T;\, L_2(\Gamma_1)\big).$$

Обозначим $z = \Big(\operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}, \int_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}}\,d\Gamma\Big)\in Z$. В работе показано, что существует линейный ограниченный оператор $B : Z\to U$, такой, что

$$B[z] = -\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x\in\Gamma_1} = e_n \in U,$$

где U — одно из пространств U_1 или U_2.

В диссертационной работе была поставлена цель исследования сформулированной обратной задачи с помощью метода двойственной регуляризации. Для этого задача была сведена к задаче минимизации в гильбертовом пространстве

$$I_0(z)\equiv \|z\|_Z^2 \to \min,\quad B[z] = e_n^\delta \in U, \tag{3.3}$$

где e_n^δ — измерения, заданные с некоторой ошибкой, причём $\|e_n^\delta - e_n\|_U \le \delta$.

В этом случае двойственная задача записывается в виде

$$V^\delta(\lambda)\to\sup,\quad V^\delta(\lambda) = \min_{z\in Z} L^\delta(z,\lambda),$$

$$V^\delta(\lambda) = -\frac{1}{4}\langle\lambda, BB^*[\lambda]\rangle - \langle\lambda, e_n^\delta\rangle, \quad z = -\frac{1}{2}B^*[\lambda],$$

где

$$L^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle\lambda, B[z] - e_n^\delta\rangle$$

— функционал Лагранжа, $\lambda \in U$, $B^* : U \to Z$ — линейный ограниченный оператор, сопряжённый к оператору B.

Соответствующая регуляризованная двойственная задача записывается в виде

$$R_\alpha^\delta(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max \quad (\lambda \in U).$$

Для нахождения максимума регуляризованного сильно вогнутого функционала $R_\alpha^\delta(\lambda)$ может быть применён тот или иной градиентный метод.

Обозначим через $\lambda_\alpha^\delta \in U$ точку, дающую максимум функционалу R_α^δ, через $z[\lambda_\alpha^\delta]$ обозначим соответственно точку минимума функционала Лагранжа $L^\delta(z, \lambda_\alpha^\delta)$, а через z^0 — точное решение невозмущённой задачи. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.1.[11] *Последовательность регуляризованных элементов* $z[\lambda_\alpha^\delta]$ *сильно сходится к решению исходной задачи* z^0 *при* $\delta \to +0$ *и* $\alpha \to +0$ *и выполнении условия*

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \alpha\to+0}} \delta/\alpha = 0. \tag{3.4}$$

В диссертации приводится итерационный алгоритм для построения последовательности регуляризованных элементов, сходящейся к точному решению задачи (3.3), и обсуждается возможность построения оператора B^* с помощью соответствующих сопряжённых задач.

В четвёртой главе приводится описание программного комплекса для моделирования электрических явлений в атмосфере Земли, реализованного на основе теоретических результатов, полученных в диссертации. Приводятся результаты численного решения некоторых прямых задач, представляющих прикладной интерес.

В Заключении формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

---

[11] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2001–2019.

Список публикаций

Публикации в журналах из перечня ВАК

[1] *Калинин, А. В.* Задача об определении электрического потенциала в квазистационарном электрическом приближении для системы уравнений Максвелла / А. В. Калинин, А. А. Жидков // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 712–714.

[2] *Жидков, А. А.* Алгоритм двойственной регуляризации в обратных задачах глобальной электрической цепи / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* — 2011. — Т. 16, вып. 4. — С. 1074–1076.

[3] *Жидков, А. А.* О непрерывной зависимости решений от данных задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении / А. А. Жидков // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2011. — № 5 (1). — С. 169–173.

[4] *Жидков, А. А.* L_p-оценки векторных полей в неограниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах / А. А. Жидков, А. В. Калинин, А. А. Тюхтина // *Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки».* — 2012. — № 1. — С. 3–14.

Публикации в других журналах

[5] *Жидков, А. А.* Оценки скалярных произведений векторных полей в неограниченных областях / А. А. Жидков // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2007. — № 1. — С. 162–166.

[6] *Жидков, А. А.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2009. — № 4. — С. 123–129.

[7] *Жидков, А. А.* Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере / А. А. Жидков,

А. В. Калинин // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2009. — № 6. — С. 150–158.

[8] *Kalinin, A. V.* L_p-estimations of vector fields in unbounded domains / A. V. Kalinin, A. A. Tyukhtina, A. A. Zhidkov // *Applied Mathematics.* — 2012. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 45–51.

Тезисы конференций

[9] *Жидков, А. А.* Математическое моделирование электромагнитных полей в атмосфере / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы II международной научной конференции. — Воронеж: 2007. — С. 71–72.

[10] *Жидков, А. А.* Численное исследование задачи об определении электрических полей в квазистационарном электрическом приближении / А. А. Жидков, А. В. Калинин // VI Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. — Н. Новгород: 2007. — С. 51–52.

[11] *Калинин, А. В.* Интегральное тождество для определения электрического потенциала в квазистационарном электрическом приближении / А. В. Калинин, А. А. Жидков // VI Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. — Н. Новгород: 2007. — С. 53–54.

[12] *Жидков, А. А.* Вопросы математического моделирования электрических процессов в атмосфере / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Сборник докладов и тезисов X международного семинара “Супервычисления и математическое моделирование”. — Саров: 2008. — С. 70–72.

[13] *Жидков, А. А.* Об одном классе обратных задач атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы III международной научной конференции. — Т. 2. — Воронеж: 2009. — С. 133–134.

[14] *Жидков, А. А.* О некоторых обратных задачах для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Молодежная международная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Тезисы докладов. — Новосибирск: 2009. — С. 50.

[15] *Жидков, А. А.* Об одной нестационарной задаче для определения электрического поля / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции. — Воронеж: 2009. — С. 69–70.

[16] *Жидков, А. А.* Итерационный алгоритм решения одной задачи атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Сборник докладов и тезисов XI международного семинара "Супервычисления и математическое моделирование". — Саров: 2009. — С. 64–65.

[17] *Жидков, А. А.* Двойственная регуляризация в обратных задачах атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Сборник докладов и тезисов XI международного семинара "Супервычисления и математическое моделирование". — Саров: 2009. — С. 65–66.

[18] *Жидков, А. А.* Об одном классе математических задач атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Труды международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложения". — Москва: 2009. — С. 143.

[19] *Калинин, А. В.* Прямые и обратные задачи теории атмосферного электричества / А. В. Калинин, А. А. Жидков // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2010. — С. 92–93.

[20] *Жидков, А. А.* Математическое обоснование некоторых алгоритмов решения прямых и обратных задач теории атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и при-

кладных наук». Часть VII «Управление и прикладная математика». — Т. 1. — Москва: 2010. — С. 56–58.

[21] *Жидков, А. А.* Применение оптимизационных алгоритмов для одного класса обратных задач атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Материалы XVI международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики». — Нижний Новгород: 2011. — С. 162–165.

[22] *Kalinin, A. V.* Calculation of different-type clouds in the global atmospheric electric circuit / A. V. Kalinin, E. A. Mareev, A. A. Zhidkov // Proceedings of the 14th International Conference on Atmospheric Electricity. — Rio de Janeiro, Brazil: 2011.

[23] Convective generator in the global electric circuit: Analytical approach and numerical consideration / O. V. Mareeva, E. A. Mareev, A. V. Kalinin, A. A. Zhidkov // Proceedings of the 14th International Conference on Atmospheric Electricity. — Rio de Janeiro, Brazil: 2011.

[24] Some inverse problems in quasi-stationary electromagnetic theory / A. V. Kalinin, M. I. Sumin, A. A. Tyukhtina, A. A. Zhidkov // The 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications and Computation. — Moscow, Russia: 2011. — P. 294.

[25] *Жидков, А. А.* Алгоритмы двойственной регуляризации в обратных задачах граничного наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении / А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин // Тезисы докладов международной конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач”. — Екатеринбург: 2011. — С. 131–132.