На правах рукописи

Емелин Александр Викторович

ИЗУЧЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ САМОПОДОБНЫХ ВИЗУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Нижний Новгород, 2012

Работа выполнена на кафедре математики, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А.П. Гайдара»

Научный руководитель:	доктор педагогических наук, профессор **Зайкин Михаил Иванович**
Официальные оппоненты:	доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и теории обучения математики ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный педагогический университет» **Тестов Владимир Афанасьевич**
	кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой педагогики и психологии Коряжемского филиал ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова» **Шкильменская Наталья Анатольевна**
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина»**

Защита диссертации состоится 23 мая 2012 года в 14–30 часов на заседании ученого совета ДМ 212.166.17 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603600, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в научном читальном зале библиотеки Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Текст автореферата размещен на сайте: http://www.unn.ru.

Автореферат разослан 20 апреля 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор педагогических наук И.В. Гребенев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. С переходом на новую образовательную парадигму возникает необходимость использования новых средств обучения, обеспечивающих более интенсивное интеллектуальное развитие школьников. Одним из таких средств в обучении математике выступают визуальные модели, позволяющие представлять объект изучения в наглядной форме. Понятие визуализации появилось в методике обучения математике сравнительно недавно, однако, вопросы, связанные с повышением наглядности процесса обучения математике в школе и развитием образного мышления учащихся, интересуют исследователей на протяжении довольно длительного времени. К работам, имеющим особо важное значение в исследовании наглядности процесса обучения школьников математике, следует отнести, прежде всего, труды П.А. Карасева, И.Ф. Шарыгина, В.А. Крутецкого, И.С. Якиманской, В.Г. Болтянского, А.Г. Гайштута, Э.Ю. Красса, П.Я. Дорфа, А.Я. Цукаря, Л.М. Фридмана и др.

Визуализация при обучении математике необходима, в первую очередь, там, где познавательная деятельность школьника предполагает работу с материалом, предметная (а, значит, и визуальная) основа которого является трудной для восприятия, а само знание – весьма абстрактным. Исследованием визуализации математических знаний занимались такие ученые, как В.А. Далингер, М.И. Башмаков, Н.А. Резник, А.В. Пчелин, Е.В. Никольский и др.

Особую методическую ценность визуализация имеет при изучении иррациональных чисел в школьном курсе алгебры. Это объясняется тем, что их полноценное усвоение предполагает преодоление учащимися высокого уровня абстрактности и объективной сложности содержания учебного материала, требует наличия знаний, скрытых от непосредственного восприятия, оперирования понятиями, не имеющими не только наглядных интерпретаций в учебно-методической литературе по математике, но и аналогов в опыте человека.

Значительный вклад в развитие учения об иррациональных числах в школьном курсе алгебры был сделан такими известными учеными, как И.К. Андронов, В.М. Брадис, К.С. Барыбин, Ю.М. Колягин, Ю.Н. Макарычев, А.А. Столяр, Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович, В.В. Репьев, С.Е. Ляпин, В. Серпинский и др.

Работы этих и других авторов, касающиеся учения об иррациональных числах в школьном курсе алгебры, посвящены преимущественно вопросам совершенствования методов приближенного вычисление корней и преобразования выражений, состоящих из них, и направлены на раскрытие способов упрощения иррациональных выражений путем использования формул сокращенного умножения и некоторых других приёмов. При этом почти не затрагивается образная составляющая преобразований иррациональных выражений и, прежде всего, самих иррациональных чисел, а также визуальная основа арифметических действий с ними, в результате чего знания, которые получают школьники, нередко являются формальными.

В методической литературе по математике, несмотря на наличие научных работ и рекомендаций по изучению иррациональных чисел, проблема эффективных визуальных средств обучения, которые способствовали бы формированию правильных представлений школьников об иррациональных числах, не нашла достаточно полного решения, что, по-видимому, и является причиной недостаточности образной составляющей учебного материала школьных учебников.

Как следствие из данного обстоятельства, вопрос об исследовании методов и механизмов визуализации иррациональных чисел, которые позволили бы наглядно интерпретировать понятия, определяющие во взаимосвязи их природу, также является открытым.

Отдельные вопросы визуализации иррациональных чисел отражены в работах таких отечественных ученых, как А.Я. Хинчин, В.И. Арнольд, М.И. Зайкин, В.В. Вавилов, а также в работах зарубежных ученых: А. Нивена, Д.М. Борвейна и П.М. Борвейна, С. Рамануджана и др. Но специальных исследований, посвященных визуализации иррациональных чисел в школе, практически нет.

Другими словами, в условиях отсутствия эффективных визуальных средств обучения школьникам достаточно сложно усвоить сам базис теории иррационального числа, необходимый для понимания его сущности, дальнейшего изучения материала, связанного с иррациональными числами, и формирования понятия действительного числа.

На основании проведенного анализа методической литературы по математике, посвященной проблеме изучения иррациональных чисел в средней школе, и практики математического образования школьников было определено **противоречие** между необходимостью визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы и отсутствием методических средств, позволяющих наглядно представлять иррациональные числа, производить действия с ними и использовать полученные визуальные модели в процессе обучения.

Из этого противоречия логически вытекает **проблема исследования**: каким образом осуществлять визуализацию иррациональных чисел в школьном курсе алгебры, чтобы облегчить восприятие школьниками иррациональных чисел, обеспечить видимость скрытых закономерностей и отношений, свойственных им, способствовать пониманию учащимися сущности иррациональных чисел и их полноценному усвоению?

Объектом исследования является процесс обучения учащихся алгебре в средней школе.

Предметом исследования являются цели, объекты, формы, методы, механизмы и средства визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы.

Цель исследования заключается в теоретическом обосновании и разработке методического обеспечения изучения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с использованием самоподобных визуальных моделей.

Гипотеза исследования заключается в том, что облегчение восприятия школьниками иррациональных чисел, видимости скрытых закономерностей и отношений, свойственных им, понимание учащимися сущности иррациональных чисел и их полноценное усвоение в курсе алгебры средней школы могут быть обеспечены, если:

– изучение иррациональных чисел осуществлять с использованием визуализации учебного материала, обогащающей его образную составляющую и способствующей активизации мышления учащихся;

– разработать и задействовать в процессе обучения модель методической системы визуализации иррациональных чисел, включающую цели, объекты, формы, методы, механизмы и средства их наглядного представления, являющиеся самоподобными визуальными моделями иррациональных чисел;

– в качестве основных математических объектов, составляющих самоподобные визуальные модели иррациональных чисел и способствующих их визуализации, использовать десятичные дроби, вложенные радикалы и логарифмы.

В соответствии с целью и гипотезой исследования были определены следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать проблему изучения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с целью определения путей совершенствования методики обучения.

2. Обосновать необходимость использования самоподобных визуальных моделей при изучении иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы как средства, позволяющего усилить образную составляющую учебного материала.

3. Раскрыть цели, объекты, формы, методы и механизмы визуализации иррациональных чисел и разработать модель методической системы визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы.

4. Разработать методическое обеспечение к использованию самоподобных визуальных моделей при изучении иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы.

5. Проверить экспериментально эффективность разработанного методического обеспечения.

Методологической основой диссертационного исследования являются исследования визуального мышления и восприятия (Р. Арнхейм, В.П. Зинченко, И.С. Якиманская и др.); научные работы, касающиеся наглядности математических знаний (В.Г. Болтянский, И.Ф. Шарыгин, П.А. Карасев и др.);фундаментальные положения фрактальной геометрии (Б.Б. Мандельброт, А.Д. Морозов, С.В. Божокин и др.); а также положения системного и личностно-деятельностного подходов и общефилософские положения об объективности причинно-следственных связей и законов природы.

Теоретической основой исследования являются

– философские исследования знаково-символьной информации (А.В. Славин, К.А. Свасьян, М.К. Мамардашвили и др.);

– математические работы, раскрывающие различные подходы к трактовке понятия иррационального числа (Евклид, Г. Кантор, Р. Дедекинд и др.);

– работы педагогов-математиков по методике обучения алгебре в средней школе (Ю.М. Колягин, Н.Я. Виленкин, Ю.Н. Макарычев и др.);

– исследования по визуализации математических знаний в процессе обучения (В.А. Далингер, Н.А. Резник, А.В. Пчелин и др.).

Методы исследования: изучение и анализ методической, математической, психолого-педагогической и философской литературы; наблюдение, анкетирование, тестирование; анализ контрольных и самостоятельных работ школьников по алгебре; методы математической статистики.

Этапы исследования:

1) 2008 – 2009 гг. − изучение и анализ методической, математической, психолого-педагогической и философской литературы, а также школьной практики обучения математике; определение темы и проблемы диссертационного исследования; разработка структуры диссертации;

2) 2009 – 2010 гг. − дальнейшее изучение проблемы исследования; разработка теоретических основ диссертационного исследования и модели визуализации иррациональных чисел в школьном курсе алгебры; формулирование основных положений;

3) 2010 – 2011 гг. − разработка методического обеспечения к изучению иррациональных чисел на основе предложенной модели и его экспериментальная проверка; апробация предложенной модели; анализ и систематизация результатов исследования; оформление диссертационной работы.

Научная новизна исследования заключается в том, что к изучению иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы предложен новый подход, основанный на расширении образной составляющей учебного материала с помощью самоподобных визуальных моделей, облегчающих восприятие школьниками иррациональных чисел, обеспечивающих видимость скрытых закономерностей и отношений, свойственных им, способствующих пониманию школьниками сущности иррациональных чисел и их полноценному усвоению.

Теоретическая значимость исследования:

– обоснована целесообразность использования в качестве основного средства визуализации иррациональных чисел в школьном курсе алгебры самоподобных визуальных моделей;

– раскрыта сущность понятия самоподобной визуальной модели иррационального числа;

– разработана модель визуализации иррациональных чисел, изучаемых в школьном курсе алгебры, включающая цели, объекты, формы, методы, механизмы и средства наглядного представления учебного материала.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанное методическое обеспечение к использованию самоподобных визуальных моделей при изучении иррациональных чисел может быть непосредственно применено в практике математического образования. Данное методическое обеспечение может быть использовано на уроках алгебры в 8–11 классах средней школы, а также на факультативных занятиях по математике.

Обоснованность и достоверность проведенного исследования, его результативность и выводы обусловлены опорой на теоретические разработки в области психологии, педагогики, теории и методики обучения математике, совокупностью задействованных методов исследования, а также положительными результатами проведенного эксперимента.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Облегчение восприятия школьниками иррациональных чисел, видимости учениками скрытых закономерностей и отношений, свойственных им, понимание сущности иррациональных чисел и их полноценное усвоение могут быть обеспечены в обучении благодаря визуализации учебного материала, которая обогащает его образную составляющую и способствует активизации мышления учащихся.

2. Визуализацию иррациональных чисел в школьном курсе алгебры целесообразно осуществлять на основе целостной методической системы, включающей цели, объекты, формы, методы, механизмы и средства их наглядного представления, предметную основу которой образуют самоподобные визуальные модели иррациональных чисел.

3. В качестве основных математических объектов, составляющих самоподобные визуальные модели иррациональных чисел и способствующих их визуализации в школьном курсе алгебры, могут быть использованы десятичные дроби, вложенные радикалы и логарифмы.

На защиту выносится также методическое обеспечение к использованию самоподобных визуальных моделей при изучении иррациональных чисел, действий с иррациональными числами, а также при изучении иррациональных чисел на факультативных занятиях в курсе алгебры средней школы.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись в виде обсуждений на заседаниях кафедры математики, теории и методики обучения математике АГПИ им. А.П. Гайдара; а также в виде выступлений на: Всероссийской научной конференции «Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фундаментализации образования» (Саранск; 2009); VII Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные технологии в образовании и профессиональной деятельности» (Арзамас, 2010); Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современный учитель сельской школы России» (Арзамас, 2010); VIII Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные технологии организации обучения: на пути к новому качеству образования» (Арзамас, 2011); VI Межрегиональной научно-практической конференции «Современные проблемы информатизации образования, науки и техники» (Арзамас, 2009).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, выводов по главам, заключения, списка литературы и приложений. Основное содержание диссертации изложено на 140 страницах машинописного текста. Список литературы включает 160 источников.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 12 статей.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность проблемы диссертационного исследования, определены объект и предмет исследования, сформулирована его цель; выдвинута гипотеза и определены задачи исследования, показаны новизна, теоретическая и практическая значимость работы; сформулированы положения, выносимые на защиту.

Глава I «***Теоретические основы изучения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с использованием самоподобных визуальных моделей***» посвящена анализу проблемы изучения иррациональных чисел в методической литературе и практике математического образования школьников; обоснованию целесообразности изучения иррациональных чисел с помощью самоподобных визуальных моделей; разработке модели методической системы визуализации иррациональных чисел, включающей цели, объекты, формы, механизмы, методы и средства наглядного представления.

Анализ методической литературы по математике, затрагивающей проблему обучения школьников иррациональным числам, и практики школьного обучения показал, что основными препятствиями на пути учащихся к полноценному усвоению иррациональных чисел являются непериодичность десятичной записи иррациональных чисел и специфическая символика, введенная для их обозначения.

Трудность восприятия записи бесконечных непериодических дробей и их усвоения можно объяснить тем, что школьникам непонятна та особенность распределения цифр в их десятичном представлении, которая обеспечивает непериодичность дроби, – существование в десятичной записи иррационального числа отрезков произвольной конечной длины, в которых содержатся не все его цифры, повторяющиеся бесконечное число раз, и что в школьном курсе алгебры отсутствуют наглядные иллюстрации данного факта. В результате школьник оказывается в условиях отсутствия необходимой визуальной опоры при работе с бесконечными непериодическим дробями.

При этом обучаемые быстро забывают определение иррационального числа, воспроизводят его неверно или неточно, чему способствует и то, что в учебниках по математике отсутствуют задания, выполнение которых нацелено на усвоение этого определения; поэтому их знания об иррациональных числах носят преимущественно формальный характер.

Так, 40% учащихся 9-х классов с углубленным изучением математики, принявших участие в тестировании, не смогли правильно сформулировать данное определение; а среди школьников 10-х классов, обучающихся по обычной программе, этот показатель практически равен 100%.

Отсутствие визуальной опоры в заданиях, в свою очередь, является причиной того, что обучаемые испытывают трудности в приведении примеров иррациональных чисел, основываясь на определении.

Это подтверждают результаты тестирования: 48% учащихся 9-х классов с углубленным изучением математики ассоциируют все иррациональные числа с корнями, причем, только с квадратными; еще 32%, кроме квадратных корней, приводят примеры чисел, не являющихся иррациональными. В 10-х классах, обучающихся по обычной программе, 35% школьников привели примеры только квадратных корней, но остальные 65% не смогли привести ни одного примера иррационального числа, учитывая то, что 24%, вместо иррациональных чисел, в качестве примеров записали рациональные числа, большинство из которых составили конечные дроби.

Необходимо также отметить, что школьники испытывают трудности и при доказательстве иррациональности чисел в тех случаях, когда оно может быть проведено с помощью определения. Они практически не встречаются при решении задач с такими числами, а если и имеют дело с ними, то не всегда могут обнаружить и верно трактовать причину непериодичности их десятичной записи.

В частности, 47% учащихся 10-х классов, которые обучаются алгебре по обычной программе, не смогли установить иррациональность предложенных бесконечных непериодических дробей, т.е. практически каждый второй школьник. Не исключено при этом, что некоторая, довольно значительная, часть десятиклассников, справившихся с предложенным заданием, определили иррациональность чисел по исключительно формальным или даже неверным соображениям, на что указывают имевшие место ошибки и неточности. Причем, почти все учащиеся 10-х классов – 94% – испытывали те или иные трудности в идентификации иррациональных чисел (в 9-х классах с углубленным изучением математики этот показатель оказался значительно ниже и составил 24%, но он все равно является существенным).

Во многом формальными являются знания учащихся и об операциях с иррациональными числами: экспериментальные данные свидетельствуют о том, что им непросто усвоить то, что результат операции с двумя иррациональными числами может быть как иррациональным, так и рациональным числом; а результат операции иррационального числа и рационального (кроме случая умножения иррационального на нуль и деления нуля на иррациональное число) всегда иррационален.

К примеру, 64% учащихся 9-х классов с углубленным изучением математики не смогли дать верный ответ на вопрос о том, каким числом является произведение и частное рационального и иррационального числа. Результаты тестирования учащихся 10-х классов, в которых обучение осуществляется по обычной программе, относительно операций с иррациональными и рациональными числами таковы: 59% не смогли верно ответить на вопрос о том, каким числом может быть сумма рационального и иррационального числа; 71% не смогли дать правильный ответ на аналогичный вопрос о разности рационального и иррационального числа; 82% – о произведении; 88% – о частном.

Трудность восприятия и усвоения алгебраических иррациональных чисел обусловлена абстрактной символикой, за которой обучаемые не видят бесконечных непериодических дробей и, следовательно, допускают ошибки в понимании радикалов либо как чисел, либо как операций над числами, формально усваивают действия с иррациональными числами, часто ассоциируют все иррациональные числа с алгебраическими иррациональными числами и имеют весьма узкие представления о способах их происхождения. Поэтому принятая символика, удобная в использовании с одной стороны, является определенным визуальным барьером с другой.

Учащиеся должны сначала осознать, что такое иррациональное число, каким образом идентифицировать его среди других чисел и как производить действия с ним, чтобы усвоить его сущность; и только затем приступать к изучению алгебраических иррациональных чисел, чтобы приобрести, через ранее полученные знания, умения применять иррациональные числа при дальнейшем изучении математики и в ситуациях практического характера, с которыми школьник может столкнуться в окружающей его действительности. Если это не учитывать в процессе обучения, то в результате учащиеся будут иметь лишь формальные, фрагментарные и весьма искаженные представления об иррациональных числах, поскольку знания, которые они получат, будут абстрактными, неполными и не всегда обоснованными.

Таким образом, проблема изучения иррациональных чисел в средней школе в психологическом смысле выражается в недостаточности образной составляющей учебного материала, а в методическом − в отсутствии эффективных визуальных средств обучения.

В общей трактовке понятия визуализации прослеживаются два основных подхода:

1) визуализация в обучении есть процесс представления знания в наглядной форме;
2) визуализация есть наглядная составляющая знания.

Визуализация изучаемого материала, обеспечивающая его наглядность, предполагает повышение роли визуального мышления в процессе усвоения знаний, что, по В.Г. Болтянскому, обеспечивается созданием визуальной модели (или моделей), изоморфной тем сторонам объекта изучения, которые являются существенными для поставленных целей образовательного процесса. Он также отмечает, что именно изоморфное отражение существенных сторон изучаемого объекта в модели и простота восприятия этой модели определяют ее наглядность.

По отношению к иррациональным числам существенными чертами являются непериодичность десятичных записей иррациональных чисел и невозможность непосредственного видения бесконечной непериодической дроби в принятой символике.

В диссертации показано, что визуализировать иррациональное число – значит построить такую визуальную модель, которая имитирует его бесконечную запись удобным и предсказуемым для зрительного восприятия способом и устанавливает явную связь этого иррационального числа либо с рациональными отношениями, либо с другими относительно простыми иррациональными числами, записываемыми с помощью конечного и сравнительно небольшого числа специальных символов.

Исходя из этого, возникает закономерный вопрос о наиболее предпочтительных способах или методах визуализации иррациональных чисел.

Изучая различные концепции визуального представления информации, которые могли бы быть заложены в основу методов визуализации иррациональных чисел, нами был сделан выбор в пользу концепции самоподобия, понимаемого в настоящем исследовании в несколько более широком смысле, чем это принято в научной литературе.

Самоподобие, как известно, является одним из фундаментальных принципов организации структуры окружающего мира и представляет собой характеристическое свойство фрактала – термина, введенного математиком Б. Мандельбротом для обозначения самоподобных математических (геометрических) объектов. Информация, представленная в виде визуальной модели, обладающей свойством самоподобия, является довольно просто воспринимаемой, отражающей в самоподобии существенные стороны объекта изучения и, следовательно, наглядной для субъекта, работающего с моделью.

В нашем исследовании предпринимается попытка применить свойство самоподобия при изучении иррациональных чисел в школьном курсе алгебры: самоподобие используется для создания символьных визуальных моделей иррациональных чисел, в отличие от существующих работ, изучающих фракталы с помощью геометрических и графических моделей, что считаем важным для современной алгебры, отличающейся своеобразием символики.

Под самоподобной визуальной моделью в настоящем исследовании понимается визуальная модель, обладающая свойством структурного самоподобия, которое может выражаться в структурной идентичности целого и его частей, инвариантности основного структурного принципа записи, а также в сохранении статистических свойств модели относительно различных ее степеней приближения исходного объекта моделирования.

Когда же мы создаем самоподобную визуальную модель иррационального числа, то пытаемся преодолеть либо завуалированность причины непериодичности, либо абстрактность символики, желая увидеть за ней скрытые от непосредственного восприятия знания с помощью простого, но достаточно эффективного инструмента.

С использованием самоподобных визуальных моделей становится возможным вскрыть и наглядно продемонстрировать школьникам причину непериодичности десятичной записи иррациональных чисел.

К примеру, в десятичной записи дроби 3,1451454514545451… принцип самоподобия в следовании цифр таков: после первой по счету единицы следует комбинация цифр «45», после второй единицы – «4545», после третьей – «454545» и т.д. В записи данной дроби можно найти отрезок цифр вида «4545…45» любой конечной длины, выражающейся четным числом цифр; причем, ни один из этих отрезков цифр не содержит единицу. Значит, эта десятичная дробь является бесконечной и непериодической, следовательно, она представляет собой иррациональное число.

Самоподобные визуальные модели бесконечных непериодических дробей, аналогичные данной, целесообразно использовать при введении иррациональных чисел, т.к. они соответствуют определению иррационального числа непосредственно, наглядно отражают участвующие в его формулировке понятия и, что весьма существенно, не опираются на новую символику.

Познакомившись с такими самоподобными моделями, учащиеся самостоятельно смогут доказывать иррациональность чисел путем установления бесконечности и непериодичности выражающих их десятичных дробей, т.е. сделают первый шаг в усвоении определения иррационального числа.

Самоподобные модели бесконечных непериодических дробей удобно применять при обучении школьников оперированию иррациональными числами. Учащиеся смогут непосредственно увидеть визуальную основу этих операций и то, как при этом образуются непериодические и периодические десятичные дроби, поскольку производить действия с такими дробями можно так же, как и с конечными, т.е. поразрядно.

При работе с алгебраическими иррациональными числами складывается иная ситуация: за символикой, применяемой для их обозначения, как уже было отмечено, обучаемые не видят бесконечных непериодических дробей. Для того чтобы они могли усвоить алгебраические иррациональные числа, необходимо, чтобы их новые знания были получены в контексте уже имеющихся представлений о бесконечных непериодических дробях и связаны визуально с рациональными отношениями. Это может быть обеспечено расширением образной базы иррациональных чисел за счет внедрения самоподобных визуальных моделей в формулировки задач.

Пример. Докажите, что все следующие числа являются иррациональными: $\sqrt{3}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{333}$, … $\underbrace{\sqrt{333...3}}_{2012}$.

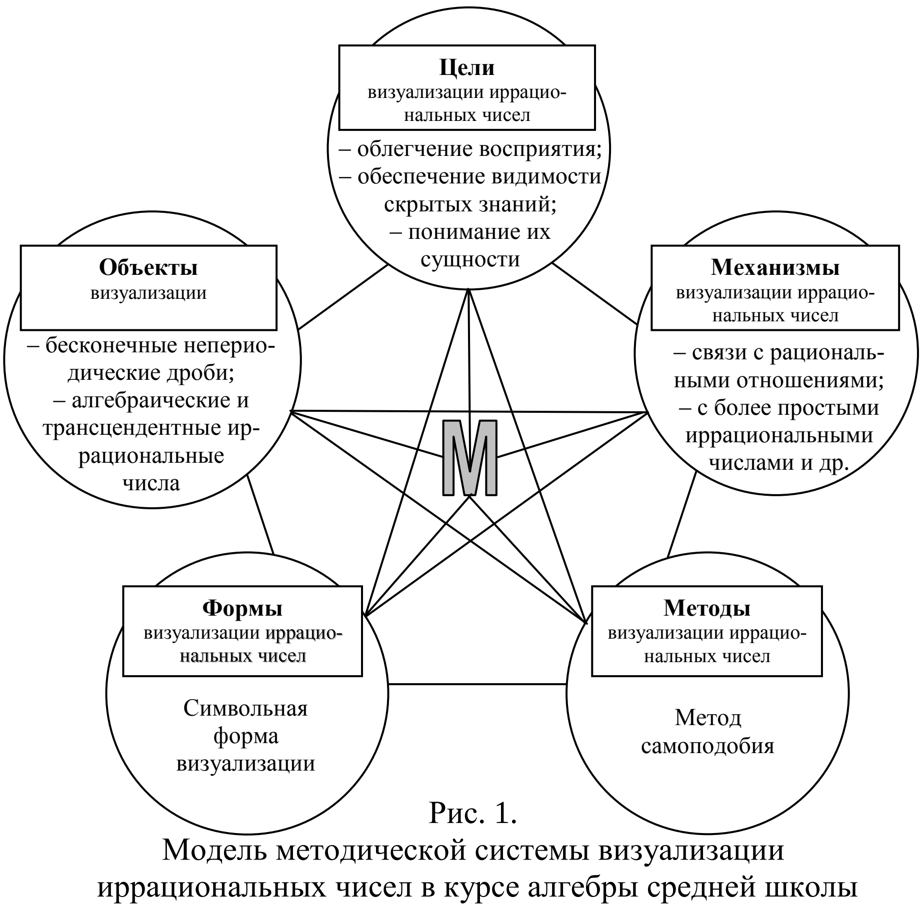

Рис. 1.
Модель методической системы визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы

Полноценно решить проблему визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы можно лишь на основе целостной методической системы. При создании её модели (рис. 1) за основу нами была взята известная модель методической системы обучения, предложенная А.М. Пышкало.

Цель визуализации иррациональных чисел определяет тот объект, который необходимо визуализировать для достижения этой цели; объектами визуализации, которые рассматриваются в настоящем исследовании, являются бесконечные непериодические десятичные дроби, а также алгебраические и трансцендентные иррациональные числа, записываемые соответственно с помощью радикалов и логарифмов.

Для того чтобы визуализировать иррациональное число, нужно выбрать форму визуализации, которая является наиболее предпочтительной для достижения поставленной цели; для указанных объектов визуализации такая форма является символьной. Определяя форму визуализации, мы фактически задаем визуальную форму блоков информации, из которых посредством метода визуализации, – а в нашем случае это метод самоподобия, – получается структура визуальной модели.

Структура визуальной модели, в частности, самоподобная структура, определяет простоту восприятия этой модели. Наглядность самоподобной визуальной модели обеспечивается механизмами визуализации, которые выполняют функцию связи самоподобной структуры с уже известными и менее абстрактными знаниями. Поскольку такие связи осуществляются, прежде всего, с помощью знаков равенства или неравенства, то они отражают не все стороны объекта визуализации, а только существенные в рамках поставленной цели.

Следовательно, придерживаясь трактовки понятия наглядности знания по В.Г. Болтянскому, механизмы визуализации обретают смысл изоморфизма между объектом визуализации и его визуальной моделью, обеспечивая в результате наглядность этой модели. Поэтому можно считать, что разработанный в данном исследовании подход к визуализации иррациональных чисел школьного курса алгебры с определенной долей условности является верным, поскольку находится в соответствии с базовыми научными положениями о сущности категорий визуализации и наглядности.

При этом процесс визуализации иррациональных чисел школьного куса алгебры может быть определен как упорядоченное взаимодействие следующих компонентов методической системы визуализации иррациональных чисел: целей, объектов, форм, методов и механизмов визуализации.

Визуализация иррационального числа как наглядная составляющая знания (в смысле второго определения визуализации) представляет собой самоподобную визуальную модель данного иррационального числа, которая является продуктом процесса визуализации, что условно можно записать через взаимодействие компонентов разработанной методической системы следующим образом: цели → объекты → формы → методы → механизмы → модель (М).

Глава II «***Методические аспекты изучения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с использованием самоподобных визуальных моделей***» посвящена разработке методического обеспечения, отражающего особенности введения иррациональных чисел, специфику изучения действий с иррациональными числами на уроках алгебры и основное содержание материала, связанного с изучением иррациональных чисел на факультативных занятиях по алгебре.

В диссертационном исследовании было разработано методическое обеспечение, позволяющее посредством самоподобных визуальных моделей доказывать существование иррациональных чисел, наглядно вскрывать причину непериодичности их десятичных записей и задействовать определение иррационального числа, что способствует пониманию учащимися сущности иррациональных чисел, скрытой от непосредственного восприятия, а потому и часто непонятной им. Предложенное методическое обеспечение может быть использовано для введения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы, а также в школах и классах с углубленным изучением математики.

Чтобы показать, что бесконечные десятичные непериодические дроби существуют, достаточно изменить запись какой-либо периодической дроби так, чтобы в ней не стало периода, и чтобы его отсутствие можно было бы легко заметить.

Возьмем, к примеру, дробь $\beta = 0,(123)$, ее период состоит из трех цифр. Используя дробь β, составим число β', руководствуясь следующим правилом: к первой по счету цифре 3 числа β прибавим число 1, ко второй цифре 3 – число 2, к третьей цифре 3 – число 3 и т.д. (заменяя тройку полученным числом):

$$\begin{array}{l} \beta = 0{,}123123123123123123\ldots \\ + \qquad\quad \uparrow \;\; \uparrow \;\; \uparrow \;\; \uparrow \;\; \uparrow \;\; \uparrow \\ \qquad\qquad\; 1 \;\;\; 2 \;\;\; 3 \;\;\; 4 \;\;\; 5 \;\;\; 6\ldots \\ \hline \beta' = 0{,}124125126127128129\ldots \end{array}$$

Дробь β' бесконечна, но не является периодической, т.к. в силу принципа своего построения не содержит какой-либо повторяющейся группы цифр. Это легко увидеть, поскольку число β' является самоподобной визуальной моделью, а для осознания этого достаточно воспользоваться одним из ее рациональных приближений, состоящим из весьма небольшого числа цифр.

Таким образом, используя только бесконечные периодические дроби и довольно простые преобразования их десятичной записи, можно показать, что существуют и такие числа, которые данными дробями записать нельзя, не опираясь при этом на какую-либо новую символику.

В диссертации показано, что самоподобие присуще десятичной записи любого иррационального числа.

Самоподобные визуальные модели бесконечных непериодических дробей в дидактических целях весьма полезны при составлении и решении задач на сравнение иррациональных чисел, иррациональных и рациональных чисел и доказательство иррациональности чисел, поскольку при работе с такими задачами, обеспечивающими усвоение определения иррационального числа, школьники могут определять неизвестные им цифры и видеть непериодичность числа по самоподобной структуре этих моделей. Приведем примеры.

1) На отрезке [2,373373337…; 2,373377333777…] найдите:

а) чисто периодическую дробь;

б) бесконечную непериодическую дробь.

2) Докажите, что следующие числа являются иррациональными:

а) 0,223222232222223…;

б) 3,691215182124273033… .

Разработанное методическое обеспечение включает также ряд задач на нахождение приближенных значений некоторых иррациональных чисел, которые представлены самоподобными визуальными моделями бесконечных непериодических дробей. Достоинствами предложенного способа вычисления приближенных значений иррациональных чисел является простота, наглядность и высокая точность результата.

Действительно, если иррациональное число может быть записано десятичной дробью вида $0,\underbrace{00...0}_{n}1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}3...$, тогда не сложно показать, что рациональное число вида $\dfrac{10^n}{\underbrace{99...9}_{n-1}8\underbrace{00...0}_{n-1}1}$ является его приближением с точностью до $\underbrace{99...9}_{n-1}8\times n-1$ знака после запятой включительно.

В диссертации показано, что символьные модели бесконечных непериодических дробей, которым свойственно самоподобие, являются эффективным средством обучения, которое позволяет оперировать школьнику иррациональными числами как конечными дробями в рамках четырех арифметических операций и видеть, как в результате образуются непериодические и периодические бесконечные десятичные дроби. Рассмотрим примеры.

Для визуализации случая, когда сумма двух иррациональных чисел является иррациональной, обратимся, например, к дробям 3,1000200030004... и 1,000100020003... (в их записях все натуральные числа разделяются тремя нулями):

$$\begin{array}{r}
3,10002000300040005...\\
+\\
1,00010002000300040...\\
\hline
4,10012002300340045...
\end{array}$$

Полученное число 4,10012002300340045... является иррациональным, что можно установить, учитывая принцип расположения цифр его десятичной записи. Причем, сам процесс сложения осуществляется так же, как и в случае конечных дробей, – поразрядно; он должен быть понятен учащимся, поскольку они уже знают, как складывать десятичные дроби.

В приведенном примере сумма цифр иррациональных чисел в каждом случае не превышает 9, поэтому принцип самоподобия суммы остается таким же, что и принцип самоподобия обоих ее слагаемых, – натуральные числа десятичной записи следуют по возрастанию и разделяются одним и тем же числом нулей. Теперь рассмотрим более сложный пример.

$$\begin{array}{r} 0{,}1313331333331333333331\ldots \\ +\\ 2{,}9595559555559555555559\ldots \\ \hline 3{,}0908890888889088888890\ldots \end{array}$$

(В данном случае дробная часть иррациональной суммы двух иррациональных чисел, в отличие от ее слагаемых, состоит не из 2-х, а из 3-х различных цифр, поэтому и принцип самоподобия ее записи будет несколько другим).

Для того чтобы показать, что сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом, возьмём, к примеру, числа $0{,}3535535553\ldots$ и $0{,}5353353335\ldots$ и найдём их сумму по правилу сложения десятичных дробей:

$$\begin{array}{r} 0{,}353553555355553\ldots \\ +\\ 0{,}535335333533335\ldots \\ \hline 0{,}888888888888888\ldots \end{array}$$

Сумма оказалась рациональным числом, и это не логический вывод, а наглядная иллюстрация этого факта, вскрывающая причину рациональности суммы иррациональных чисел рассматриваемого вида. Попутно вскрывается и тот факт, что множество иррациональных чисел не является замкнутым относительно операции сложения, т.е. сумма иррациональных чисел может являться как иррациональным числом, так и рациональным. Приведем еще один пример, когда сумма двух положительных иррациональных чисел может быть натуральным числом:

$$\begin{array}{r} 3{,}868866888666\ldots \\ +\\ 1{,}131133111333\ldots \\ \hline 4{,}999999999999\ldots \end{array}$$

Таким образом, множество иррациональных чисел не является замкнутым относительно сложения, что, впрочем, можно показать и относительно трех других арифметических операций.

Другие важные случаи действий с иррациональными числами заключаются в рассмотрении операций, в которых участвуют и иррациональные, и рациональные числа; результат этих операций, как уже было отмечено, всегда иррационален (за исключением случаев умножения иррационального числа на нуль и деления нуля на иррациональное число). Проиллюстрируем на примерах:

1) $0{,}2332333323333332...\times 12 = 2{,}7987999879999987...$;

2) $3{,}69336699333666999...:0,(3) = 10{,}23112233111222333...$.

Кроме этого, во второй главе диссертации описана методика изучения алгебраических иррациональных чисел на факультативных занятиях по алгебре в средней школе с использованием самоподобных визуальных моделей, состоящих из радикалов и позволяющих расширить образную основу работы школьников с иррациональными числами. При этом иррациональное число образуется либо из вложенных друг в друга радикалов, либо из радикалов, под знаком которых самоподобной является запись некоторого числа.

Такие самоподобные визуальные модели, используемые при изучении иррациональных чисел, могут существенно расширить спектр традиционных заданий, с которыми школьники имеют дело на уроках алгебры, новыми формулировками задач и способами их решениями, являющимися по своей сути, прежде всего, визуальными, что позволяет обеспечить большую наглядность учебного материала.

Например. Докажите, что все члены последовательности $\{a_n\}$: $\sqrt{11}$, $\sqrt{111}$, $\sqrt{1111}$, … являются иррациональными числами.

Разработанное методическое обеспечение включает задания с самоподобными визуальными моделями иррациональных чисел, составленных из радикалов, работая с которыми учащиеся имеют возможность получить новые знания об иррациональных числах, которые труднодоступны для восприятия и понимания без использования визуальных средств обучения и метода самоподобия при их создании.

Например, квадратный и кубический корни из рационального числа, как известно, в общем случае нельзя выразить друг через друга с помощью рациональных коэффициентов. Но между ними можно обнаружить далеко не очевидную связь, если использовать самоподобие, заключающееся во вложенных друг в друга радикалах:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots \to 2;\ \sqrt{2},\ \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}},\ \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{2}}}},\ \ldots \to \sqrt[3]{2}.$$

Заметим также, что во вложенных радикалах, кроме рассмотренных, могут участвовать также операции сложения и вычитания, образуя не менее интересные и полезные в обучении самоподобные визуальные модели.

Пример. Докажите, что

а) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots \to 2$;

б) $\sqrt{2},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}},\ \ldots \to 1$.

Во второй главе данного исследования были также представлены визуальные задачи с самоподобными моделями, основанные не только на оперировании радикалами, но и иррациональными значениями некоторых логарифмов, что может способствовать расширению представлений учащихся об иррациональных числах и, в частности, о способах их происхождения.

Примеры.

1) Упростите выражение

$$\log_3\left(\frac{1}{2}\right)+\log_3\left(\frac{1}{4}\right)+\log_3\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots+\log_3\left(\frac{1}{2^{999}}\right).$$

2) Найдите предел последовательности

$$\log_2 2,\ \log_2(2+\log_2 2),\ \log_2(2+\log_2(2+\log_2 2)),\ \ldots$$

Представленное в диссертации методическое обеспечение может быть использовано, прежде всего, в классах с углубленным изучением математики; в классах, обучающихся по обычной программе, оно может быть задействовано на факультативных занятиях или же на уроках алгебры, но не в полном объеме.

В заключительном параграфе второй главы описана организация педагогического эксперимента, приведены полученные результаты и осуществлена их обработка. Проведенный педагогический эксперимент состоял из трех этапов – констатирующего, поискового и обучающего. Экспериментом были охвачены свыше 80 учащихся 9-х классов с углубленным изучением математики и 10-х классов, обучающихся по обычной программе, а также учителя математики МБОУ: «Лицей», «Гимназия», СОШ № 2 г. Арзамаса.

Экспериментальная проверка разработанного в данном исследовании методического обеспечения производилась с использованием критериев: а) уровень усвоения учащимися темы «Иррациональные числа», б) интерес учащихся к иррациональным числам, в) уровень математической подготовки школьников.

Сравнение по первому критерию осуществлялось на основе срезовой работы.

Количественная оценка уровня усвоения учащимися 9-х классов с углубленным изучением математики темы «Иррациональные числа» приведена в таблице 1.

Таблица 1

Классы	Количество учащихся	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Контрольные	25	1 (4%)	19 (76%)	5 (20%)
Экспериментальные	25	0 (0%)	13 (52%)	12 (48%)

Табличные данные наглядно представлены на диаграмме (рис. 2).

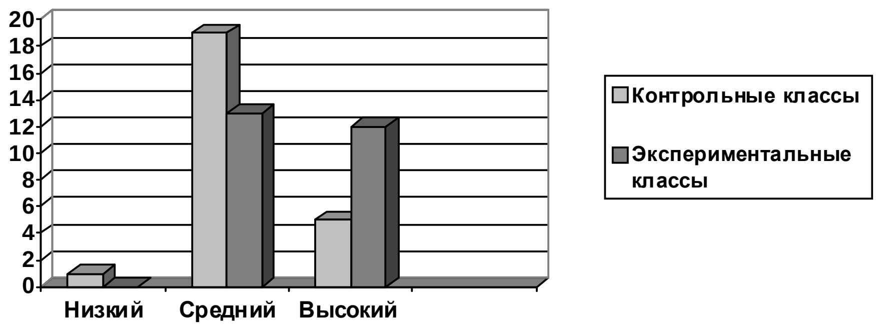

Рис. 2. Распределение учащихся контрольных и экспериментальных 9-х классов с углубленным изучением математики по уровням усвоения темы «Иррациональные числа».

Для определения статистической значимости экспериментально установленных различий в уровне усвоения учащимися темы «Иррациональные числа» использовался критерий Пирсона χ^2.

В результате значение $\chi^2_{ЭМП}$ оказалось равным числу 13,754 при соответствующих критических значениях $\chi^2_{0,05} = 9{,}488$ и $\chi^2_{0,01} = 13{,}277$. Это означает, что $\chi^2_{ЭМП}$ находится в зоне значимости, причем, $\chi^2_{0,01} / \chi^2_{ЭМП} = 0{,}97$.

Следовательно, с достоверностью 97% существуют различия между уровнями усвоения учащимися темы «Иррациональные числа» в контрольных и экспериментальных 9-х классах с углубленным изучением математики.

Сравнение по второму критерию производилось посредством измерения интереса школьников к иррациональным числам (использовалась методика, предложенная И.М. Смирновой). Полученные результаты, свидетельствующие о положительной динамике, приведены на диаграмме (рис.3).

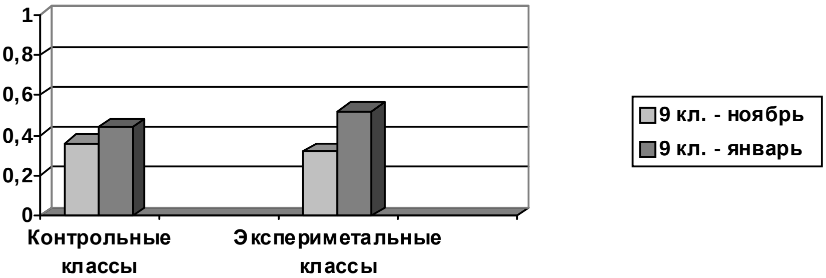

Рис. 3. Динамика интереса к иррациональным числам у учащихся 9-х классов с углубленным изучением математики

Сравнение по третьему критерию производилось на основе комплексной контрольной работы. Полученные данные отражены на диаграмме (рис. 4).

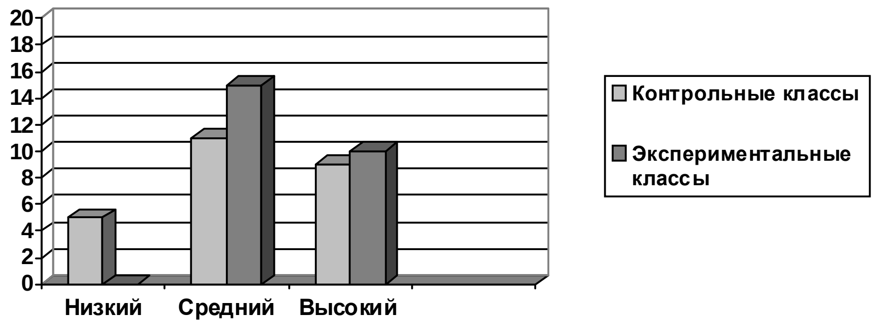

Рис. 4. Распределение учащихся контрольных и экспериментальных 9-х классов с углубленным изучением математики по уровням математической подготовки

Установленные различия проверялись на статистическую значимость (использовался критерий t-Стьюдента). При этом было установлено, что значение $t_{ЭМП} = 2{,}747$ (соответствующие критические значения $t_{0,05} = 2{,}011$ и $t_{0,01} = 2{,}682$). Поэтому полученное значение $t_{ЭМП}$ находится в зоне значимости и $t_{0,01} / t_{ЭМП} = 0{,}98$.

Следовательно, с достоверностью 98% существуют различия в уровнях математической подготовки учащихся контрольных и экспериментальных классов 9-х классов с углубленным изучением математики.

Гипотеза исследования получила экспериментальное подтверждение.

В ходе диссертационного исследования, в соответствие с его целью и задачами, получены следующие основные **результаты и выводы**.

1. Установлена главная причина формального усвоения школьниками учебного материала, связанного с иррациональными числами в курсе алгебры средней школы: определения иррационального числа, сущности четырёх основных арифметических операций с иррациональными числами, классов иррациональных чисел и др., – она состоит в недостаточности образной составляющей изучаемого содержания, отсутствии зрительных опор на начальных этапах его усвоения.

2. Определено, что самоподобные математические модели, внутренне присущие иррациональным числам, позволяют визуализировать их скрытые содержательные особенности и являются эффективным и доступным для учащихся средней школы средством преодоления формализма в усвоении учебного материала.

3. Создана модель методической системы визуализации иррациональных чисел школьного курса алгебры, включающая цели, объекты, методы, механизмы и средства наглядного представления; ее продуктом являются самоподобные визуальные модели бесконечных десятичных непериодических дробей, а также алгебраических и трансцендентных иррациональных чисел, записываемых с помощью специальной символики.

4. В качестве основных самоподобных математических объектов, способствующих визуализации иррациональных чисел школьного курса алгебры, определены: десятичные дроби, вложенные радикалы и логарифмы.

5. Разработано методическое обеспечение визуализации иррациональных чисел школьного курса алгебры с использованием самоподобных моделей, включающее примеры записей бесконечных непериодических дробей, вскрывающих иную, ранее неизвестную школьникам, природу иррациональных чисел – наличие самоподобных структур в их десятичных представлениях; иллюстрации, направленные на упрощение восприятия иррациональных чисел; упражнения, обеспечивающие усвоение определения и действий с иррациональными числами; задачи, развивающие представления школьников о классах иррациональных чисел, их специфике и способах решения иррациональных уравнений и неравенств; а также задания, позволяющие школьникам увидеть скрытые закономерности и отношения, характерные иррациональным числам, на уроках и факультативных занятиях по алгебре.

6. Осуществлена экспериментальная проверка разработанного методического обеспечения. Гипотеза диссертационного исследования получила подтверждение.

Основное содержание и результаты диссертационного исследования были отражены в следующих **публикациях**.

I. Публикации в научных журналах, рекомендованных ВАК

1. Емелин, А.В. Об одном приеме символьной визуализации иррациональных чисел в школьном курсе алгебры [Текст] / А.В. Емелин // Мир науки, культуры, образования, № 4(29). Часть 1. – Горно-Алтайск, 2011. – С. 87–89.

2. Емелин, А.В. Модель методической системы визуализации иррациональностей в школьном курсе алгебры [Текст] / А.В. Емелин, М.И. Зайкин // Мир науки, культуры, образования, № 5(30). – Горно-Алтайск, 2011. – С. 25–27 (авт. 50%).

3. Емелин, А.В. Об обучении школьников решению задач на доказательство иррациональности чисел [Электронный ресурс] / А.В. Емелин // Современные проблемы науки и образования, №6 (приложение «Педагогические науки»). – Москва, 2012. – Режим доступа: http://online.rae.ru/pdf/1025 (дата обращения: 18.04.2012).

II. Публикации в других изданиях

4. Емелин, А.В. Об оценке значений иррациональных выражений вида $\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x-...-\sqrt[n]{x}}}$ [Текст] / А.В. Емелин // Современные образовательные технологии в системе математического образования. Часть II: материалы Международной научно-практической конференции (Коряжма, 16–18 октября 2008 г.) / сост. С.В. Мясникова; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: Изд-во Поморского университета, 2008. – С. 410 – 416.

5. Емелин, А.В. Об эвристической ценности визуализации значений иррациональных выражений компьютерными средствами [Текст] / А.В. Емелин, М.И. Зайкин // Современные проблемы информатизации, науки и техники. Сборник VI Межрегиональной научно-практической конференции. Арзамас, январь 2009 г. – М.: Изд-во СГУ, 2009. – С. 214 – 219 (авторский вклад 50%).

6. Емелин, А.В. О визуализации иррациональностей в математической подготовке студентов педвузов [Текст] / А.В. Емелин // Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фундаментализации образования: материалы Всерос. науч. конф. г. Саранск , 7–9 октября 2009 г. Часть II / под ред. Г.И. Саранцева; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – С. 161–163.

7. Емелин, А.В. О самоподобии в иррациональных выражениях и его дидактической ценности [Текст] / А.В. Емелин // Международный научный альманах. Выпуск 4. Сборник статей преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов / Под ред. В.И. Журко, А.А. Калюжного. – Галле; М.; Минск; Бишкек, Актобе, 2009. – С. 296 – 303.

8. Емелин, А.В. Визуализация некоторых иррациональных уравнений с помощью Mathcad и Maple [Текст] / А.В. Емелин // Инновационные технологии в образовании и профессиональной деятельности. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции. Арзамас, 29 января 2010 г. – М.: Изд-во СГУ, 2010. – С. 147–155.

9. Емелин, А.В. О расширении представлений школьников об иррациональных числах [Текст] / А.В. Емелин // Международный научный альманах. Выпуск 7. Сборник статей преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов / Под ред. В.И. Журко, А.А. Калюжного. – Галле; М.; Минск; Бишкек; Актобе, 2010. – С. 346–352.

10. Емелин, А.В. Учителю математики о различных подходах к трак-

товке иррационального числа [Текст] / А.В. Емелин // Современный учитель сельской школы России: Сборник статей участников Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / Науч. ред. М.И. Зайкин: АГПИ им. А.П. Гайдара. – Арзамас: АГПИ, 2010. – С. 393–397.

11. Емелин, А.В. О применении самоподобия при визуализации иррациональных выражений с использованием программы Mathcad [Текст] / А.В. Емелин // Инновационные технологии организации обучения на пути к новому качеству образования: Сборник материалов VIII Всероссийской научно-практической конференции. Арзамас, 2011 г. – М.: Изд-во СГУ, 2011. – С. 338–343.

12. Емелин, А.В. Об одном наглядном способе вычисления приближенных значений некоторых иррациональных чисел [Текст] / А.В. Емелин // Математическое образование лицеистов: сборник научно-методических работ. Вып. 2. Индивидуальные творческие работы по математике / Науч. ред. М.И. Зайкин, АГПИ, МБОУ «Лицей». – Арзамас: АГПИ, 2012. – С. 90–95.

Емелин Александр Викторович

ИЗУЧЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ САМОПОДОБНЫХ ВИЗУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Подписано в печать 19.04.2012 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. листов 1,3. Тираж 130 экз. Заказ №18/12

Участок оперативной печати АГПИ
607220, г. Арзамас Нижегородской обл., ул. К.Маркса, 36