На правах рукописи

Лисаченко Ирина Владимировна

УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ

01.01.02 - дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2012

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского и Нижегородском государственном техническом университете им.Р.Е.Алексеева

Научный руководитель:
Сумин Владимир Иосифович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:
Потапов Михаил Михайлович
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
профессор кафедры оптимального управления

Чистяков Вячеслав Васильевич
доктор физико-математических наук, доцент,
Нижегородский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики",
профессор кафедры прикладной математики и информатики

Ведущая организация: Удмуртский государственный университет

Защита состоится 24 мая 2012 г., в 16 часов 20 минут, на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2, зал научных демонстраций.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ННГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ННГУ (http://www.unn.ru).

Автореферат разослан   апреля 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.166.06,
кандидат физико-математических наук, доцент
Лукьянов Валерий Иванович (В.И. Лукьянов)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации изучаются нелинейные управляемые системы Гурса-Дарбу общего вида и задачи оптимизации таких систем.

Актуальность темы. Управляемая задача Гурса-Дарбу

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0,1]^2, \qquad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1),\ x(0, t^2) = \varphi_2(t^2),\ t^1 \in [0,1],\ t^2 \in [0,1], \qquad (2)$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v)\colon \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ $(l = \{l_0, l_1, l_2\})$ и $\varphi_i(t^i)\colon [0,1] \to \mathbf{R}^n$ $(i = 1,2)$ заданы, $u(t)\colon \Pi \to \mathbf{R}^m$ — управление, — одна из тех управляемых систем, с обстоятельного изучения оптимизационных задач для которых начиналось в свое время создание математической теории оптимального управления распределенными системами. И вот уже более сорока лет эта задача занимает особое место в теории оптимизации распределенных систем, являясь ее своего рода "пробным камнем". Самые различные вопросы теории оптимизации на примере задачи (1)-(2) изучали С.С.Ахиев, К.Т.Ахмедов, Л.Т.Ащепков, О.В.Васильев, Ф.П.Васильев, В.А.Дыхта, А.И.Егоров, А.И.Короткий, К.А.Лурье, В.И.Максимов, К.Б.Мансимов, А.С.Матвеев, Т.К.Меликов, В.И.Плотников, М.М.Потапов, В.А.Срочко, В.И.Сумин, М.И.Сумин, А.А.Толстоногов, В.А.Якубович, D.Idczak, G.Pulvirenti, G.Santagati, M.B.Suryanarayana и многие другие.

В диссертации изучается нелинейная управляемая система Гурса-Дарбу общего вида (1)-(2) с каратеодориевской функцией правой части $g(t, l, v)$ в случае, когда решения задачи (1)-(2) необходимо искать в классе абсолютно непрерывных на Π функций с суммируемыми в некоторой степени $p \in (1, \infty)$ смешанной и первыми производными (такой класс обозначаем AC^n_p). В последние годы к задачам оптимизации управляемых систем

Гурса-Дарбу в классах AC_p^n наблюдается устойчивый интерес (см., например,[1 2 3 4]). Однако, случай систем общего вида (1)-(2) с каратеодориевской правой частью изучен в этом смысле еще слабо. В частности, недостаточно изучены такие важные вопросы теории оптимизации, как условия сохранения глобальной разрешимости управляемой системы при возмущении управления, принцип максимума, особые управления принципа максимума. Именно эти вопросы и рассматриваются в диссертации. Поясним сказанное, предварительно заметив: при решении всех этих вопросов принципиальная техническая трудность, отличающая рассматриваемый в диссертации случай AC_p^n от достаточно хорошо изученного случая ограниченных смешанной и первых производных, коротко говоря, состоит в том, что здесь при линеаризации эквивалентного задаче (1)-(2) функционально-интегрального уравнения главные операторы линеаризованного уравнения, вообще говоря, не имеют квазинильпотентных мажорант, обеспечивающих в случае ограниченных производных нужные равномерные оценки; указанная трудность преодолевается в диссертации привлечением введенного В.И.Суминым[5] понятия равностепенно квазинильпотентного семейства операторов.

Об условиях сохранения глобальной разрешимости. В теории оптимального управления при выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО), при обосновании численных методов, при изучении задач с приближенно известными исходными данными и анализе чувствительности опти-

[1] Толстоногов, А.А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса-Дарбу без предположения выпуклости/ А.А. Толстоногов// Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т.64, № 4. — С.163 - 182.

[2] Idczak, D. The bang-bang principle for the Goursat-Darboux problem/ D. Idczak// Int. J. Contr. — 2003. — V.76, № 11. — P.1089 - 1904.

[3] Idczak, D. Stability analysys of solutions to an optimal control problem assotiated with a Goursat-Darboux problem/ D. Idczak, M. Majewski, S. Walchak // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2003. — V.13, № 1. — P.29 - 44.

[4] Погодаев, Н.И. О решениях системы Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями/ Н.И. Погодаев// Дифференц. уравнения. — 2007. — Т.43, № 8. — С.1116 - 1126.

[5] [S1] Сумин, В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах/ В.И. Сумин// Вестник Нижегородского университета. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление.— 1998. — Вып. 2(19). — С. 138 — 151.

мизационных задач, а также в целом ряде других ситуаций часто бывает, что оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные решения управляемой системы. Важным становится вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) управления не выводят его из класса управлений, которым отвечают глобальные решения управляемой системы, то есть вопрос об условиях сохранения глобальной разрешимости управляемой системы или, иначе говоря, о достаточных условиях *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР) по возмущению управления. Так, в теории НУО недостаток информации об УСГР управляемой начально-краевой задачи по возмущению управления часто вынуждает считать такую задачу сингулярной в смысле Ж.Л.Лионса[6] и переходить от классического случая "управление → состояние" к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар "управление, состояние", когда "управление" и "состояние" равноправны. При этом теоретические построения в сингулярном случае могут быть существенно более сложными, чем аналогичные в несингулярном (см. вывод НУО в сингулярных и несингулярных модельных задачах в [L]).

Именно для задачи Гурса-Дарбу были найдены первые достаточно общие условия УСГР по возмущению управления распределенных нелинейных систем[7], при этом рассматривались абсолютно непрерывные решения с ограниченными смешанной и первыми производными (см. также[8]). В главе 1 получены разнообразные достаточные условия УСГР задачи Гурса-Дарбу общего вида (1)-(2) с полной каратеодориевской функцией правой части в классах AC_p^n, $1 < p < \infty$ (глава написана по материалам статей [1, 2, 3, 4, 11, 12]).

---

[6] [L] Лионс, Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами/ Ж.Л. Лионс.—М.: Наука, 1987.—368 с.

[7] Плотников, В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса - Дарбу/ В.И. Плотников, В.И. Сумин// Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 845 - 856.

[8] [S2] Сумин, В.И. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач/ В.И. Сумин// Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 12. — С. 2097 - 2109.

О принципе максимума. Для задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу А.И. Егоровым[9] была получена одна из первых в классе распределенных систем достаточно общих формулировок НУО типа *поточечного принципа максимума* (ППМ). Впоследствии вопросы вывода и анализа ППМ для различных задач оптимального управления системой (1)-(2) изучали С.С. Ахиев, К.Т. Ахмедов, Л.Т. Ащепков, О.В. Васильев, Ф.П. Васильев, В.А. Дыхта, А.И. Егоров, К.А. Лурье, К.Б. Мансимов, А.С. Матвеев, Т.К. Меликов, В.И. Плотников, В.А. Срочко, В.И. Сумин, М.И. Сумин, В.А. Якубович, M.B. Suryanarayana и многие другие (см., например, краткие обзоры[10] [11] [12]). Рассматривались самые разные вопросы теории ППМ, но эти рассмотрения касались прежде всего либо случая решений задачи Гурса-Дарбу с ограниченной смешанной производной (см., например,[13] [14] [15] [16]), либо, в случае решений класса AC_p^n, $p < \infty$, — ситуации, когда функция правой части $g(t, l, v)$ непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по l (см., например,[17]). В случае решений с суммируемой смешанной производной для нелинейной системы (1)-(2) с полной каратеодориевской правой частью, видимо, ППМ исследован еще недостаточно. Именно в такой ситуации в главе 2, написанной по материалам статей [5, 6, 7] , ППМ доказывается для общей терминальной задачи

[9] Егоров, А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности/ А.И. Егоров// Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 6. — С. 1205 - 1260.

[10] Срочко, В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления/ В.А. Срочко. — Иркутск: изд-во Иркутского ун-та, 1989. — 160 с.

[11] Васильев, О.В. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление/ О.В. Васильев, В.А. Срочко, В.А. Терлецкий. — Новосибирск: Наука, 1990. —151 с.

[12] Tuan, H.D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints/ H.D. Tuan// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1996. — 37. — P.354–391.

[13] [P1] Плотников, В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу/ В.И. Плотников, В.И. Сумин// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61 - 77.

[14] Suryanarayana, M.B. Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial differential equations/ M.B. Suryanarayana// SIAM J. Control. — 1973. — V.11, № 1.

[15] [P2] Плотников, В.И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве/ В.И. Плотников, В.И. Сумин// Сиб. матем. ж. — 1981. — Т.22, № 6. — С.142-161.

[16] Гаврилов, В.С. Параметрическая оптимизация нелинейных систем Гурса-Дарбу с фазовыми ограничениями/ В.С. Гаврилов, М.И. Сумин// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 6. — С. 1002 — 1022.

[17] Матвеев, А.С. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами/ А.С. Матвеев, В.А. Якубович// Сибирский матем. журн. — 1978. — Т.19, № 5. — С.1109 - 1140.

оптимизации системы (1)-(2).

Об особых управлениях. Особые управления ППМ, то есть управления, на которых ППМ вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях (см., например,[18] [19] [20]). Вопросы получения НУО *особых управлений* (ОУ) распределенных систем в основном рассматривались для управляемых систем Гурса-Дарбу и близких к ним (Л.Т.Ащепков, А.Н.Бурдуковский, О.В.Васильев, К.Б.Мансимов, Т.К.Меликов, В.А.Срочко, Ш.Ш.Юсубов и др.; см., например, [V], [21] [22] [23] [24]). В случае, когда необходимо искать решения задачи Гурса-Дарбу с суммируемой в некоторой степени смешанной производной, ОУ ППМ систематически, видимо, не рассматривались. В главе 3 диссертации (написанной по материалам статей [7, 19]) изучаются ОУ ППМ для терминальной задачи оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу с каратеодориевской правой частью при условиях, когда возникает необходимость искать решения системы в классе AC_p^n, $1 < p < \infty$.

Цели работы состоят в получении достаточных условий сохранения глобальной разрешимости в классах функций с суммируемой смешанной производной нелинейных управляемых систем Гурса-Дарбу общего вида с полной каратеодориевской правой частью, необходимых условий оптимальности типа принципа максимума для терминальных задач оптимизации та-

[18] Габасов, Р. Особые оптимальные управления/ Р. Габасов, Ф.М. Кириллова.—М.: Наука, 1973.

[19][V] Васильев, О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами/ О.В. Васильев. — Автореф. докт. дисс. — Ленинград: Ленинградский гос. ун-т, 1984.

[20] Зеликин, М.И. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений/ М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов.// Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 90. Оптимальное управление 4. М.: ВИНИТИ. 2001.

[21] Срочко, В.А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами/ В.А. Срочко// Сиб. математ. журн. — 1976. — Т.17, № 5. — С.1108-1115.

[22] Ащепков, Л.Т. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса-Дарбу/ Л.Т. Ащепков, О.В. Васильев, И.Л. Коваленок// Дифференц. уравнения. — 1980. — Т.16, № 6. — С.1054-1059.

[23] Мансимов, К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления/ К.Б. Мансимов.—Автореф. докт. дисс. Баку: Бакинский гос. ун-т, 1994.

[24] Юсубов, Ш.Ш. Необходимое условие оптимальности особого управления в одной системе с распределенными параметрами/ Ш.Ш. Юсубов// Известия РАН. Теория и системы управления — 2008. — № 1. — С.12-17.

ких систем, условий вырождения принципа максимума в таких задачах и условий оптимальности соответствующих особых управлений.

Методы исследования. В работе используются методы теории оптимального управления, теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа и теории функций действительного переменного.

Научная новизна. Получены следующие новые для математической теории оптимального управления **результаты, выносимые на защиту**:

- Достаточные условия сохранения глобальной разрешимости в классах функций с суммируемой в некоторой степени смешанной производной нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу общего вида с полной каратеодориевской правой частью уравнения при различных условиях на правую часть.

- Необходимые условия оптимальности в виде поточечного принципа максимума для общей терминальной задачи оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу общего вида (с полной каратеодориевской правой частью уравнения), рассматриваемой в классе функций с суммируемой в некоторой степени смешанной производной.

- Условия сильного вырождения особых управлений принципа максимума в терминальной задаче оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу (с каратеодориевской правой частью уравнения), рассматриваемой в классе функций с суммируемой в некоторой степени смешанной производной, и конструктивные необходимые условия оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Степень обоснованности научных результатов. Все научные положения и выводы работы строго математически обоснованы и сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и развитая в ней техника могут быть применены в различных разделах математической теории оптимального управления, теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории функционально-операторных уравнений. Результаты диссертации могут быть использованы в спецкурсах по теории оптимального управления.

Результаты диссертации явились составной частью исследований, выполнявшихся в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского при финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания Минобразования РФ при Санкт-Петербургском госуниверситете (проект Е02-1.0-173, 2003-2004 г.г.), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты: 04-01-00460, 2004-2006 г.г.; 07-01-00495, 2007-2009 г.г.) и Минобрнауки РФ (проекты: 2.1.1/3927, АЦВП "Развитие научного потенциала высшей школы", 2009 - 2011 г.г.; НК-13П-13, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", 2009-2011 г.г.; 2.1.1/13303, АЦВП "Развитие научного потенциала высшей школы", 2009 - 2011 г.г.; 1.1907.2011 в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 г.г. подведомственными высшими учебными заведениями, 2012 г.).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались: на XII Нижегородской сессии молодых ученых - математические науки (Семенов, 2007); на XVIII, XIX, XX, XXI весенних воронежских математических школах "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2007, 2008, 2009, 2010); на VII и VIII Всероссийских конференциях "Нелинейные колебания механических систем" (Н.Новгород, 2005, 2008); на Международной молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения" (Казань, 2006); на итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса "Модели, методы и программные средства" в Нижегородском государственном университете (Н.Новгород, 2007); на Международных конференциях "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики" (Тамбов, 2007), "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов, 2009, 2011); на XVI Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Н.Новгород, 2011); на семинаре "Математическая теория оптимального управления" в Нижегородском государственном университете (рук. проф. Сумин В.И. и проф. Сумин М.И.) в 2008-2012 г.г.; на семинаре кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета (2012); на расширенном семинаре кафедры математической физики Нижегородского государственного университета (2012).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 27 работах, наиболее значимые из которых [1]-[19], из них [1]-[7] — статьи в журналах, входящих в список ВАК изданий, рекомендуемых для публикации результатов диссертаций. Общее научное руководство исследованиями в течение всего времени работы над диссертацией осуществлялось проф. В.И.Суминым. В совместных с В.И.Суминым работах автора диссертации В.И.Сумину принадлежат постановки задач и общая схема исследования; доказательства основных положений проведены автором диссертации самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех основных разделов (глав) и списка литературы. Основные разделы (главы) разбиты на подразделы (параграфы). Нумерация подразделов двойная: первая цифра — номер основного раздела, вторая — номер подраздела. Нумерация формул, теорем и лемм тройная: первая цифра — номер основного раздела, вторая — номер подраздела, третья — номер утверждения в текущем подразделе. Содержание изложено на 140 страницах, включая список литературы из 92 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор литературы, кратко излагается основное содержание работы.

В **главе 1**, состоящей из четырех параграфов, подробно изучается проблема получения достаточных условий УСГР задачи (1)-(2) по возмущению управления в том случае, когда решение задачи имеет смысл искать в классе W удовлетворяющих условиям (2) функций пространства AC_p^n. Предполагается, что: $g(t,l,v)$ дифференцируема по l при каждом v для почти всех t и вместе с $g_l'(t,\,l,v)$ измерима по t при любых $\{l,v\}$ и непрерывна по $\{l,v\}$ для почти каждого t (то есть функция g вместе со своей производной g_l' удовлетворяет условиям типа Каратеодори); $\varphi_i' \in L_p^n([0,1])$, $\varphi_i(0)=0$, $i\in\{1,2\}$; допустимы $u(\cdot)$ из некоторого $D\subset L_s^m(\Pi)$. Все построения ведутся, как правило, не непосредственно для самой задачи Гурса-Дарбу (1)-(2), а для эквивалентного ей функционально-интегрального уравнения над пространством $L_p^n \equiv L_p^n\,(\Pi)$

$$z(t)=f(t,A[z](t),u(t)),\ t\in\Pi,\ z\in L_p^n, \tag{3}$$

где

$$f(t,l,v)\equiv g(t,l_0+\varphi_1(t^1)+\varphi_2(t^2),l_1+\varphi_1'(t^1),l_2+\varphi_2'(t^2),v),$$

$l\equiv\{l_0,l_1,l_2\}$, $A[z](t)\equiv\{A_0[z](t),A_1[z](t),A_2[z](t)\},\ t\in\Pi$ — оператор (называемый ниже *основным интегральным оператором*), задаваемый формулами $A_0[z](t)\ \equiv\ \int\limits_0^{t^1}\int\limits_0^{t^2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,\ A_1[z](t)\ \equiv\ \int\limits_0^{t^2} z(t^1,\xi)d\xi,\ A_2[z](t)\ \equiv \int\limits_0^{t^1} z(\xi,t^2)d\xi,\ t\in\Pi$. Уравнение (3) эквивалентно задаче (1)-(2), поскольку между классами функций W и L_p^n существует взаимно-однозначное соответствие, определенное формулой

$$x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + \int\limits_0^{t^1}\int\limits_0^{t^2} z(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2,\ t \in \Pi,$$

где $x \in W,\ z \in L_p^n$.

Случай решений класса AC_p^n, в отличие от преимущественно изучавшегося до недавнего времени для задачи (1)-(2) случая решений с ограниченными производными, многовариантен — он допускает различные естественные варианты условий на нелинейную управляемую систему, отличающиеся друг от друга используемой в них априорной информацией о предполагаемом решении. В диссертации требования к управляемой системе (1)-(2) предъявляются, как правило, в виде условий либо на *оператор правой части* $F\,[z, u]\,(t) \equiv f(t, A[z](t), u(t))$, либо непосредственно на *функцию правой части* $f(t, l, v)$ уравнения (3).

Теоремы УСГР доказываются в диссертации методом продолжения локальных решений уравнения (3) с помощью специальной локальной теоремы существования. Принципиальное отличие этой процедуры от подобной, относящейся к случаю решений с ограниченными смешанной и первыми производными (см., например, [S2] и [25]), состоит в том, что здесь, вообще говоря, невозможно стандартное обоснование применения принципа сжимающих отображений нахождением квазинильпотентной мажоранты линейного оператора правой части линеаризованного уравнения (3). Вместо этого для такого обоснования в диссертации используется введенное в [S1] понятие равностепенно квазинильпотентного семейства операторов.

Пусть B — банахово пространство, $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство действующих в пространстве B квазинильпотентных операторов, зависящих от парамет-

[25] Сумин, В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи/ В.И. Сумин. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. — 110 с.

ра γ из некоторого множества Γ. Следуя [S1], назовем это семейство равностепенно квазинильпотентным, если $\sqrt[i]{\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|G^i(\gamma)\|_{B\to B}} \to 0$ при $i\to\infty$, и — суперравностепенно квазинильпотентным, если

$$\sqrt[i]{\sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_i\in\Gamma}\|G(\gamma_1)\cdot\ \ldots\ \cdot G(\gamma_i)\|_{B\to B}} \to 0 \text{ при } i\to\infty.$$

В диссертации используется следующее утверждение из [S1], развивающее известные утверждения об эквивалентной норме[26].

Пусть норма $\|\cdot\|$ *пространства* B *монотонна относительно полуупорядоченности* B *по некоторому конусу* K, *а семейство операторов* $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$, *для каждого из которых конус* K *является инвариантным, равномерно ограничено и суперравностепенно квазинильпотентно. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует эквивалентная норме* $\|\cdot\|$ *норма* $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* B, *монотонная относительно полуупорядоченности* B *по конусу* K *и такая, что для каждого* $\gamma\in\Gamma$ *соответствующая норма оператора* $G(\gamma)$ *не превосходит* ε.

Сформулированное утверждение позволяет, в частности, преодолеть указанную трудность с обоснованием применения принципа сжимающих отображений.

Опишем основные результаты главы 1. Заметим, что в тех случаях, которые рассматриваются в диссертации, каждому $u\in D$ может отвечать не более одного решения $x\in W$ задачи (1)-(2). Множество тех $u\in D$, каждому из которых отвечает такое глобальное решение, обозначаем Ω. Везде ниже: u_0 — некоторый фиксированный элемет Ω, $x_0\in W$ — глобальное решение (1)-(2), отвечающее u_0;

$$\Delta_v g(\cdot)\equiv g(\cdot,x_0(\cdot),x'_{0t^1}(\cdot),x'_{0t^2}(\cdot),v)) - g(\cdot,x_0(\cdot),x'_{0t^1}(\cdot),x'_{0t^2}(\cdot),u_0(\cdot)),$$

$v\in\mathbf{R}^m$.

[26] Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений/ М.А. Красносельский.— М.: ГИФМЛ, 1962.—394 с. (Гл.2, §2)

Приведем достаточные условия УСГР из §1.3, где предположения формулируются в терминах функции правой части, не останавливаясь подробно на существенно более грубых (хотя и обслуживающих более широкий класс систем (1)-(2)) условиях УСГР из §1.2, где требования к системе задаются в терминах оператора правой части и мерой близости возмущенного u и невозмущенного u_0 управлений служит величина $R(u,u_0) \equiv \|\Delta_u g\|_{L_p^n}$ (при достаточной гладкости правой части по управлению из теоремы УСГР §1.2 могут быть получены утверждения типа теорем о неявной функции, в которых мерой близости u и u_0 служит величина $\|u-u_0\|_{L_s^m}$).

Примем обозначения:

$$\mathfrak{M}_0 \equiv L_\infty^n,\ \mathfrak{M}_1 \equiv L_p^n,\ \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1,$$

$$\mathfrak{N}_0 \equiv L_p^{n\times n},\ \mathfrak{N}_1 \equiv L_\infty^{n\times n},\ \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_1.$$

В §1.3 учитывается, что область значений основного интегрального оператора лежит в $\mathfrak{M}$. Пусть: $J\,[x]\,(t) \equiv \{x\,(t)\,, x'_{t^1}\,(t)\,, x'_{t^2}\,(t)\}$, $t \in \Pi$, $x \in AC_p^n$; $r(u,u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{\mathfrak{M}}$, $u \in D$.

Теоремы 1.3.3 и 1.3.4. *Пусть фиксированы некоторые* $u_0 \in \Omega$, $d_0 > 0$ *и выполняются условия: формула* $\mathbf{f}[y,u](t) \equiv f(t,y(t),u(t))$ *определяет оператор* $\mathbf{f}[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M}\times D \to L_p^n$, *формула* $\mathbf{f}_1[y,u](t) \equiv f'_l(t,y(t),u(t))$ *определяет ограниченный оператор* $\mathbf{f}_1[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M}\times D \to \mathfrak{N}$. *Тогда:* 1) *существует* $\delta > 0$ *такое, что если только* $u \in D$, $\|u-u_0\|_{L_s^m} < d_0$, $r(u,u_0) < \delta$, *то* $u \in \Omega$; 2) *для любого* $M_0 > 0$ *существует* $C > 0$ *такое, что если* $x \in W$ *— отвечающее* $u \in \Omega$ *глобальное решение* (1)-(2), *причем* $\|u-u_0\|_{L_s^m} < d_0$, $\|J\,[x-x_0]\|_{\mathfrak{M}} \le M_0$, *то* $\|J\,[x-x_0]\|_{\mathfrak{M}} \le Cr(u,u_0)$.

Приведем простой пример семейства вектор-функций $f = \{f^1,\ldots,f^n\}$, для которого выполняются условия теорем 1.3.3 и 1.3.4, считая, что D — класс управлений, принимающих значения из некоторого ограниченного множества:

$$f^k(t,l,v) = f_0^k(t,l_0,v) + \mu_1^k(l_1) f_1^k(t,l_0,v) + \mu_2^k(l_2) f_2^k(t,l_0,v), \qquad (4)$$

где f_i^k вместе с производной по l_0 удовлетворяет условиям типа Каратеодори и ограничена на любом ограниченном множестве ($i = 0,1,2$), а $\mu_j^k(\cdot)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — гладкая функция с линейным порядком роста и ограниченной производной ($j = 1,2$), $k = 1,\ldots,n$.

В §1.4 теорема УСГР получена с более точным учетом свойств основного интегрального оператора, чем в §1.3. Обозначим через $L_{q(j)}$ лебегово пространство $L_q([0,1])$ функций переменной t^j, $j \in \{1,2\}$, $q \in [1,\infty]$, а через $L_{q(j),r(i)}(\Pi)$ — банахово пространство функций $z(t)$, $t \in \Pi$ с нормой $\|z\|_{q(j),r(i),\Pi} \equiv \left\| \|z(t^1,t^2)\|_{L_{q(j)}} \right\|_{L_{r(i)}}$ $(i,j \in \{1,2\},\ i \neq j;\ q,r \in [1,\infty])$. Положим:

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \equiv L^n_{\infty(2),p(1)},\ \widetilde{\mathfrak{M}}_2 \equiv L^n_{\infty(1),p(2)},\ \widetilde{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}_0 \times \widetilde{\mathfrak{M}}_1 \times \widetilde{\mathfrak{M}}_2;$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_1 \equiv L^{n\times n}_{p(2),\infty(1)},\ \widetilde{\mathfrak{N}}_2 \equiv L^{n\times n}_{p(1),\infty(2)},\ \widetilde{\mathfrak{N}} \equiv \mathfrak{N}_0 \times \widetilde{\mathfrak{N}}_1 \times \widetilde{\mathfrak{N}}_2;$$

$\widetilde{r}(u,u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{\widetilde{\mathfrak{M}}}$, $u \in D$. В §1.4 учитывается, что $A\left[L_p^n\right]$ лежит в пространстве $\widetilde{\mathfrak{M}}$, существенно более узком чем $\mathfrak{M}$.

Теорема 1.4.1. *Пусть фиксированы некоторые* $u_0 \in \Omega$, $d_0 > 0$ *и выполняются условия: формула* $\widetilde{\mathbf{f}}[y,u](t) \equiv f(t,y(t),u(t))$ *определяет оператор* $\widetilde{\mathbf{f}}[\cdot,\cdot]\colon \widetilde{\mathfrak{M}} \times D \to L_p^n$; *формула* $\widetilde{\mathbf{f}}_1[y,u](t) \equiv f_l'(t,y(t),u(t))$ *определяет ограниченный оператор* $\widetilde{\mathbf{f}}_1[\cdot,\cdot]\colon \widetilde{\mathfrak{M}} \times D \to \widetilde{\mathfrak{N}}$. *Тогда:* 1) *существует* $\delta > 0$ *такое, что если только* $u \in D$, $\|u-u_0\|_{L_s^m} < d_0$, $\widetilde{r}(u,u_0) < \delta$, *то* $u \in \Omega$; 2) *для любого* $M_0 > 0$ *существует* $C > 0$ *такое, что если* $x \in W$ — *отвечающее* $u \in \Omega$ *глобальное решение* (1)-(2), *причем* $\|u-u_0\|_{L_s^m} < d_0$, $\|J\,[x-x_0]\|_{\widetilde{\mathfrak{M}}} \le M_0$, *то* $\|J\,[x-x_0]\|_{\widetilde{\mathfrak{M}}} \le C\widetilde{r}(u,u_0)$.

Приведем пример семейства вектор-функций $f = \{f^1,\ldots,f^n\}$, для которого выполняются условия теоремы 1.4.1, считая, что D — класс управлений, принимающих значения из некоторого ограниченного множества:

$$f^k(t,l,v) = f^k_*(t,l,v) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu^k_{ij}\Big(\alpha^k_{ij}(t,l_0,v)l_1^i l_2^j\Big),$$

где f^k_* — функция вида (4), $\mu^k_{ij}(\cdot)\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — гладкая функция с линейным порядком роста и ограниченной производной, α^k_{ij} вместе с производной по l_0 удовлетворяет условиям типа Каратеодори и ограничена на любом ограниченном множестве $(1 \le i,j \le n)$, $k = 1,\ldots,n$.

Признак УСГР из §1.3, действующий на более узком классе систем, тоньше признака из §1.4, так как $r(u,u_0) \le \widetilde{r}(u,u_0)$ для $u \in D$. Последний пункт §1.4 посвящен иерархии условий УСГР типа теоремы 1.4.1. В семействе $\mathcal{L}$ пространств вида $L^n_{q_0} \times L^n_{q_1(j_1),r_1(i_1)} \times L^n_{q_2(j_2),r_2(i_2)}$ пространство $\widetilde{\mathfrak{M}}$ наименьшее по вложению из содержащих образ $A[L^n_p]$. В этом смысле теорема 1.4.1 максимально полно учитывает априорную информацию о решении класса AC^n_p и охватывает максимально широкий круг задач (1)-(2). Заменяя в теореме 1.4.1 пространство $\widetilde{\mathfrak{M}}$ некоторым более широким $\widehat{\mathfrak{M}} \in \mathcal{L}$ и соответствующим образом меняя $\widetilde{\mathfrak{N}}$ (при этом класс рассматриваемых задач (1)-(2) изменится), получаем другие условия УСГР.

Теоремы УСГР главы 1 существенным образом используются в следующих главах при вычислении вариаций функционалов в задачах оптимизации.

Глава 2 посвящена выводу ППМ в общей терминальной задаче оптимизации управляемой системы Гурса-Дарбу (1)-(2) с полной каратеодориевской правой частью уравнения при следующих требованиях к функции правой части, несколько более сильных, чем в §1.3: формула $\mathbf{f}[y,u](t) \equiv f(t,y(t),u(t))$ определяет ограниченный оператор $\mathbf{f}[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M}\times D \to L^n_p$; формула $\mathbf{f}_1[y,u](t) \equiv f'_l(t,y(t),u(t))$ определяет ограниченный оператор $\mathbf{f}_1[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M}\times D \to \mathfrak{N}$; для любого $u \in D$ оператор $\mathbf{f}_1[\cdot,u]\colon \mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ непрерывен. Класс D состоит из управлений $u(\cdot) \in L^m_\infty$ со значениями из ограниченного $V \subset \mathbf{R}^m$.

В качестве простого примера систем, удовлетворяющих сформулированным требованиям, можно указать семейство систем с функциями f вида (4), где f_j^k имеют производные по l_0, непрерывные по l_0 на любом ограниченном множестве элементов $l_0 \in \mathbf{R}^n$ равномерно относительно $\{t, v\} \in \Pi \times V$.

Для вывода ППМ применяется традиционное игольчатое варьирование и схема учета ограничений по В.И.Плотникову[27]. Центральный момент доказательства — вычисление вариаций функционалов. Нетривиальное отличие этой процедуры от подобной, относящейся к случаю решений с ограниченными производными (см., например, [Р2] и [28]) связано с тем, что здесь семейство линейных операторов правых частей линеаризованных уравнений (3), получающихся при разных параметрах варьирования, не обладает, вообще говоря, общей квазинильпотентной мажорантой. Поэтому при вычислении вариаций существенно используется понятие равностепенно квазинильпотентного семейства операторов.

В **главе 3** изучаются измеримые ОУ ППМ для терминальной задачи оптимизации нелинейной системы (1), (2). Показано, что, если производные входят в правую часть (1) аффинно и аддитивно отделены от управления, то есть

$$g(t, l, v) \equiv g_1(t, l_0)l_1 + g_2(t, l_0)l_2 + g_0(t, l_0, v), \tag{5}$$

то, вообще говоря, происходит сильное вырождение ППМ (— НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда вместе с ППМ вырождаются и условия второго порядка. Выводятся содержатель-

[27] Плотников, В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида/ В.И. Плотников// Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1972. — Т. 36, № 3. — С. 652–679.

[28] Сумин, В.И. Вольтерровы функциональные уравнения и принцип максимума для распределенных оптимизационных задач/ В.И. Сумин// Вестник Нижегородского университета. Серия Математика. — 2004. — Вып.1(2). — С. 178–191.

ные НУО сильно вырожденных ОУ. Применяется общая схема [29] [30] [31] изучения ОУ, опирающаяся на возможность представления управляемой системы в форме вольтеррова функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве и использующая теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов. По той же причине, что и в главе 2, при вычислении вариаций используется понятие равностепенной квазинильпотентности.

Как и в главе 2 класс D состоит из всех управлений, принимающих значения из некоторого ограниченного множества V. Предполагается, что функция g удовлетворяет следующим требованиям: $g_0(t, l_0, v)$ дважды дифференцируема по l_0 при каждом v для почти всех t и вместе с g'_{0l_0}, $g''_{0l_0l_0}$ измерима по t при любых $\{l_0, v\}$, непрерывна по $\{l_0, v\}$ для почти каждого t и ограничена на любом ограниченном множестве; на любом ограниченном множестве элементов l_0 функции g_0, g'_{0l_0} и $g''_{0l_0l_0}$ непрерывны по l_0 равномерно относительно $\{t, v\} \in \Pi \times V$; матрицы-функции $g_1(t, l_0)$ и $g_2(t, l_0)$удовлетворяют аналогичным условиям и кроме того g_1 (соотв. g_2) непрерывна по t^1 (соотв. по t^2) при любых $\left\{t^2, l_0\right\}$ (соотв. $\left\{t^1, l_0\right\}$). В данной специальной ситуации решение задачи (1), (2) необходимо искать в классе AC_p^n, так как $\varphi'_i \in L_p^n([0, 1])$, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим задачу оптимизации:

$$J_0[u] \equiv G(x_u(1, 1)) \to \max,\ u \in \Omega,$$

где $G(\cdot)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $x_u(\cdot)$ — решение (1)-(2), отвечающее $u \in \Omega$. Ниже: u_0 — фиксированное решение задачи оптимизации, $x_0(\cdot) \equiv x_{u_0}(\cdot)$.

---

[29] Сумин, В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации/ В.И. Сумин// ДАН СССР. — 1991. — Т.320, № 2. — С. 295-299.

[30] Сумин, В.И. Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем/ В.И. Сумин// Оптимизация. — Новосибирск: 1993. — № 52(69).— С.74-94.

[31] Сумин, В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации/ В.И. Сумин// Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 70–80.

Положим $\pi(t,v) \equiv \langle \Psi(t), \Delta_v g(t) \rangle_n$, $t \in \Pi$, $v \in V$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$— скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, Ψ — (единственное в L_∞^n) решение уравнения

$$\Psi(t) - A^* \left[g_l'(t)^* \Psi \right](t) = \left(G'(x_0(1,1)) \right)^*, \ t \in \Pi,$$

в котором $A^*[z](t) \equiv \int_{t^1}^1 \int_{t^2}^1 z^0(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 + \int_{t^2}^1 z^1(t^1,\xi)\, d\xi + \int_{t^1}^1 z^2(\xi,t^2)\, d\xi$ ($z = \left\{ z^0, z^1, z^2 \right\} \in L_1^n \times L_q^n \times L_q^n$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$), $g_l'(t) \equiv g_l'(t, x_0(t), x_{0t^1}'(t), x_{0t^2}'(t), u_0(t))$. ППМ имеет вид: $\pi(\tau, v) \le 0$ *для каждого* $v \in V$ *при почти всех* $\tau \in \Pi$. При почти каждом $t \in \Pi$ значение $u_0(t)$ принадлежит сечению $\mathcal{M}(t) \equiv \{ v \in V \ : \ \{t,v\} \in \mathcal{M} \}$ множества $\mathcal{M} \equiv \left\{ \{t,v\} \in \Pi \times V \ : \ \pi(t,v) = 0 \right\}$. Управление u_0 называется ОУ ППМ, если $\mathrm{mes}\{ t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \ne \{u_0(t)\} \} > 0$. Множество $\Pi_* \equiv \{ t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \ne \{u_0(t)\} \}$ называем множеством вырождения ППМ на управлении u_0. Случай, когда $\mathrm{mes}\Pi_* = \mathrm{mes}\Pi$ и при почти всех $t \in \Pi$ сечения $\mathcal{M}(t)$ множества $\mathcal{M}$ совпадают с V, назовем случаем *полного вырождения* ППМ.

Сформулированный ППМ является НУО первого порядка относительно обычного одноточечного игольчатого варьирования, но для изучения ОУ в общей ситуации удобно рассмотреть *обобщенное одноточечное игольчатое варьирование* (ООИВ). Пусть u_0 — ОУ ППМ. Так как $\pi(t,v) : \Pi \times \overline{V} \to \mathbf{R}$ — функция Каратеодори, то отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)} : \Pi \to 2^{\overline{V}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых сечений

$$\mathcal{K} \equiv \{ \mathrm{v_k}(\cdot) \}_{\mathrm{k}=1}^{\infty} : \ \overline{\mathcal{M}(\mathrm{t})} = \overline{\left\{ \bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \{ \mathrm{v_k}(\mathrm{t}) \} \right\}}, \quad \mathrm{t} \in \Pi_0$$

($\mathrm{mes}\ \Pi_0 = \mathrm{mes}\ \Pi$). Пусть Π_l — та часть Π_0, каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot, v_k(\cdot))$ для любой $v_k(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Пусть: $\mathbf{\Sigma}$ — совокупность всех наборов $\eta \equiv \{ \tau, v_k \}$, в каждом из которых v_k — какой-то элемент $\mathcal{K}$, $\tau \in \Pi_l$; $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^2$; $\mathbf{H}$ — семейство всех пар $\mathbf{h} \equiv \left\{ \eta, \varepsilon \right\}$, в каждой из которых $\eta \equiv \{ \tau, v_k \} \in \mathbf{\Sigma}$, а ε — такое положительное число, что $\Pi_\varepsilon(\tau) \subset \Pi$. Каждому $\mathbf{h} \equiv \{\eta, \varepsilon\} \in \mathbf{H}$ отвечает допустимое управление $v_{\mathbf{h}}(t) \equiv \{v_k(t),\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ u_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору *параметров варьирования* $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$ — семейство функций $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h}\equiv\{\eta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}}$, обобщенная одноточечная игольчатая варианта управления u_0.

Положим $\Delta_u J_0 \equiv J_0[u] - J_0[u_0]$, $u \in \Omega$. Предел $\delta^{\gamma-1} J_0(\sigma) \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{v_{\mathbf{h}}} J_0$, если он существует при некотором $\gamma \geq 2$, назовем вариацией порядка $\gamma - 1$ функционала J_0 на варианте $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-1} J_0(\eta) \leq 0$ ($\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$) назовем НУО порядка $\gamma - 1$ управления u_0 при ООИВ. Назовем ОУ u_0 *сильно вырожденным* для ООИВ, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J_0(\eta) \equiv 0$, $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$. Первая вариация $\delta J_0(\eta) \equiv \delta J_0(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{-2} \Delta_{v_{\mathbf{h}}} J_0\right)$ при любом $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$ существует и равна $\pi(\tau, v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для ОУ u_0 имеем: $\delta J_0(\eta) \equiv 0$, $\eta \in \mathbf{\Sigma}$.

При сформулированных условиях справедлива следующая теорема о сильном вырождении ОУ.

Теорема 3.10.1. *Если* u_0 — ОУ *для* ППМ, *то из* НУО, *полученных для* u_0 *с помощью* ООИВ, *вырождаются все условия до порядка* 2 *включительно и содержательными могут быть лишь* НУО *порядка, большего* 2; *таким образом,* ОУ u_0 *будет сильно вырожденным* ОУ *для* ООИВ.

Сформулируем доказываемые в диссертации НУО сильно вырожденных ОУ (НУО третьего порядка при ООИВ). Пусть $\Theta_0(t,s)$ и $\Theta_1(t,s)$ — $(n\times n)$-матрицы, а $\Theta_2(t,s)$ — $(n\times 3n^2)$-матрица, определяемые формулами: $\Theta_0(t,s) \equiv 2^{-1} G''(x_0(1,1))$;

$$\Theta_1(t,s) \equiv 2^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1} \int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1} \Xi_{00}(\xi)d\xi + \mathfrak{K}(s^1 - t^1) \int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1} \Xi_{01}(s^1,\xi^2)d\xi^2 +$$

$$+\mathfrak{K}(s^2-t^2)\int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1}\Xi_{02}(\xi^1,s^2)d\xi^1+\mathfrak{K}(t^1-s^1)\int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1}\Xi_{10}(t^1,\xi^2)d\xi^2+$$

$$+\mathfrak{K}(t^2-s^2)\int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1}\Xi_{20}(\xi^1,t^2)d\xi^1\Bigg\}\ (t,s\in\Pi),$$

где $\Xi_{ij}(t)\equiv\left\{\langle\Psi(t),g(t,l,u_0(t))\rangle_n\right\}''_{l_il_j}\Big|_{l=\{E[x_0](t)\}}$, $\mathfrak{K}(\cdot)$ — функция Хевисайда;

$$\Theta_2(t,s)\equiv\left(\Theta_2^{ij}(t,s)\right),\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le 3n^2\ (t,s\in\Pi),$$

где

$$\Theta_2^{ij}(t,s)=\begin{cases}\Psi^{j-(i-1)n}(s)\mathfrak{K}(s^1-t^1)\mathfrak{K}(s^2-t^2), & (i-1)n+1\le j\le in\\ 0, & j\le(i-1)n \text{ или } j>in.\end{cases}$$

Функция Ψ непрерывна на Π, Θ_1 непрерывна на $\Pi\times\Pi$, а Θ_2 непрерывна везде на $\Pi\times\Pi$ за исключением, может быть, границы тела $\left\{\{t,s\}\in\Pi\times\Pi\colon s^1\ge t^1,s^2\ge t^2\right\}$, где возможен конечный скачок. Формулой $S[z](t)\equiv z(t)-g'_l(t)A[z](t)$, $z\in L_1^n$, $t\in\Pi$ в L_1^n определяется линейный ограниченный оператор S. Пусть: I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^n\otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение (совпадающее с $L_1^{n\times k}(\Pi\times\Pi)$). Уравнение

$$(S\otimes S)^*[\eta(t,s)]=\Theta_i(t,s)$$

имеет единственное в $L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_i(t,s)$ $(i=0,1)$. Уравнение

$$(S\otimes I_{3n^2})^*[\eta(t,s)]=\Theta_2(t,s)$$

имеет единственное в $L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$. Для $t,s\in\Pi$, $u,v\in V$ положим

$$\Upsilon(t,s;u,v)\equiv\left\langle\Delta_u g(t),\{\eta_0(t,s)+\eta_1(t,s)\}\Delta_v g(s)+\eta_2(t,s)\{\Delta_v g'_l(s)\}^0\right\rangle_n,$$

где $\{\Delta_v g'_l(s)\}^0$ — $3n^2$-столбец, полученный развертыванием по правилу "столбец за столбцом" $(n\times 3n)$-матрицы $\Delta_v g'_l(s)$. Следующая теорема содержит общие НУО особых управлений ППМ (НУО порядка 3 для ООИВ).

Теорема 3.10.2. *Если* u_0 — ОУ ППМ, *то для оптимальности* u_0 *необходимо выполнение неравенства* $\Upsilon(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0$ *при любом* $\mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau)$ *для почти всех* $\tau \in \Pi$.

Полученные конкретные условия сильного вырождения ОУ ППМ являются, по-видимому, новыми. Известные автору диссертации сходные изложенным выше утверждения о НУО третьего порядка, полученные ранее другими авторами (Л.Т.Ащепков, О.В.Васильев, В.А.Срочко, К.Б.Мансимов, В.И.Сумин и др.), касались случая решений задачи Гурса-Дарбу с ограниченными смешанной и первыми производными при условии, как правило, достаточной гладкости правой части уравнения.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

[1] Лисаченко, И.В. Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Серия Математика. — 2005. — Вып. 1(3). — С.88-101.

[2] Лисаченко, И.В. Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. II/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Нижегородского университета им.Н.И.Лобачевского. Серия Математика. — 2006. — Вып. 1(4). — С.65-80.

[3] Лисаченко, И.В. Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса-Дарбу/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Нижегородского университета им.Н.И.Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2006. — Вып.2(31). — С.64-81.

[4] Лисаченко, И.В. Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Дифференц. уравнения. — 2011. — Т.47, № 6. — С. 858-870.

[5] Лисаченко, И.В. Необходимые условия оптимальности для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 3(2). — С.115-120.

[6] Лисаченко, И.В. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Вып.2. — С.52-67.

[7] Лисаченко, И.В. Об управляемой задаче Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. — 2011. — Т. 16, Вып. 4. — С. 1116-1118.

Прочие публикации

[8] Лисаченко, И.В. Об условиях сохранения глобальной разрешимости управляемой задачи Гурса-Дарбу/ И.В. Лисаченко// Нелинейные колебания механических систем: VII Всероссийская научная конф. Труды. — Н. Новгород: 2005. — С.147-149.

[9] Лисаченко, И.В. О сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса-Дарбу/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Понтрягинские чтения-XVIII. Тезисы докл. — Воронеж: 2007. — С. 108-109.

[10] Лисаченко, И.В. Об управляемой задаче Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. — 2007. — Т. 12, Вып. 4. — С. 477-479.

[11] Лисаченко, И.В. Нелинейная задача Гурса-Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями/ И.В. Лисаченко// Вестник Нижегородского университета им.Н.И.Лобачевского. — 2008. — Вып.5. — С.107-112.

[12] Лисаченко, И.В. Условия сохранения глобальной разрешимости задачи Гурса-Дарбу при возмущении управления/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин/ Деп. в ВИНИТИ 06.02.2008. № 85 - В2008.

[13] Лисаченко, И.В. О глобальных решениях задачи Гурса-Дарбу/ И.В. Лисаченко// Понтрягинские чтения-XIX. Тезисы докл. — Воронеж: 2008. — С. 129.

[14] Лисаченко, И.В. Нелинейная задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости при возмущении управления/ И.В. Ли-

саченко, В.И. Сумин// Труды VIII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем".— Т.1. — Н.Новгород: 2008. — С.221-226.

[15] Лисаченко, И.В. Управляемая задача Гурса-Дарбу: варианты условий сохранения разрешимости "в целом"/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Понтрягинские чтения -XX. Тезисы докл. — Воронеж: 2009. — С. 108-109.

[16] Лисаченко, И.В. Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения разрешимости "в целом"/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. — 2009. — Т. 14, Вып. 4. — С. 736-738

[17] Лисаченко, И.В. Задача оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной/ И.В. Лисаченко// Понтрягинские чтения-XXI. Тезисы докл. — Воронеж: 2010.

[18] Лисаченко, И.В. Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости и их применения/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин// Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Н. Новгород, 20-25 июня 2011 г.) — Н.Новгород: 2011. — С. 268-272.

[19] Лисаченко, И.В. Об особых управлениях поточечного принципа максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу/ И.В. Лисаченко, В.И. Сумин/ Деп. в ВИНИТИ 13.03.2012 № 89 - В2012. 26 с.