

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный проект "Образование"
Инновационная образовательная программа ННГУ.
Образовательно-научный центр
"Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы
и математическое обеспечение"

С.А. Лапинова, А.И. Саичев

Некоторые математические методы анализа информационных сигналов

*Учебно-методические материалы по программе повышения
квалификации "Применение современных информационно-
телекоммуникационных систем и технологий для обработки
сигналов различной природы"*

Нижегород
2006

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение"

Лапинова С.А., Саичев А.И. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации "Применение современных информационно-телекоммуникационных систем и технологий для обработки сигналов различной природы". Нижний Новгород, 2006, 89 с.

Аннотация

Рассмотрены математические методы анализа спектральных характеристик сигналов, имеющие важное значение при решении проблем приема и обработки сигналов в информационных и телекоммуникационных системах. Подробно обсуждены свойства классических и обобщенных Фурье-образов информационных сигналов, асимптотическая связь между характерными локальными особенностями поведения сигналов и поведением их Фурье-образов. Описаны методы подавления боковых лепестков диаграмм направленности принимающих и передающих сигналы антенн. Изложены методы обобщенного суммирования рядов и интегралов, позволяющие, в частности, бороться с родственными эффекту Гиббса нежелательными явлениями, возникающими при обработке сигналов в реальных условиях. Значительное внимание уделено понятию аналитического сигнала и возможностям его использования для обработки и анализа информации.

Предисловие

Возрастание сложности информационных систем, а также методов передачи, приема и обработки телекоммуникационной информации, требует от инженеров и разработчиков современных телекоммуникационных комплексов углубленного знания математических методов анализа сигналов. Ключевое положение в ряду подобных методов занимает спектральный анализ, опирающийся на теорию преобразования Фурье и родственные методы исследования сигналов самой различной физической природы. Поэтому в данном учебно-методическом материале последовательно освещаются как основные свойства интегралов Фурье, так и более современные разделы теории преобразования Фурье, овладение которыми необходимо для решения актуальных проблем анализа и обработки сигналов. Сюда относятся прежде всего обобщенные преобразования Фурье, а также детальный анализ связи между локальными характерными особенностями поведения сигналов, такими как разрывы и разного рода сингулярности их реализаций, с асимптотическим поведением соответствующих Фурье-образов. На примере задачи подавления боковых лепестков приемно-передающих антенн, иллюстрируются потенциальные возможности обработки сигналов, использующей глубинные взаимосвязи между сигналами и их Фурье-образами. Здесь же подробно обсуждается метод стационарной фазы и близкие методы асимптотического анализа, владение которыми необходимо для качественного понимания и количественного расчета параметров сигналов, распространяющихся на дальние расстояния.

С математической точки зрения, многие проблемы обработки информации сводятся к необходимости суммирования расходящихся и медленно сходящихся рядов и интегралов. В связи с этим в данном учебно-методическом материале подробно обсуждены различные способы обобщенного суммирования интегралов и рядов, и проведено детальное сравнение эффективности разных методов суммирования. Выведена и детально проанализирована формула суммирования Пуассона, позволяющая эффективно решать многие проблемы анализа и обработки информации – от ускорения сходимости рядов, до установления связей между

непрерывным и дискретным преобразованиями Фурье, а также вывода полезных соотношений, обобщающих, хорошо известную в теории информации, теорему Котельникова – Шеннона.

В заключительной главе обсуждено, важное для теории информации и обработки сигналов, понятие аналитического сигнала. Кратко изложена, лежащая в основе аналитических сигналов, теория преобразования Гильберта. На конкретных примерах детально исследованы свойства типичных для приложений аналитических сигналов, и возможности их использования в теории связи и обработки информации.

Несколько слов о структуре пособия. Пособие состоит из 4-х глав, причем каждая глава разбита на разделы. Соответственно, нумерация рисунков в пособии двойная, где первая цифра указывает номер главы, а вторая – номер рисунка в данной главе. Формулы имеют тройную нумерацию. Первая цифра указывает номер главы, вторая – номер раздела в главе, а третья – номер формулы в разделе. Если ссылка на формулу дается в том же разделе, где находится формула – при нумерации опускаются первые две цифры.

Глава 1

Преобразования Фурье

1.1. Определение и основные свойства

В этом разделе мы дадим определение преобразования Фурье и исследуем свойства Фурье-образов функций $f(t)$ аргумента t , который будем интерпретировать как время. Фурье-преобразование (или *Фурье-образ*) $\tilde{f}(\omega)$ исходной функции $f(t)$ ¹ определяют равенством

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (1)$$

как только интеграл справа существует. Если, к примеру, функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей оси t , то Фурье-образ (1) определен для любых значений ω .

Иногда говорят, что равенство (1) *отображает* функцию f временного аргумента t в функцию \tilde{f} переменной ω , которую будем называть *угловой частотой* или просто *частотой*.

Опираясь на определение (1), легко доказать, что если функция-оригинал $f(t)$ имеет Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$, то есть, если на языке отображений $f(t) \mapsto \tilde{f}(\omega)$, тогда справедливы следующие отображения

$$f(t + \tau) \mapsto \tilde{f}(\omega)e^{i\omega\tau}, \quad (2a)$$

$$f(t)e^{i\Omega t} \mapsto \tilde{f}(\omega - \Omega), \quad (2b)$$

$$f(-t) \mapsto \tilde{f}(-\omega), \quad (2c)$$

$$f^*(t) \mapsto \tilde{f}^*(-\omega). \quad (2d)$$

Из последних двух соотношений вытекает, что если $f(t)$ – действительная функция, то ее Фурье-образ обладает свойством симметрии

$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega). \quad (3)$$

¹Будем называть далее функцию $f(t)$, к которой применяем преобразование Фурье, *функцией-оригиналом*.

По этой причине инженеры, имеющие дело с реальными функциями и процессами, предпочитают оперировать лишь неотрицательными частотами ($\omega \geq 0$).

Многочисленные приложения преобразования Фурье обусловлены его тесной связью с понятием *однородности времени*. В самом деле, ядро преобразования Фурье $g(t) = e^{-i\omega t}$ удовлетворяет уравнению

$$g(t + \tau) = g(t)g(\tau) , \quad (4)$$

отражающему инвариантность ядра $g(t)$ по отношению к сдвигам во времени: Если его аргумент t сдвинуть на заданный промежуток времени τ , то ядро g изменится лишь на постоянный множитель $g(\tau) = e^{-i\omega\tau}$. Более того, если $\tau = kT$, где $T = 2\pi/\omega$, а k – любое целое число, то $e^{-i\omega\tau} = 1$, а $g(t + \tau) = g(t)$ – ядро остается неизменным. Иначе говоря, $g(t) = e^{-i\omega t}$ – однородная в указанном выше смысле, периодическая с периодом T функция. Сам период T может быть интерпретирован как деление шкалы линейки, приложенной к оси времени.

Пример 1. Важным ингредиентом теории преобразования Фурье служат комплексные числа и функции. В первую очередь это комплексное ядро $e^{i\omega t}$ преобразования Фурье, и, конечно, сами Фурье-образы $\hat{f}(\omega)$, являющиеся, в общем случае, комплексными функциями, даже если функция-оригинал $f(t)$ действительна. Поэтому проверим читателя на понимание природы комплексных чисел. Напомним, что в инженерных приложениях определяют преобразование Фурье как интеграл

$$\hat{f}(\nu) = \int f(t)e^{2\pi i\nu t} dt . \quad (5)$$

Здесь $\nu = \omega/2\pi$ – частота, измеряемая в *Герцах*², более удобная в инженерных приложениях, чем введенная выше круговая частота ω .

Некий студент, собравшийся вычислить интеграл (5) для конкретной функции $f(t)$, мог бы рассуждать следующим образом: Из правил возведения в степень вытекает, что

$$e^{i2\pi\nu t} = (e^{i2\pi})^{\nu t} . \quad (6)$$

С другой стороны, зная известную формулу Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta , \quad (7)$$

²Если частота колебаний маятника равна ν Герц, это означает, что маятник совершает ν колебаний в секунду.

легко убедиться в справедливости тождества

$$e^{2\pi i} \equiv 1 .$$

С его помощью заменим равенство (6) на

$$e^{i2\pi vt} \equiv 1^{\nu t} \equiv 1 . \quad (6)$$

Другими словами, можно заменить сложный интеграл (5) эквивалентным ему более простым интегралом

$$\int f(t) dt .$$

Где ошибка в рассуждениях? ■

1.2. Обратные преобразования Фурье

В этом разделе мы найдем формулу обратного преобразования Фурье, позволяющую, по известному Фурье-образу $\tilde{f}(\omega)$, восстановить функцию-оригинал $f(t)$. Но вначале установим замечательную связь между гладкостью функций-оригиналов и скоростью спада к нулю, при $\omega \rightarrow \pm\infty$, их Фурье-образов $\tilde{f}(\omega)$.

Пусть $f(t)$ – n раз непрерывно дифференцируемая функция, абсолютно интегрируемая на всей оси t вместе со своими n производными. Домножим обе части равенства (1.1.1) на $(-i\omega)^n$ и заметим, что $(-i\omega)^n e^{-i\omega t}$ есть не что иное, как n -я производная функции $e^{-i\omega t}$ по аргументу t . Следовательно, после n -кратного интегрирования по частям, придем к равенству

$$(i\omega)^n \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f^{(n)}(t) e^{-i\omega t} dt , \quad (1)$$

выражающему одно из наиболее полезных для приложений свойств преобразования Фурье: *Дифференцирование функции-оригинала $f(t)$ приводит к умножению ее Фурье-образа на $i\omega$* . На языке отображений (1.1.2) это свойство имеет вид:

$$\dot{f}(t) \mapsto i\omega \tilde{f}(\omega) . \quad (2)$$

Заметим еще, что если $g(t)$ – производная некоторой абсолютно интегрируемой функции $f(t)$ ($g(t) = f'(t)$), то справедливо обратное к (2) равенство

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(t') dt' \mapsto \frac{\tilde{g}(\omega)}{i\omega} . \quad (3)$$

Вернемся к обсуждению соотношения (1). Абсолютная интегрируемость подынтегральной функции означает, что левая часть равенства (1) ограничена. Другими словами, модуль Фурье-образа $|\tilde{f}(\omega)|$ спадает к нулю, при $\omega \rightarrow \pm\infty$, не медленнее, чем $|\omega|^{-n}$. Ввиду большой важности установленной связи между гладкостью функции-оригинала и быстротой спада ее Фурье-образа, сформулируем ее еще раз:

Достаточно гладкие функции, обладающие абсолютно интегрируемой n -й производной, имеют Фурье-образы, спадающие к нулю не медленнее, чем $|\omega|^{-n}$.

Ниже мы обнаружим симметрию между прямым и обратным преобразованиями Фурье. Здесь же, забегаая вперед и опираясь на указанную симметрию, сформулируем обратное утверждение:

Если Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$ – гладкая функция, n производных которой абсолютно интегрируемы, то функция-оригинал $f(t)$ спадает к нулю, при $|t| \rightarrow \pm\infty$, не медленнее, чем степенная функция $|t|^{-n}$.

Приступим к выводу формулы *обратного преобразования Фурье*, позволяющей восстановить функцию-оригинал по ее Фурье-образу. Пусть для упрощения вывода, $f(t)$ – абсолютно интегрируемая гладкая функция, такая, что ее Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$ также абсолютно интегрируем. Умножив (1.1.1) на $\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}$, где $\tilde{\phi}(\omega)$ – некоторая абсолютно интегрируемая функция, и интегрируя обе части равенства по всей оси ω , получим

$$\int \tilde{\phi}(\omega)\tilde{f}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \left[\int \tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega(\tau-t)}d\omega \right] dt . \quad (4)$$

Мы сменили в правой части равенства порядок интегрирования, что допустимо ввиду абсолютной интегрируемости подынтегрального выражения как по t , так и по ω .

Возьмем в качестве $\tilde{\phi}(\omega)$ гауссову функцию

$$\tilde{\phi}(\omega) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}\right) ,$$

и вычислим внутренний интеграл в правой части (4) с помощью известной табличной формулы

$$\int e^{-bx^2+iyx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{y^2}{4b}\right) , \quad (5)$$

справедливой при любых $\text{Re } b \geq 0, b \neq 0$. В итоге равенство (4) преобразуется к виду:

$$\int \tilde{f}(\omega) \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2} + i\omega\tau\right) d\omega = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2\varepsilon^2}\right) dt .$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ гауссова функция в правой части равенства слабо сходится к дельта-функции $\delta(t-\tau)$, которая, в свою очередь, “выкалывает” значение функции-оригинала $f(\tau)$. В левой же части равенства, ввиду абсолютной интегрируемости функции $\tilde{f}(\omega)$, можно положить $\varepsilon = 0$. Заменяв затем τ на t , придем к искомой формуле обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \int \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6)$$

выражающей функцию-оригинал $f(t)$ через ее Фурье-образ.

Пример 1. Приведем аргументы в пользу нашего определения прямого преобразования Фурье (1.1.1). Оно может показаться слишком громоздким из-за “лишнего”, множителя $1/2\pi$ и знака минус в экспоненте ядра. Поэтому иногда предпочитают определять преобразование Фурье более компактной формулой

$$\tilde{f}(\omega) = \int f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (7)$$

Однако и она имеет свои недостатки. Действительно, в этом случае обратное преобразование Фурье будет таким же громоздким, как и прямое преобразование (1.1.1). По этой причине математики предпочитают определять преобразование Фурье равенством

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (8)$$

аргументируя выбор почти идеальной симметрией между (8) и соответствующим обратным преобразованием Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} dt. \quad (9)$$

Инженеры вообще не сталкиваются с такого рода проблемами, поскольку обратное к “инженерному” преобразованию Фурье (1.1.5) преобразование имеет почти такой же вид:

$$f(t) = \int \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu. \quad (10)$$

В отличие от инженеров мы в этой книге предпочитаем пользоваться угловой частотой ω^3 – как наиболее удобной в аналитических выкладках. Кроме того, наш выбор формулы (1.1.1) для преобразования Фурье

³Назовем ее просто частотой, будучи уверенными, что в дальнейшем не возникнет путаница между частотами ω и ν .

мотивируется физической наглядностью обратного преобразования (6). В самом деле, согласно (6), Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$ равен комплексной амплитуде гармонических компонент $e^{i\omega t}$, по которым разлагается исходная функция $f(t)$.

Заметим все же, что в разных ситуациях имеются весомые аргументы и в пользу определений (7) и (8). Поэтому в учебниках можно встретить все перечисленные здесь определения преобразования Фурье. В любом случае, выбрав одно из них, надо в дальнейшем неукоснительно его придерживаться, поскольку многие соотношения теории преобразования Фурье имеют разный вид при разном выборе формы преобразования. ■

Вернемся к обсуждению свойств интегрального соотношения (4). Согласно (6), интеграл в квадратных скобках в (4) может быть заменен на $\phi(\tau - t)$, что дает

$$\int \tilde{f}(\omega)\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int f(t)\phi(\tau - t)dt . \quad (11)$$

Интеграл в правой части равен свертке функций $f(t)$ и $\phi(t)$. Сравнив (11) и (6), заключаем, что Фурье-образ свертки $f(t) * \phi(t)$ равен, с точностью до множителя 2π , произведению Фурье-образов свертываемых функций:

$$f(t) * \phi(t) \quad \mapsto \quad 2\pi\tilde{f}(\omega)\tilde{\phi}(\omega) . \quad (12)$$

Домножив (6) на $\phi(t)e^{-i\Omega t}$, интегрируя полученное равенство по t и вспомнив определение преобразования Фурье (1.1.1), придем к формуле

$$\int f(t)\phi(t)e^{-i\Omega t}dt = 2\pi \int \tilde{f}(\omega)\tilde{\phi}(\Omega - \omega)d\omega ,$$

симметричной по отношению к формуле (12). Последняя формула означает, в частности, что Фурье-образ произведения двух функций равен свертке их Фурье-образов:

$$f(t)\phi(t) \quad \mapsto \quad \tilde{f}(\omega) * \tilde{\phi}(\omega) . \quad (13)$$

Назовем соотношение (11) *равенством Парсеваля*.

1.3. Обобщенное преобразование Фурье

Расширим операцию преобразования Фурье далеко за пределы обычных интегралов Фурье (1.1.1) и (1.2.6), определив обобщенные преобразования Фурье, подобно тому, как мы определяли в главе 1 обобщенные функции. Напомним, обобщенными функциями называют линейные непрерывные функционалы на множестве \mathcal{D} пробных функций ϕ .

Равенство (1.2.11) предоставляет аналогичную возможность определения обобщенного преобразования Фурье. Покажем это, полагая, что \tilde{F} – некоторая обобщенная функция, определенная на множестве \mathcal{S}^4 пробных функций $\tilde{\phi}(\omega)$, таких, что каждой из них соответствует абсолютно интегрируемая функция-оригинал $\phi(t)$.

Назовем \tilde{F} *обобщенным Фурье-образом* функции $f(t)$, если интеграл в правой части равенства (1.2.11) равен линейному непрерывному функционалу $\tilde{F}[\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega t}]$. А именно,

$$\tilde{F}[\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}] = \frac{1}{2\pi} \int f(t)\phi(\tau - t)dt . \quad (1)$$

Пусть к примеру $f(t) \equiv 1$. Тогда правая часть равенства (1) равна

$$\frac{1}{2\pi} \int \phi(\tau - t)dt = \frac{1}{2\pi} \int \phi(t)dt = \tilde{\phi}(\omega = 0) .$$

Мы приходим к тому же результату в левой части равенства (1), полагая, что искомое обобщенное преобразование Фурье равно дельта-функции $\delta(\omega)$. Таким образом мы нашли первую табличную формулу теории обобщенных преобразований Фурье

$$1 \mapsto \delta(\omega) . \quad (2)$$

Соотношение (1) асимметрично в том смысле, что в то время, как его левая часть содержит обобщенную функцию \tilde{F} , справа фигурирует обычный интеграл. Устраним неравноправие левой и правой частей равенства (1), заменив интеграл справа действием некоторой обобщенной функции T на пробную функцию $\phi(\tau - t)$:

$$\tilde{F}[\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}] = \frac{1}{2\pi} T[\phi(\tau - t)] . \quad (3)$$

В итоге мы пришли к равенству, определяющему обобщенный Фурье-образ \tilde{F} некоторой обобщенной функции T и наоборот. Взяв к примеру за T дельта-функцию $\delta(t)$, получим

$$\tilde{F}[\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}] = \frac{1}{2\pi} \phi(\tau) .$$

Как видно из (1.2.6), последнее равенство означает, что

$$\tilde{F}[\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau}] = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega .$$

⁴Это множество будет строго определено позже.

Иначе говоря, мы нашли еще одну, обратную к (2), табличную формулу теории обобщенных преобразований Фурье

$$\delta(t) \mapsto \frac{1}{2\pi} . \quad (4)$$

Иногда этот факт записывают в виде:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega . \quad (5)$$

Заметим однако, что мы еще не определили окончательно операцию обобщенного преобразования Фурье. Дело в том, что пока не указано множество \mathcal{S} пробных функций, для которых обе части равенства (3) являются линейными непрерывными функционалами (обобщенными функциями). Если, к примеру, предположить, что $\phi(t) \in \mathcal{D}$, где \mathcal{D} – множество бесконечно-дифференцируемых финитных функций, тогда $\tilde{\phi}(\omega) \notin \mathcal{D}$. В самом деле, хорошо известно, что Фурье-образы финитных функций не являются финитными, то есть не равны нулю вне любого ограниченного множества оси ω . Поэтому, если определить обобщенную функцию в правой части равенства (3), как это делалось в главе 1, тогда левая часть равенства (3) не будет обобщенной функцией в том же смысле.

Решение возникшей проблемы состоит в расширении пространства пробных функций $\phi(t)$, обеспечивающего симметрию равенства (3). Оказывается, требуемым свойством обладает множество \mathcal{S} бесконечно дифференцируемых функций $\phi(t)$, спадающих при $t \rightarrow \pm\infty$, вместе со всеми производными, быстрее любой степенной функции $|t|^{-n}$. Такие функции называют *быстро спадающими*. Другими словами, $\phi(t) \in \mathcal{S}$, если для любых целых чисел $n, m \geq 0$ найдутся такие $K_{nm} < \infty$, что при любом t справедливы неравенства

$$|t^n \phi^{(m)}(t)| < K_{nm} . \quad (6)$$

Легко сообразить, что если функция $\phi(t) \in \mathcal{S}$, тогда ее Фурье-образ также принадлежит \mathcal{S} . В самом деле, согласно (1.2.1), бесконечная дифференцируемость функции $\phi(t)$ означает, что ее Фурье-образ спадает к нулю быстрее любой степенной функции $|\omega|^{-n}$. Аналогично, в силу симметрии прямого и обратного преобразований Фурье, из того факта, что функция $\phi(t)$ убывает быстрее любой степенной функции, следует, что ее Фурье-образ $\tilde{\phi}(\omega)$ бесконечно дифференцируем.

Отметим, что расширение множества пробных функций от \mathcal{D} к \mathcal{S} сужает сопряженное ему множество \mathcal{S}' обобщенных функций, по срав-

нению с известным множеством \mathcal{D}' , сопряженным множеству \mathcal{D} . Множество \mathcal{S}' называют пространством обобщенных функций *медленного роста*.

Тем не менее выбор нового пространства обобщенных функций не сильно влияет на возможности решения конкретных задач. В самом деле, все обобщенные функции с ограниченным носителем, включая дельта-функцию и ее производные, принадлежат к множеству \mathcal{S}' . Кроме того, любые функции $f(t)$, растущие медленнее некоторой степени t , определяют непрерывные линейные функционалы на множестве \mathcal{S} с помощью обычного интеграла

$$\int f(t)\phi(t)dt < \infty, \quad \phi(t) \in \mathcal{S},$$

и тем самым принадлежат к (регулярным) обобщенным функциям медленного роста.

Чтобы ощутить степень сужения множества обобщенных функций вследствие указанного расширения пространства пробных функций, заметим, что e^t – обобщенная функция в пространстве \mathcal{D}' , но не является таковой в пространстве \mathcal{S}' . По этой причине не существует обобщенного Фурье-образа экспоненты e^t , в то время как имеются обобщенные Фурье-образы любых степенных функций t^n .

Очевидно, все операции, применимые к обычным Фурье образам, остаются справедливыми и для их обобщенных собратьев. Так, согласно (1.1.2а), смещенная дельта-функция $\delta(t - \tau)$ имеет Фурье-образ $e^{-i\omega\tau}/2\pi$, а (1.2.1) означает, что Фурье-образ функции $\delta^{(n)}(t)$ равен $(i\omega)^n/2\pi$. Приведем еще две табличные формулы обобщенных преобразований Фурье, которые будут полезны в дальнейшем:

$$\begin{aligned} t^n e^{i\Omega t} &\mapsto i^n \delta^{(n)}(\omega - \Omega), \\ \delta^{(n)}(t - \tau) &\mapsto \frac{(i\omega)^n}{2\pi} e^{-i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{7}$$

Пример 1. Подобно введенным в главе 1 обобщенным функциям, обобщенные Фурье-образы могут быть определены как слабый предел последовательности обычных интегралов Фурье. Покажем к примеру, что функции

$$\tilde{f}(\omega, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega\lambda)}{\omega},$$

зависящие от параметра λ , слабо сходятся к $\delta(\omega)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Для этой цели обсудим функционал

$$F(\lambda) = \int \tilde{\phi}(\omega) \frac{\sin(\omega\lambda)}{\omega} d\omega,$$

который иногда называют *интегралом Дирихле*. Дифференцируя его по λ , будем иметь

$$F'(\lambda) = \int \tilde{\phi}(\omega) \cos(\omega\lambda) d\omega = \frac{1}{2} [\phi(+\lambda) + \phi(-\lambda)] .$$

Интегрируя обе части этого равенства в интервале $(0, \lambda)$ и заметив, что $F(0) = 0$, получим

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \phi(t) dt .$$

Если Фурье-образ $\tilde{\phi}(\omega)$ – достаточно гладкая функция, то функция-оригинал $\phi(t)$ – абсолютно интегрируема, и последний интеграл сходится, при $\lambda \rightarrow \infty$, к умноженному на π значению функции $\tilde{\phi}(\omega)$ при $\omega = 0$

$$F(\infty) = \frac{1}{2} \int \phi(t) dt = \pi \tilde{\phi}(0) .$$

Это служит доказательством того, что имеет место слабая сходимость

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega\lambda)}{\omega} \quad \mapsto \quad \delta(\omega) \operatorname{sign}(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \pm\infty) ,$$

хотя сама функция $\tilde{\phi}(\omega)$ не стремится к нулю при $\omega \neq 0$, а “штрихует” область между ветвями гиперболы $\pm 1/\pi\omega$ (см. рис. 1.5). ■

Пример 2. Найдем обобщенный Фурье-образ функции

$$f(t) = \frac{t^2}{\gamma^2 + t^2} .$$

Очевидно, эта функция не имеет Фурье-образа в обычном смысле, поскольку соответствующий интеграл Фурье расходится. Тем не менее имеется обобщенный Фурье-образ указанной функции. Чтобы найти его, перепишем исходную функцию в виде:

$$f(t) = 1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + t^2} .$$

Согласно (2), Фурье-образ первого слагаемого в правой части равен дельта-функции. Фурье-образ последнего слагаемого существует в обычном смысле. Сосчитав его получим

$$\tilde{f}(\omega) = \delta(\omega) - \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma|\omega|} . \quad \blacksquare$$

Иногда знание обобщенных Фурье-образов способно существенно упростить выкладки даже при вычислении обычных интегралов Фурье. Приведенные ниже примеры, опирающиеся на соотношение (1.2.3), убедительно демонстрируют этот замечательный факт.

Пример 3. Требуется найти Фурье-образ функции

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & \text{для } |t| < 1; \\ (2 - |t|)^2, & \text{для } 1 < |t| < 2; \\ 0, & \text{для } 2 < |t|. \end{cases} \quad (8)$$

Можно найти искомый Фурье-образ, вычисляя интеграл Фурье (1.1.1). Однако это довольно утомительное занятие. Поэтому найдем Фурье-образ не интегрированием, а дифференцированием. Легко показать, что 3-я производная указанной функции равна сумме дельта-функций

$$\ddot{f}(t) = 2\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 4\delta(t-1) - 2\delta(t-2).$$

Фурье-образы левой и правой частей этого равенства равны

$$-i\omega^3 \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} (e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} + 2e^{-i\omega} - e^{-2i\omega}).$$

Простые алгебраические выкладки дают

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{4}{\pi\omega^3} \sin \omega (1 - \cos \omega).$$

Графики функции-оригинала $f(t)$ (8) и ее 2-й производной, иллюстрирующие идею вычислений, изображены на рис. 1.1. ■

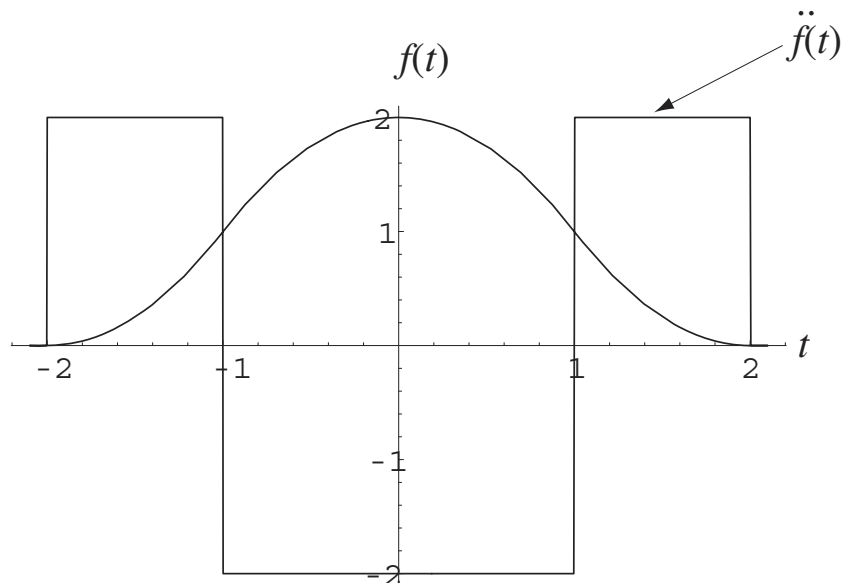


Рис. 1.1. Графики функции-оригинала $f(t)$ (8) и ее кусочно-постоянной второй производной $\ddot{f}(t)$, иллюстрирующие идею вычисления интеграла Фурье функции (8)

Пример 4. Значения f_n функции $f(t)$ известны в моменты времени $t_n = sn$, $n = \dots, -1, 0, 1, 2 \dots$. Найти Фурье-образ линейной интерполирующей функции

$$f^l(t) = f_n + (f_{n+1} - f_n) \frac{t - ns}{s}, \quad ns < t < (n+1)s. \quad (9)$$

Заметим, что 2-я производная интерполирующей функции равна

$$\ddot{f}^l(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_2 f_n \delta(t - ns).$$

Здесь использовано стандартное обозначение

$$\Delta_2 f_n = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$$

для приращения второго порядка функции f . Соответствующий Фурье-образ равен

$$\tilde{f}^l(\omega) = -\frac{1}{2\pi s\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_2 f_n e^{-i\omega sn}.$$

Перегруппировав слагаемые последнего ряда, получим окончательно

$$\tilde{f}^l(\omega) = \frac{2 \sin^2(\Omega/2)}{\pi \Omega^2} s \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\Omega n}. \quad (10)$$

Здесь использована безразмерная частота $\Omega = s\omega$. ■

Пример 5. Найдем Фурье-образ функции

$$f(t) = \int h(\tau) h(\tau + t) d\tau, \quad (11)$$

где

$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{для } 0 < t < \theta; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

– треугольный импульс.

Заметим прежде всего, что, как это следует из (1.2.11) и соотношения (1.1.3), искомым Фурье-образ связан с Фурье-образом треугольного импульса $h(t)$ равенством

$$\tilde{f}(\omega) = 2\pi |\tilde{h}(\omega)|^2. \quad (12)$$

Поэтому вычислим вначале Фурье-образ импульса $h(t)$. Его 2-я производная равна

$$\ddot{h}(t) = \delta(t) - \delta(t - \theta) - \theta \dot{\delta}(t - \theta).$$

Соответственно, Фурье-образ импульса $h(t)$ задан выражением

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\theta^2}{2\pi\Omega^2} \left[e^{-i\Omega}(1 + i\Omega) - 1 \right] ,$$

где $\Omega = \omega\theta$ – новый безразмерный аргумент. Подставив этот Фурье-образ в (12), получим окончательно

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\theta^4}{2\pi\Omega^4} \left[\Omega^2 + 2(1 - \cos \Omega - \Omega \sin \Omega) \right] . \quad \blacksquare$$

1.4. Ряд Фурье

Теория обобщенных преобразований Фурье приводит к специфической интерпретации взаимоотношений между интегралами и рядами Фурье. Покажем это, обсудив некоторые результаты теории рядов Фурье. А именно заметим, что если $f(t)$ – некоторая непрерывная периодическая функция, такая, что

$$f(t) \equiv f(t + 2\pi) , \quad (1)$$

то она может быть выражена с помощью ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_m e^{imt} , \quad (2)$$

где

$$\tilde{f}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt . \quad (3)$$

Умножив равенство (2) на $\phi(\tau - t)/2\pi$ и интегрируя обе части полученного равенства по всей оси t , будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int f(t) \phi(\tau - t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_m \tilde{\phi}(\omega) e^{im\tau} .$$

Сравнив это равенство с равенством (1.2.11), получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_m \tilde{\phi}(\omega) e^{im\tau} = \int \tilde{f}(\omega) \tilde{\phi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega ,$$

где $\tilde{f}(\omega)$ – обобщенный Фурье-образ периодической функции $f(t)$. Очевидно, последнее равенство справедливо, если

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_m \delta(\omega - m) . \quad (4)$$

Пусть теперь $f(t)$ равна периодической дельта-функции:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) .$$

Тогда все коэффициенты (3) одинаковы и равны $1/2\pi$, а равенство (2) принимает вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imt} . \quad (5)$$

Очевидное обобщение этой формулы на случай произвольного периода $2\pi/\Omega$ таково

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\Omega}\right) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Omega t} . \quad (6)$$

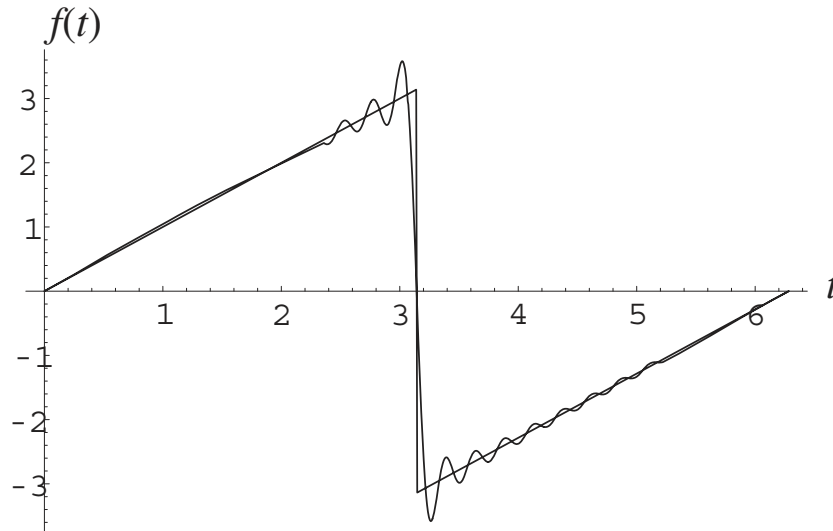


Рис. 1.2. График кусочно-линейной функции (7) и суммы первых 25 слагаемых ряда Фурье (8)

Пример 1. Заметим, что можно найти коэффициенты \tilde{f}_m (3) ряда Фурье (2), даже если исходная периодическая функция $f(t)$ не удовлетворяет условию непрерывности (1), то есть имеет разрывы или сингулярности иного рода. Типичным примером подобной разрывной функции может служить линейная периодическая функция

$$f(t) = t \quad (-\pi < t < \pi) , \quad (7)$$

имеющая скачки в точках $t_n = (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ее график изображен на рис. 1.2.

Можно вычислить коэффициенты Фурье и более сингулярных функций, как мы сделали это в случае периодической дельта-функции (см. формулу (6)). Возникающая при этом проблема состоит в том, что соответствующие ряды Фурье могут быть расходящимися, или слабо сходящимися, как в случае функции (7), чей ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(mt) . \quad (8)$$

График первых 25 слагаемых этого ряда изображен на рис. 1.2. Видно, что в окрестности разрыва график оборванного ряда Фурье существенно отличается от графика исходной функции. В последней главе этой книги мы обсудим более эффективные методы суммирования подобных слабо сходящихся, и даже расходящихся рядов. ■

Глава 2

Асимптотики интегралов Фурье

Выше мы многократно использовали тот замечательный факт, что Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$ гладкой функции $f(t)$ быстро спадает к нулю при $\omega \rightarrow \pm\infty$. Однако во многих прикладных задачах гладкие функции возникают лишь как приятное исключение или как результат чрезмерной идеализации. Чаще же наблюдаются функции с разрывами, изломами и другими нарушениями гладкости. К подобным негладким функциям относятся профили ударных волн, генерируемых мощными акустическими излучателями, или форма барханов в пустыне, имеющих характерные заострения. Эти и многие другие примеры негладких функций подчеркивают важность анализа их Фурье-образов.

Грубо говоря, значения Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ на частоте ω определяются поведением функции-оригинала $f(t)$ на временных масштабах порядка $2\pi/\omega$. Они становятся меньше с ростом ω . Поэтому нарушения гладкости, имеющие по своей природе локальный характер, определяют поведение Фурье-образа при больших значениях частоты ω – чем больше ω , тем сильнее негладкость функции-оригинала $f(t)$ влияет на ее Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$. С математической точки зрения последнее означает, что негладкость функций-оригиналов диктует асимптотические свойства их Фурье-образов при $\omega \rightarrow \infty$. Данная глава посвящена анализу подобных высокочастотных асимптотик Фурье-образов негладких функций.

2.1. Обозначения асимптотик

Поскольку основной целью данной главы является асимптотический анализ Фурье-образов негладких функций, начнем с того, что напомним основные обозначения и символы, используемые при анализе асимптотических соотношений:

- Если дробь $f(x)/g(x)$ сходится к 1 при $x \rightarrow \infty$, то этот факт выражают в форме *соотношения эквивалентности*:

$$g(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

и говорят, что функция $f(x)$ *асимптотически эквивалентна* функции $g(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

- Если найдется такая константа $a \neq 0$, что

$$f(x) \sim ag(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

тогда говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ – *одного порядка* при $x \rightarrow \infty$.

- Если дробь $f(x)/g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, то этот факт выражают соотношением

$$f(x) = o\{g(x)\} \quad (x \rightarrow \infty)$$

и говорят, что функция $f(x)$ – *более высокого порядка малости*, чем $g(x)$ (при $x \rightarrow \infty$). Так, соотношение $f(x) = o\{1\}$ ($x \rightarrow \infty$) означает, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

- Наконец, если имеются такие положительные постоянные a и M , что

$$|f(x)/g(x)| \leq M \quad \text{для} \quad a \leq x < \infty,$$

то этот факт записывают в виде:

$$f(x) = O\{g(x)\} \quad (x \rightarrow \infty),$$

и говорят, что $f(x)$ – *порядка не выше чем* $g(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Аналогичные обозначения используют и при анализе асимптотик при $x \rightarrow 0$, или при стремлении x к любой другой предельной точке. Например пишут $\sin x \sim x$ ($x \rightarrow 0$).

Пример 1. Проиллюстрируем простейшие приемы асимптотического анализа примером, заимствованным из студенческого фольклора. Начнем со школьной загадки: Пусть земля имеет форму идеального шара радиусом $R = 6400$ км, и на этот шар по экватору натянута проволочное кольцо. Разрежем его в некоторой точке, впаяем в месте разреза кусок проволоки длиной $L = 1$ метр и растянем проволоку кольцом так, чтобы расстояние h между кольцом и землей было всюду одинаковым. Спрашивается, какова величина h зазора между землей и новым кольцом? Ответ гласит, что $h = L/2\pi \simeq 16$ см – не зависит от радиуса земли (h одинаково для луны, юпитера и теннисного шара). Заметим, что после

добавления куска проволоки длиной всего 1 метр, под новым кольцом может свободно проползти кошка. Один школьник провел бессонную ночь, пораженный таким ответом. Он был бы удивлен еще сильнее решением задачи, поставленной ниже.

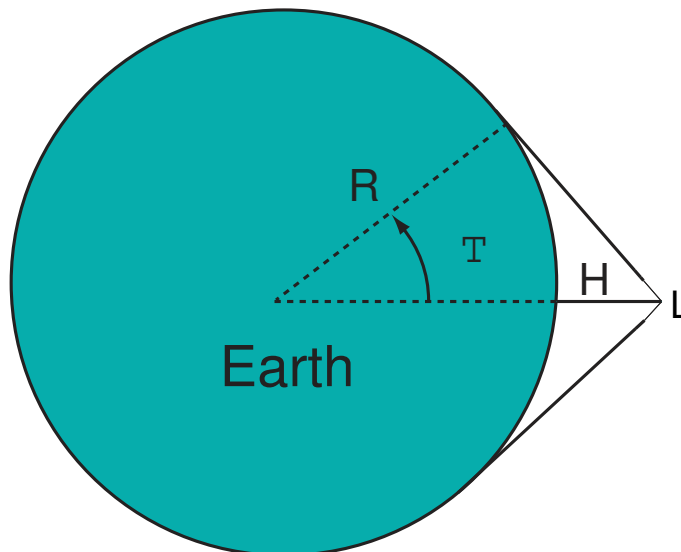


Рис. 2.1. Схематическое изображение натянутой по экватору проволоки длиной $R + L$

Пусть, как и прежде, к растянутой вдоль экватора проволоке добавляют кусок длиной $L \ll R$, а затем проволоку прижимают к экватору, потянув за одну из ее точек, как это изображено на рис. 2.1. Спрашивается, каково наибольшее расстояние H проволоки от земли?

Чтобы быстрее решить загадку, предположим вначале, что радиус земли равен 1. Тогда искомая высота η выражается через угол θ , указанный на рисунке, асимптотической формулой

$$\eta = \frac{1}{\cos \theta} - 1 \sim \frac{\theta^2}{2} \quad (\theta \rightarrow 0),$$

в то время как длина ℓ дополнительного куска проволоки, в терминах угла θ , асимптотически равна

$$\ell = 2(\tan \theta - \theta) \sim \frac{\theta^3}{3} \quad (\theta \rightarrow 0).$$

Мы намеренно использовали здесь асимптотические соотношения при $\theta \rightarrow 0$, поскольку длина вставленного куска проволоки много меньше

радиуса земли ($\ell \ll 1$). Исключив угол θ из приведенных асимптотических соотношений, найдем связь между η и ℓ :

$$\eta \sim \ell^\alpha \quad (\ell \rightarrow 0), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \simeq 0.655.$$

Отсюда ясно, что $\ell = o\{\eta\}$. Иначе говоря, ℓ – величина более высокого порядка малости чем η . На деле это означает, что высота η много больше длины ℓ вставленного куска проволоки, а их отношение становится все больше и больше, чем меньше ℓ . Возвращаясь к реальным земным масштабам, и имея в виду, что в нашем случае $\ell = L/R \simeq 1.56 \cdot 10^{-7}$, получим из (1), что высота проволоки над землей примерно равна

$$H = \eta R \simeq 121.6 \text{ м}.$$

Вставим теперь в натянутую вдоль экватора проволоку кусочек длиной $L = 3$ миллиметра (это размер отпиленного от иголки и распрямленного игольного ушка). Тогда из формулы (1) следует, что расстояние между землей и проволокой равно $H \simeq 2.53$ м. – вполне достаточно, чтобы между землей и проволокой прошел верблюд.

2.2. Функции с разрывами

Начнем с обсуждения простейшей ситуации, когда функция-оригинал $f(t)$ имеет разрыв 1-го рода (скачок) в точке $t = \tau$, и непрерывна вместе со своей 1-й всюду при $t \neq \tau$. Для простоты доказательств предположим, что и $f(t)$, и ее первая производная $\{f\}'(t)$ ⁵ – абсолютно интегрируемы. Типичный график такого рода функции изображен на рис. 2.2.

⁵Напомним, $\{f\}'(t)$ означает производную функции $f(t)$, где производная существует в обычном смысле, дополненную произвольными ограниченными значениями в точках разрыва исходной функции.

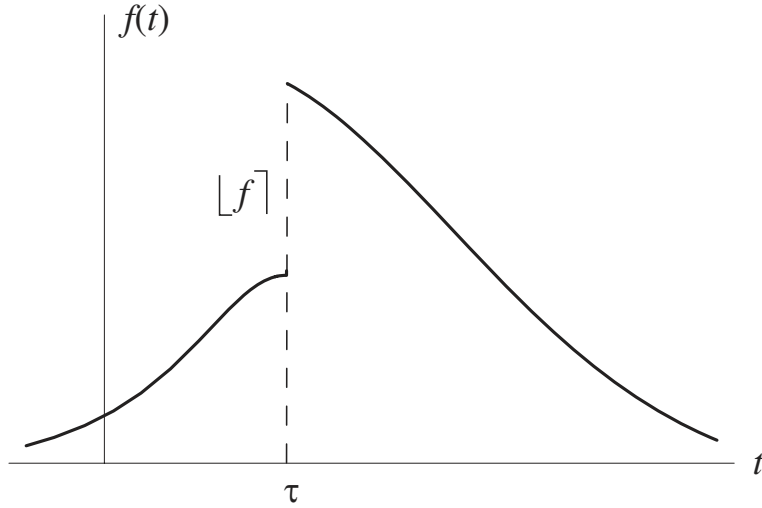


Рис. 2.2. Функция $f(t)$, гладкая всюду за исключением точки $t = \tau$, где она имеет разрыв 1-го рода

Мы будем опираться в дальнейшем на *лемму Римана Лебега*, сформулированную ниже в упрощенной версии:

Пусть функция $f(t)$ – непрерывна на интервале (τ, ∞) и абсолютно интегрируема. Тогда

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \rightarrow 0 \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Пусть также $f(t)$ обладает подобными свойствами и в интервале $(-\infty, \tau)$.

Разобьем интеграл Фурье указанной функции $f(t)$ на два интеграла

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\tau} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

и преобразуем их с помощью интегрирования по частям. При этом первое слагаемое примет вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = f(\tau + 0) \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2\pi i\omega} \int_{\tau}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

Согласно нашему предположению, функция $\dot{f}(t)$ – непрерывна в интервале интегрирования (τ, ∞) и абсолютно интегрируема. Следовательно, к интегралу в правой части последнего равенства применима лемма Римана-Лебега, то есть справедливо асимптотическое соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = f(\tau + 0) \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega} + o\left\{\frac{1}{\omega}\right\}.$$

Аналогичная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\tau} f(t) e^{-i\omega t} dt = -f(\tau - 0) \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega} + o\left\{\frac{1}{\omega}\right\}$$

справедлива и для 2-го интеграла в (2). Объединяя полученные асимптотические соотношения, придем к асимптотической формуле для Фурье-образа функции, имеющей разрыв 1-го рода в точке τ :

$$\tilde{f}(\omega) = [f] \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega} + o\left\{\frac{1}{\omega}\right\} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Здесь использовано стандартное обозначение

$$[f] = f(\tau + 0) - f(\tau - 0)$$

для величины скачка функции $f(t)$ в точке разрыва τ . Напомним, символ $o\{1/\omega\}$ означает бесконечно малую (при $\omega \rightarrow \infty$) величину, более высокого порядка малости, чем $1/\omega$. Таким образом, первое слагаемое в правой части (4) описывает так называемую *главную асимптотику* Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Пример 1. Для упрощения доказательств мы потребовали, при формулировке леммы Римана-Лебега, чтобы функция $f(t)$ была абсолютно интегрируемой. На деле лемма Римана-Лебега справедлива при гораздо менее ограничительных условиях. Проиллюстрируем это на примере табличной формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{1+t^2}} dt = K_0(\omega),$$

где $K_0(\omega)$ – *модифицированная функция Бесселя 3-го рода* (функция Кельвина). Легко видеть, что подынтегральная функция здесь не является абсолютно интегрируемой, так как спадает при $t \rightarrow \infty$ очень медленно (как $1/t$). Тем не менее интеграл *сходится равномерно* при $\omega > 0$, что достаточно для справедливости леммы Римана-Лебега. В самом деле, известно, что данный интеграл быстро стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. А именно, справедлива следующая асимптотическая формула

$$K_0(\omega) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} e^{-\omega} \quad (\omega \rightarrow \infty).$$

Мы уже достаточно освоили теорию преобразований Фурье, чтобы дать объяснение такому быстрому – экспоненциальному – стремлению

к нулю функции $K_0(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. В самом деле, “функция-оригинал” $1/\sqrt{1+t^2}$ – бесконечно дифференцируема, а значит, ее Фурье-образ спадает к нулю быстрее любой степенной функции ω^{-n} . Упомянутое же отсутствие абсолютной интегрируемости формирует асимптотику при $\omega \rightarrow 0$, где $K_0(\omega) \sim -\ln(|\omega|)$. ■

Вернемся к обсуждению Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ функции $f(t)$, имеющей скачок в точке $t = \tau$. Потребуем дополнительно, чтобы при $t \neq \tau$ функция $f(t)$ имела n непрерывных производных, абсолютно интегрируемых на интервалах $(-\infty, \tau)$ и (τ, ∞) . Тогда, последовательно интегрируя по частям, получим *асимптотическое разложение*

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega} \sum_{m=0}^{n-1} [f^{(m)}] \left(\frac{1}{i\omega}\right)^{m+1} + o\left\{\frac{1}{\omega^n}\right\} \quad (\omega \rightarrow \infty), \quad (5)$$

Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ в ряд по отрицательным степеням $i\omega$.

Пример 2. Рассмотрим два табличных интеграла:

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ht} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + h^2}, \quad (6)$$

и

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ht} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{h}{\omega^2 + h^2}. \quad (7)$$

Здесь $h > 0$. Легко найти главные асимптотики этих интегралов при больших ω разложением в ряд по степеням $1/\omega$ правых частей приведенных равенств. Они равны, соответственно, $1/\pi\omega$ и $h/\pi\omega^2$. Отсюда видно, что при $\omega \rightarrow \infty$, второй интеграл оказывается более высокого порядка малости, чем первый интеграл.

Выясним причины подобного неравноправия этих, внешне похожих, интегралов. Подобно ветерану войны, чувствующему в дождливый день боль ампутированной ноги, указанные интегралы “ощущают себя” полноценными интегралами Фурье

$$S = \frac{1}{2\pi} \int i e^{-h|t|} \text{sign}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int e^{-h|t|} e^{-i\omega t} dt. \quad (8)$$

Функции-оригиналы здесь представляют собой нечетное и четное отражение, на отрицательную полуось $(-\infty, 0)$, экспоненты e^{-ht} из интегралов (6)-(7). Причем в первом случае отраженная функция имеет, при $t = 0$, скачок величины $[f] = 2i$. Соответственно, согласно асимптотической формуле (4), главная асимптотика интеграла S равна $1/\pi\omega$. С другой стороны, четное отражение функции e^{-ht} в интеграле C –

всюду непрерывная функция, но имеет разрыв производной со скачком $[\dot{f}] = -2h$ при $t = 0$. Это означает, что первым ненулевым (то есть главным) членом асимптотического разложения (5) интеграла C служит второе (отвечающее $m = 1$) слагаемое, равное $1/\pi\omega^2$. ■

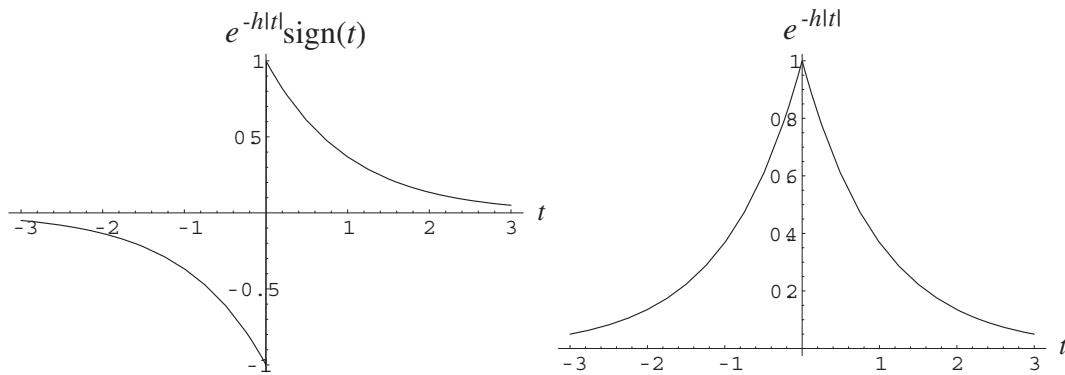


Рис. 2.3. Графики подынтегральных функций в интегралах C и S (8) (для $h = 1$), демонстрирующих корни различия их асимптотик при $\omega \rightarrow \infty$

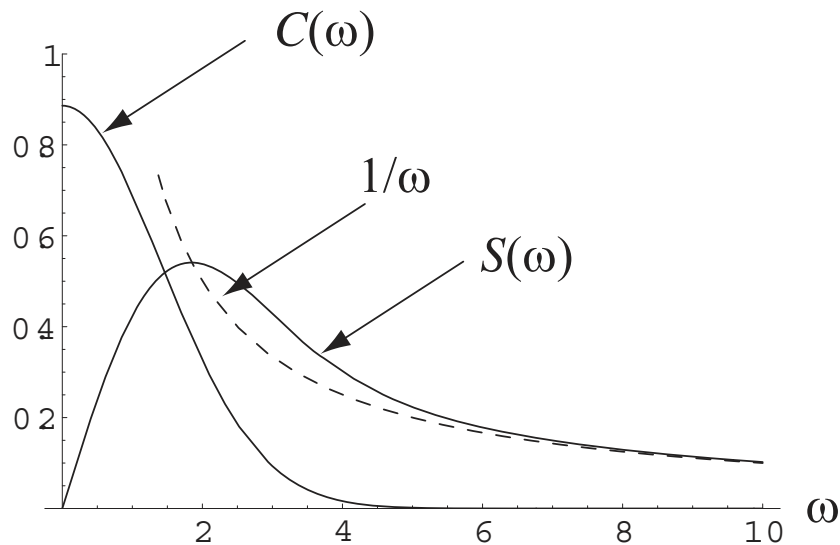


Рис. 2.4. Графики функций $C(\omega)$, $S(\omega)$ (9), и степенной асимптотики (10) последней из них

Пример 3. Еще большее различие асимптотического поведения демонстрируют интегралы:

$$C(\omega) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(\omega t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right), \quad (9)$$

$$S(\omega) = \int_0^\infty e^{-t^2} \sin(\omega t) dt .$$

Первый интеграл здесь, пропорциональный Фурье-образу бесконечно дифференцируемой функции e^{-t^2} , спадает к нулю с ростом ω даже быстрее, чем экспоненциальная функция. Второй же интеграл, как следует из приведенных выше асимптотических формул, подчиняется асимптотическому соотношению

$$S \sim \frac{1}{\omega} . \quad (10)$$

Графики функций $C(\omega)$ и $S(\omega)$ (9), демонстрирующие их качественно различное поведение при больших ω , изображены на рис. 2.4.

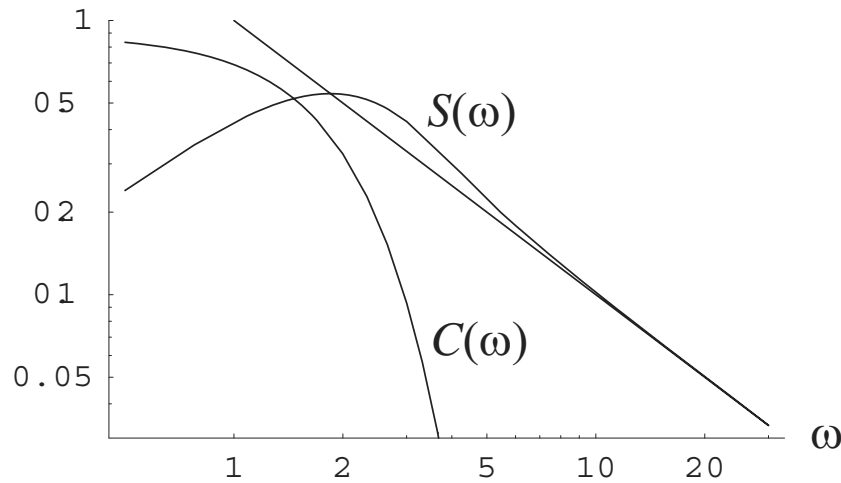


Рис. 2.5. Графики в двойном логарифмическом масштабе функций C и S (9), демонстрирующие наличие степенной асимптотики у функции S и отсутствие такой асимптотики у C . Прямая линия представляет собой график степенной асимптотики (10)

Кое кто полагает, что описанные выше асимптотики, справедливые при $\omega \rightarrow \infty$, не имеют отношения к “реальной жизни”, то есть к поведению исследуемых функций при ограниченных значениях ω . Графики на рис. 2.4. убеждают, что выявленные асимптотики “работают” и не при очень больших значениях ω . К примеру, отношение асимптотики (10) и точного значения функции $S(\omega)$ (9) близко к единице уже при $\omega = 5$

(точнее $\omega S(\omega)|_{\omega=5} \simeq 1.12$). С другой стороны, качественное различие асимптотик $C(\omega)$ и $S(\omega)$ ведет к поразительно малому значению отношения C и S уже при $\omega = 10$:

$$\left. \frac{C(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=10} \simeq 1.210^{-10} .$$

Различие асимптотик функций C и S (9) наглядно иллюстрируется графиками на рис. 2.4 – с линейными шкалами по горизонтальной и вертикальной осям. В прикладных и физических задачах, где характерны степенные зависимости изучаемых закономерностей, более удобно применять графики в двойном логарифмическом масштабе, как на рис. 2.5. Чтобы показать это, рассмотрим степенную функцию

$$\tilde{f}(\omega) = A\omega^{-r} . \quad (11)$$

График зависимости ее логарифма от логарифма частоты $\log \omega$ представляет собой прямую линию с тангенсом угла наклона, равным показателю степени $-r$ степенного закона (11):

$$\log \tilde{f} = -r \log \omega + \log A , \quad (12)$$

Таким образом, если график изображен в двойном логарифмическом масштабе, то легко обнаружить наличие степенной зависимости и показателя степени r . Рис. 2.5 наглядно демонстрирует, при больших ω , отсутствие степенного закона у C и наличие его у функции S . ■

2.3. Сглаживание функции

Продолжим обсуждение Фурье-образов функций с разрывами 1-го рода (или имеющих *скрытые разрывы* – то есть непрерывных функций, производные которых содержат разрывы) с инженерной точки зрения.

Изучение Фурье-образов разрывных функций будет неполным без упоминания прямоугольной функции, описывающей, к примеру, прямоугольный импульс или индикатор интервала на оси t . Это простейшая разрывная функция, важная для многочисленных приложений. Поскольку мы не намерены здесь обсуждать конкретные инженерные проблемы, будем считать аргумент t безразмерным и сконцентрируемся на обсуждении “эталонного” примера прямоугольной функции

$$\Pi(t) = \chi(t + 1) - \chi(t - 1) , \quad (1)$$

– равной единице при $|t| < 1$ и нулю вне этого интервала. Заметим, что 1-я производная прямоугольной функции равна

$$\dot{\Pi}(t) = \delta(t + 1) - \delta(t - 1) .$$

Следовательно,

$$i\omega\tilde{\Pi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = \frac{i}{\pi} \sin \omega \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Pi}(\omega) = \frac{\sin \omega}{\pi\omega} . \quad (2)$$

График модуля функции $\tilde{\Pi}(\omega)$ дан на рис. 2.6. Медленное спадание, с ростом ω , его локальных максимумов вызвано медленным стремлением нулю (как $O\{1/\omega\}$) асимптотики Фурье-образа $\tilde{\Pi}(\omega)$, из-за скачков исходной прямоугольной функции $\Pi(t)$ в точках $t = \pm 1$.

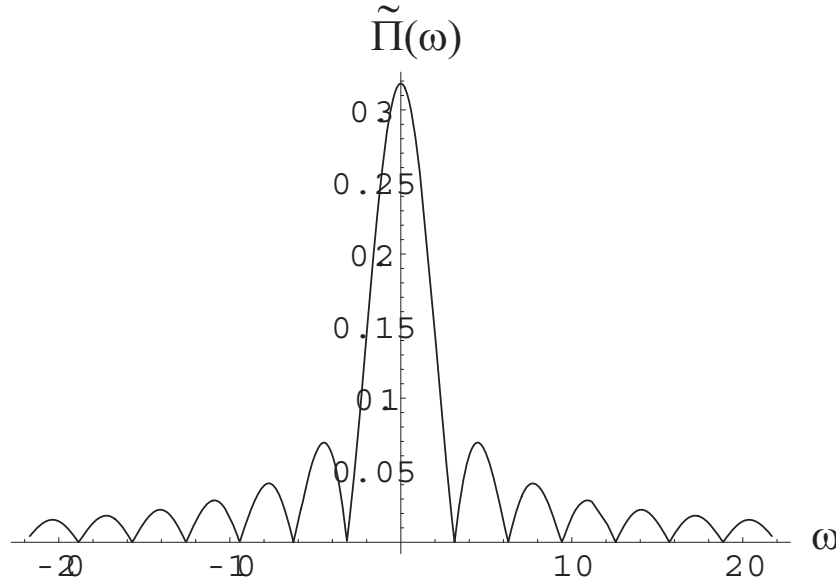


Рис. 2.6. График абсолютной величины Фурье-образа прямоугольной функции

В теории антенн график на рис. 2.6, трактуют как график зависимости *диаграммы направленности* антенны от аргумента ω , – характеризующего степень отклонения антенны от некоторого выделенного направления⁶. Наличие медленно спадающих с ростом ω “лепестков” (в нашем

⁶Используемая здесь “антенная терминология” применительно к Фурье-образам функции-оригинала $f(t)$ оправдана тем, что если распределение источников волны вдоль антенны описывается функцией $f(t)$, где t – координаты точек антенны, то, в зоне дифракции Фраунгофера, зависимость амплитуды излучаемой антенной волны от “угла” ω описывается Фурье-образом $\tilde{f}(\omega)$ распределения источников на антенне.

случае – участков графика между последовательными нулями функции $\tilde{P}(\omega)$ снижает *разрешающую способность* антенны. По этой причине при конструировании антенн стараются как можно сильнее подавить боковые лепестки, сохраняя при этом некоторые основные характеристики антенны, то есть функции $f(t)$, описывающей распределение источников. Одной из таких главных характеристик антенны является ее размер – интервал на оси t , вне которого функция $f(t)$ тождественно равна нулю. Поэтому математическая формулировка указанной выше “инженерной” проблемы подавления боковых лепестков антенны гласит: найти финитную функцию $f(t)$ с носителем $t \in [-1, 1]$, оптимизирующим, согласно выбранному критерию, ее Фурье-образ $f(\omega)$.

Инженеры решают подобные задачи подбором функции $f(t)$, наиболее подходящей в заданных технических условиях. Применим указанный “инженерный” подход, дав сравнительную характеристику Фурье-образам нескольких конкретных функций $f(t)$, равных нулю вне интервала $t \in [-1, 1]$, обращая главное внимание на скорость спада к нулю их Фурье-образов с ростом ω .

Пример 1. Возьмем треугольную функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3a)$$

Она всюду непрерывна, но ее производная имеет скачки величиной 1 в точках $t = \pm 1$, и скачок -2 при $t = 0$. Поэтому ее Фурье-образ равен

$$\tilde{f}(\omega) = -\frac{1}{2\pi\omega^2} (e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}) = \frac{2 \sin^2(\omega/2)}{\pi\omega^2}. \quad \blacksquare \quad (3b)$$

Заметим, что отсутствие скачков у треугольника (3a) гарантирует сравнительно сильное, по сравнению с прямоугольником (1), “подавление” боковых лепестков ее Фурье-образа. Боковые лепестки будут подавлены еще сильнее, если функция-оригинал $f(t)$ не только непрерывна, но достаточно гладкая. Поэтому при конструировании антенн стараются подобрать как можно более гладкое распределение $f(t)$ источников вдоль антенны. Таким образом? имеет смысл обсудить Фурье-образы некоторых, более гладких, чем треугольная функция, функций $f(t)$. Поучительными примерами подобного рода гладких функций служат функции

$$f_n(t) = \begin{cases} \cos^{2n}(t), & |t| < \pi/2, \\ 0, & |t| \geq \pi/2, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4a)$$

Фурье-образы которых равны

$$\tilde{f}_n(\omega) = (2n)! \frac{\sin(\pi\omega/2)}{\pi\omega} \prod_{m=1}^n \frac{1}{4m^2 - \omega^2}. \quad (4b)$$

Пример 2. Рассмотрим для определенности функцию-оригинал

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t/2), & \text{для } |t| < 1, \\ 0, & \text{для } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (5a)$$

Ее Фурье-образ равен

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \omega}{\omega(\pi^2 - \omega^2)}. \quad (5b)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ он спадает как $1/\omega^3$ – то есть быстрее, чем Фурье-образ треугольной функции (3а). Это связано с тем, что функция-оригинал $f(t)$ (5а) непрерывна вместе со своей первой производной, имея разрывы только 2-й производной.

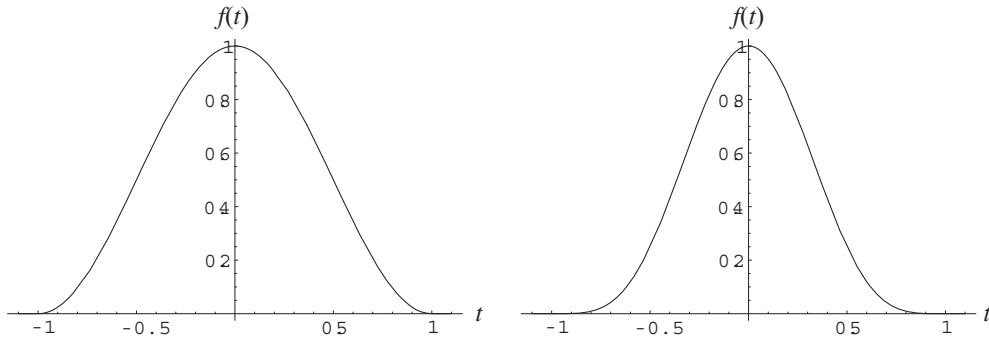


Рис. 2.7. Графики функции-оригинала (5а) (слева) и (6а) (справа)

Аналогично, функция-оригинал

$$f(t) = \begin{cases} \cos^4(\pi t/2), & \text{для } |t| < 1, \\ 0, & \text{для } |t| \geq 1, \end{cases} \quad (6a)$$

– трижды непрерывно дифференцируема, и имеет разрывы только четвертой производной. Соответственно, ее Фурье-образ

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{3}{2} \pi^3 \frac{\sin \omega}{\omega(\omega^2 - \pi^2)(\omega^2 - 4\pi^2)}, \quad (6b)$$

стремится к нулю, при $\omega \rightarrow \infty$, как $1/\omega^5$. Графики функций (5а) и (6а), изображены на рис. 2.7. Зрительно почти невозможно определить, какая из этих функций более гладкая в окрестности граничных точек $t = \pm 1$. С другой стороны, двойной логарифмический график их Фурье-образов, изображенный на рис. 2.8, очень чувствителен к характеру “скрытых” разрывов функций-оригиналов. ■

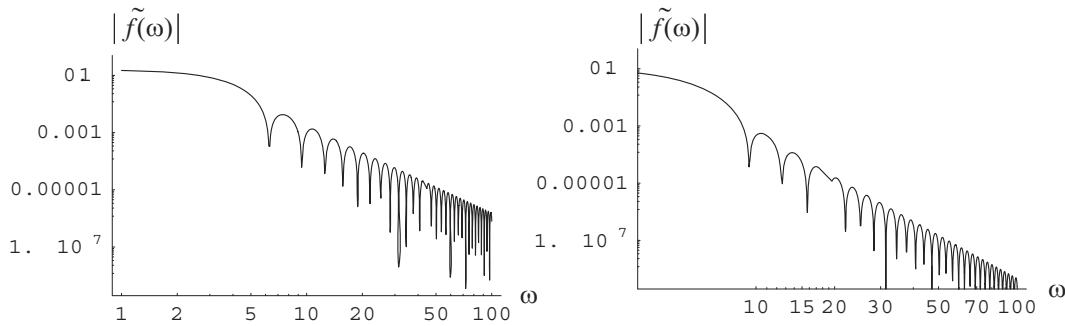


Рис. 2.8. Графики Фурье-образа (5b) (слева) и (6b) (справа)

2.4. Разрывы 2-го рода

Выше мы обсуждали особенности Фурье-образов функций, имеющих разрывы 1-го рода (скачки конечных размеров). В этом разделе изучим асимптотики Фурье-образов правосторонних функций (то есть таких, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$), обладающих степенной асимптотикой вида:

$$f(t) \sim A t^{\alpha-1} \quad (t \rightarrow 0+), \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. При $0 < \alpha < 1$ подобные функции $f(t)$ имеют разрыв 2-го рода (то есть стремятся к ∞ при $t \rightarrow 0$). С другой стороны, при $\alpha > 1$ сами функции непрерывны, а разрывы 2-го рода имеют их производные порядка $n = \lfloor \alpha \rfloor$. В этих случаях мы будем говорить, что функция $f(t)$ обладает скрытыми разрывами 2-го рода.

Интегрирование по частям, так эффективное при отыскании асимптотик Фурье-образов функций, имеющих разрывы 1-го рода, в случае функций с разрывами 2-го рода не дает возможности отыскать асимптотики их Фурье-образов. Более полезным здесь оказывается сравнение асимптотик функций, имеющих особенности вида (1), с Фурье-образами некоторых эталонных функций, имеющих аналогичные особенности.

Чтобы сконструировать указанные эталонные функции, нам понадобятся известные свойства гамма-функции, равной *интегралу Эйлера*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (2)$$

Напомним, гамма-функция естественным образом интерполирует функцию целочисленного аргумента $n!$ на дробные значения аргумента. Действительно, из (2) следует, что при целых значениях аргумента гамма-функция равна

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

При произвольных (в том числе комплексных) значениях аргумента она подчиняется рекуррентной формуле

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) .$$

Кроме того, справедливо *соотношение симметрии*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} ,$$

из которого немедленно следует, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Таким образом, в указанном смысле, $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$.

Ниже мы будем опираться на табличную формулу:

$$\Gamma(\alpha) = u^\alpha \int_0^\infty e^{-ut} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0) . \quad (3)$$

Здесь, при дробном α , берется главное значение степенной функции u^α . Отметим еще, что если $0 < \alpha < 1$, то формула (3) справедлива для любых комплексных величин u , таких, что $\operatorname{Re} u \geq 0$. При $\alpha > 1$, реальная часть u должна быть строго положительна: $\operatorname{Re} u > 0$.

Пример 1. При $0 < \alpha < 1$ можно взять в (3) величину u чисто мнимой: $u = i\omega$, что приводит к формуле

$$\Gamma(\alpha) = (i\omega)^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-i\omega t} dt . \quad (4)$$

Сравнение ее с формулой преобразования Фурье (1.1.1) дает табличную формулу теории преобразований Фурье

$$g(t; \alpha) = \chi(t)t^{\alpha-1} \quad \mapsto \quad \tilde{g}(\omega; \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi(i\omega)^\alpha} . \quad (5)$$

Заметим, что наличие у Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ одного и того же степенного закона $\omega^{-\alpha}$ при любых значениях ω , отражает две принципиально разные особенности поведения функции-оригинала $g(t; \alpha)$. При $\omega \rightarrow \infty$ этот степенной закон является следствием разрыва 2-го рода функции-оригинала при $t = 0$, в то время как тот же степенной закон при $\omega \rightarrow 0$, возникает из-за медленного, как $(\sim t^{\alpha-1})$ спада хвоста функции-оригинала при $t \rightarrow \infty$. ■

Пример 2. Рассмотрим случай $\alpha > 1$, когда интеграл в (3) сходится лишь если $\text{Re } u > 0$. Поэтому положим $u = h + i\omega$, где $h > 0$. В итоге получим

$$\Gamma(\alpha) = (h + i\omega)^\alpha \int_0^\infty t^{-ht-i\omega t} dt .$$

Другими словами, функция-оригинал

$$g(t; \alpha, h) = \chi(t)t^{\alpha-1} e^{-ht} \quad (h > 0) \quad (6a)$$

имеет Фурье-образ

$$\tilde{g}(\omega; \alpha, h) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi(h + i\omega)^\alpha} . \quad (6b)$$

Ее главная асимптотика при $\omega \rightarrow \infty$, описываемая выражением

$$\tilde{g}(\omega; \alpha, h) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi(i\omega)^\alpha} \quad (\omega \rightarrow \pm\infty) , \quad (7)$$

справедлива при любом $\alpha > 0$. Для дробных α эта асимптотика является следствием разрыва 2-го рода функции-оригинала (6a) (если $0 < \alpha < 1$), или аналогичных разрывов ее производных (при $\alpha > 1$). При целых α асимптотика (7) согласуется с асимптотическим поведением Фурье-образов функций-оригиналов, обладающих явными (у самой функции $f(t)$) или скрытыми (у ее производных) разрывами 1-го рода, обсужденными в предыдущих разделах. График функции-оригинала (6a), иллюстрирующий происхождение асимптотики (7), дан на рис. 2.9. ■

Кроме правосторонней функции (6a), тождественно равной нулю при $t < 0$, полезно обсудить поведение асимптотик Фурье-образов ее четной и нечетной составляющих. Напомним, что для произвольной функции $g(t)$ эти компоненты равны

$$g_{\text{even}}(t) = \frac{1}{2} [g(t) + g(-t)] , \quad g_{\text{odd}}(t) = \frac{1}{2} [g(t) - g(-t)] . \quad (8a)$$

Как следует из свойств (1.1.2с) и (1.1.3) Фурье-образов действительных функций, Фурье-образы четной и нечетной компонент функции-оригинала равны, соответственно, реальной и мнимой частям Фурье-образа исходной функции

$$\tilde{g}_{\text{even}}(\omega) = \text{Re } \tilde{g}(\omega) , \quad \tilde{g}_{\text{odd}}(\omega) = \text{Im } \tilde{g}(\omega) . \quad (8b)$$

Выделяя действительную и мнимую части Фурье-образа (6b), получим

$$\tilde{g}_{\text{even}}(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha) \cos[\alpha\kappa(\gamma)]}{2\pi(h^2 + \omega^2)^{\alpha/2}} , \quad \tilde{g}_{\text{odd}}(\omega) = i \frac{\Gamma(\alpha) \sin[\alpha\kappa(\gamma)]}{2\pi(h^2 + \omega^2)^{\alpha/2}} . \quad (9)$$

Введенный здесь аргумент κ комплексной величины $h + i\omega$ следующим образом выражается через безразмерную частоту γ :

$$\kappa = \arctan(\gamma) , \quad \gamma = \omega/h . \quad (10)$$

При $\gamma \rightarrow \pm\infty$ аргумент стремится к предельным значениям $\kappa \rightarrow \pm\pi/2$, так что Фурье-образы четной и нечетной частей функции-оригинала (6а) обладают следующими главными асимптотиками:

$$\tilde{g}_{\text{even}}(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)}{2\pi|\omega|^\alpha} \quad (\omega \rightarrow \pm\infty) , \quad (11a)$$

$$\tilde{g}_{\text{odd}}(\omega) = i \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}{2\pi|\omega|^\alpha} \text{sign}(\omega) \quad (\omega \rightarrow \pm\infty) . \quad (11b)$$

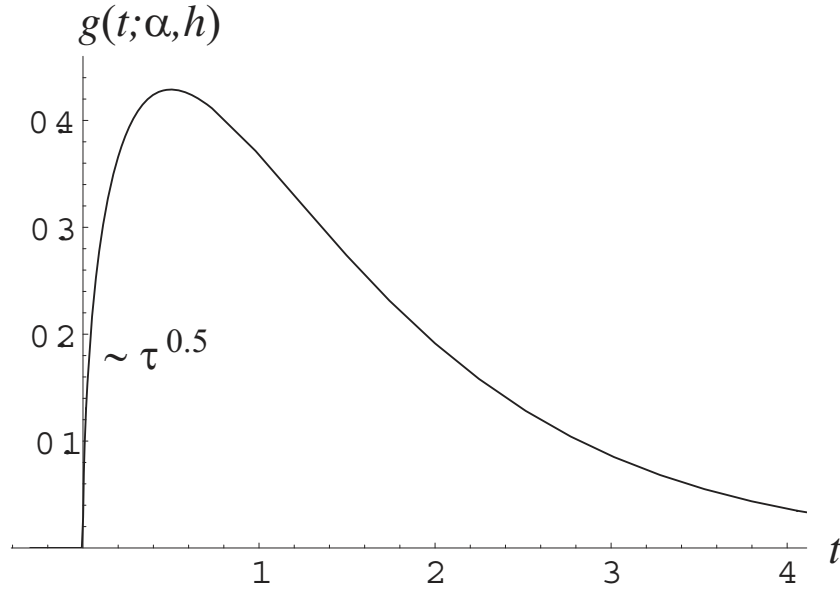


Рис. 2.9. График функции-оригинала (6а) при $\alpha = 3/2$ и $h = 1$. Ее степенная асимптотика $g \sim \sqrt{t}$ при $t \rightarrow 0+$ порождает асимптотику (7) Фурье-образа при $\omega \rightarrow \infty$

Выведенные только что асимптотические соотношения (11) заслуживают детального обсуждения. Заметим прежде всего, что в инженерных и физических приложениях эти асимптотики даже более важны, чем точные формулы (9), из которых они получены. В самом деле, точные формулы дают Фурье-образы узкого класса эталонных функций, в то время как асимптотические соотношения (11) описывают, как мы убедимся в дальнейшем, асимптотики обширного класса функций-оригиналов, которые, в окрестности некоторой точки τ имеют локальные степенные особенности вида $\sim A(t - \tau)^{\alpha-1}$.

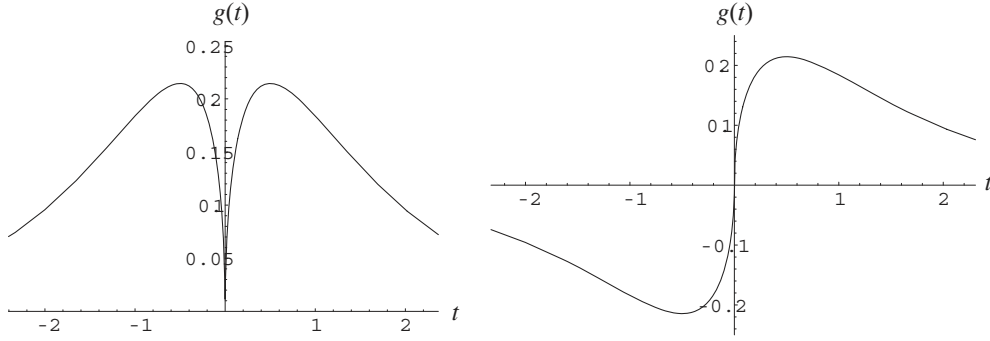


Рис. 2.10. Графики четной и нечетной компонент функции-оригинала $g(t)$ (12)

Заметим еще, что для целых нечетных значений α , косинус в асимптотической формуле (11a) обращается в нуль, в то время как для четных значений α синус в (11b) зануляется. Это означает, что асимптотики Фурье-образов соответствующих функций-оригиналов – бесконечно малые более высокого порядка, чем $1/|\omega|^\alpha$. Этот факт аналогичен подмеченному ранее различию в асимптотическом поведении интегралов C и S (2.1.9). Поясним его на примере простейших функций $\chi(t)t^2$ и $\chi(t)t$. Первая из них, при нечетном продолжении, становится равной $\text{sign}(t)t^2$, и имеет разрыв 2-й производной, в то время как ее четное отражение на отрицательную полуось $t < 0$ равно бесконечно дифференцируемой функции t^2 . Соответственно, обобщенный Фурье-образ четной функции t^2 не имеет степенных асимптотик, как это видно из формулы для обобщенных Фурье-образов чисто степенных функций (первая строчка формулы (1.3.7)).

В случае дробного α , главные асимптотики Фурье-образов четной и нечетной компонент функции-оригинала (6a) одного порядка, и спадают при $\omega \rightarrow \infty$, как $1/|\omega|^\alpha$.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \sqrt{t}e^{-ht} \chi(t), \quad (12)$$

равную (6a) при $\alpha = 3/2$. График ее четной компоненты, изображенный на рис. 2.10 и обладающий характерным “клювиком” в окрестности $t = 0$, производит впечатление функции, гораздо менее гладкой, чем нечетная компонента, изображенная на том же рис. 2.10 справа. Тем не менее, вопреки “геометрической интуиции”, Фурье-образы обеих функций имеют одну и ту же степенную асимптотику $1/\omega^{3/2}$. Иллюстрирующие указанный факт графики Фурье-образов четной и нечетной компонент функции (12) даны на рис. 2.11. ■

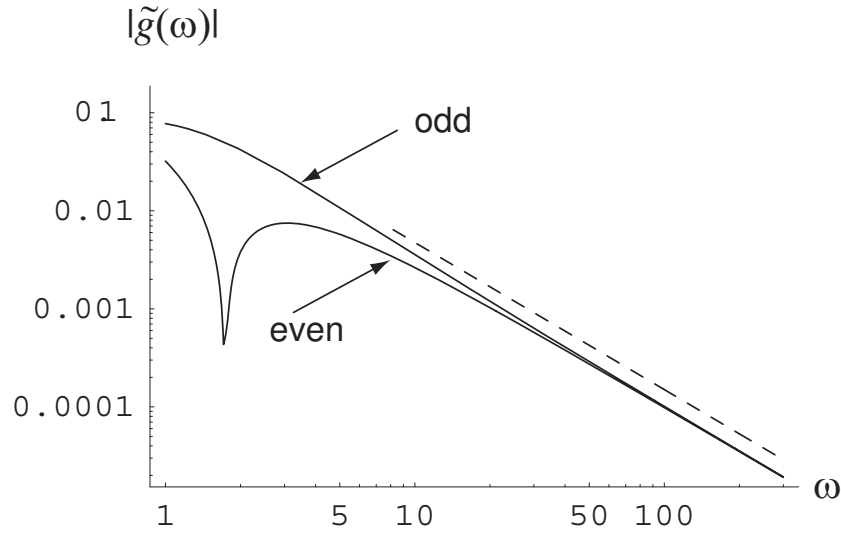


Рис. 2.11. Графики Фурье-образов четной и нечетной компонент функции-оригинала $g(t)$ (12). Штрихованная прямая линия соответствует степенной асимптотике $\omega^{-3/2}$

Вернемся к главной теме данного раздела – анализу асимптотик Фурье образов функций-оригиналов, имеющих разрывы 2-го рода, с помощью эталонных функций (6а). Пусть $f(t)$ – некоторая достаточно гладкая и быстро спадающая при $t \rightarrow \infty$, правосторонняя функция, обладающая при $t \rightarrow 0$ степенной асимптотикой (1). Проведенный выше анализ Фурье-образа эталонной функции (6а) подсказывает, что Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$ функции $f(t)$ должен иметь ту же главную асимптотику вида $1/\omega^\alpha$. Это утверждение может быть строго доказано. Идея доказательства состоит в использовании процедуры “шпаклевки”, сводящейся в устранении разрывов 2-го рода исходной функции путем вычитания из нее эталонной функции, имеющей аналогичный разрыв. Проиллюстрируем сказанное, обсудив вспомогательную функцию

$$v(t) = f(t) - Ag(t; \alpha, h) . \quad (13)$$

Поскольку $g(t; \alpha, h) \sim t^{\alpha-1}$ ($t \rightarrow 0$), вспомогательная функция $v(t)$ имеет более высокий порядок малости, чем $f(t)$: $v(t) = o\{t^{\alpha-1}\}$ ($t \rightarrow 0$). Следовательно, естественно предположить, что главная асимптотика Фурье-образа вспомогательной функции при $\omega \rightarrow \infty$ – более высокого порядка малости, чем главная асимптотика Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ исходной функции:

$$\tilde{v}(\omega) = o\{\omega^{-\alpha}\} \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

Если это действительно так, то главная асимптотика функции

$$f(t) = A g(t; \alpha, h) + v(t)$$

совпадает с главной асимптотикой (7) эталонной функции $g(t; \alpha, h)$, помноженной на A , так что Фурье-образ функции $f(t)$ имеет асимптотику

$$\tilde{f}(\omega) = A \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi(i\omega)^\alpha} + o\left\{\frac{1}{\omega^\alpha}\right\} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (14a)$$

Заметим еще, что если функция-оригинал $f(t)$ – левосторонняя, то есть тождественно равна нулю при $t > 0$, а при $t \rightarrow 0-$ имеющая аналогичную (1) асимптотику

$$f(t) \sim A(-t)^{\alpha-1} \quad (t \rightarrow 0-),$$

то асимптотика ее Фурье-образа равна комплексно сопряженной асимптотике (14a) правосторонней функции:

$$\tilde{f}(\omega) = A \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi(-i\omega)^\alpha} + o\left\{\frac{1}{\omega^\alpha}\right\} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (14b)$$

Строгое доказательство высказанных выше утверждений опирается на модификацию уже знакомой леммы Римана-Лебега. Опустив доказательство, ограничимся лишь ее формулировкой:

Пусть функция $v(t)$ непрерывна при $t > 0$ и абсолютно интегрируема на интервале $(0, \infty)$. Предположим далее, что теми же свойствами обладают производные $v(t)$ вплоть до порядка $n = \lfloor \alpha + 1 \rfloor \geq \alpha > 0$. Пусть, кроме того, при $t \rightarrow 0$, функция $v(t)$ и все ее производные до порядка n удовлетворяют асимптотическим соотношениям $v^{(m)} = o\{t^{\alpha-m-1}\}$ ($t \rightarrow 0$). Тогда интеграл

$$\tilde{v}(\omega) = \int_0^\infty v(t)e^{-i\omega t} dt$$

имеет асимптотику $\tilde{v}(\omega) = o\{\omega^{-\alpha}\}$, as $|\omega| \rightarrow \infty$.

Пример 4. Найдем асимптотику Фурье-образа функции

$$f(t) = e^{-|t|^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (15)$$

В отличие от обсужденных выше функций, последняя имеет при $t = 0$ ненулевое значение $f(0) = 1$. Поэтому вспомогательный интеграл

$$\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt$$

имеет главную асимптотику порядка $O\{1/\omega\}$, очевидно отсутствующую у исходной непрерывной функции. Чтобы исключить указанную ложную асимптотику и найти истинную асимптотику Фурье-образа функции (15), обсудим вначале асимптотику Фурье-образа производной функции (15)

$$\dot{f}(t) = -\alpha|t|^{\alpha-1} e^{-|t|^\alpha} \text{sign}(t) . \quad (16)$$

Возьмем вспомогательную функцию, равную нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ определенной равенством

$$v(t) = \dot{f}(t) + \alpha g(t; , \alpha, h) .$$

Легко показать, что последняя удовлетворяет требованиям приведенной выше леммы Римана-Лебега. Следовательно, главная асимптотика, при $|\omega| \rightarrow \infty$, Фурье-образа правосторонней производной $\dot{f}(t)\chi(t)$ описывается соотношением (14а), где $A = -\alpha$. Производная же (16) исходной функции (15) – нечетная функция t . Поэтому асимптотика ее Фурье-образа равна удвоенной мнимой части асимптотики (14а), то есть

$$\tilde{f}(\omega) \sim 2i\alpha \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{2\pi|\omega|^\alpha} \text{sign}(\omega) .$$

Асимптотику Фурье-образа исходной функции (15) найдем делением асимптотики Фурье-образа производной на $i\omega$, что дает

$$\tilde{f}(\omega) \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi|\omega|^{\alpha+1}} . \quad \blacksquare$$

Пример 5. Найдем асимптотику, при $\omega \rightarrow \infty$, Фурье-образа полуокружности, равной нулю вне интервала $t \in (-1, 1)$, и равной $\sqrt{1-t^2}$ внутри этого интервала.

Легко сообразить, что указанная функция-оригинал обладает следующими степенными асимптотиками в окрестности точек $t = \pm 1$

$$f(t) \sim \sqrt{2} \begin{cases} \sqrt{t+1} & \text{для } t \rightarrow -1+ ; \\ \sqrt{1-t} & \text{для } t \rightarrow +1- . \end{cases}$$

Последнее означает, что искомая асимптотика Фурье-образа состоит из двух слагаемых, описываемых асимптотическими соотношениями (14а,б) при $\alpha = 3/2$, $A = \sqrt{2}$, и дополненными множителями $e^{\mp i\omega}$, учитывающими позиции, на оси t , упомянутых степенных асимптотик функции-оригинала

$$\tilde{f}(\omega) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \text{Re} \left[\frac{e^{i\omega}}{(i\omega)^{3/2}} \right] .$$

Выделив действительную часть последнего выражения, и имея в виду, что $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, получим окончательно

$$\tilde{f}(\omega) \sim \frac{\sin |\omega| - \cos \omega}{2\sqrt{\pi|\omega|^3}}. \quad (17)$$

Заметим, что известно точное выражение Фурье-образа полуокружности:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{J_1(\omega)}{2\omega}, \quad (18)$$

где $J_1(\omega)$ – функция Бесселя 1-го рода и 1-го порядка. На рис. 2.12 даны графики точного Фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ полуокружности и ее асимптотики (17). Видно, что они удивительно близки уже при $\omega \gtrsim 2$. Пользуясь физической терминологией, можно объяснить наблюдаемые на графике осцилляции своего рода “интерференцией” Фурье-образов степенных асимптотик функции-оригинала в точках $t = \pm 1$.

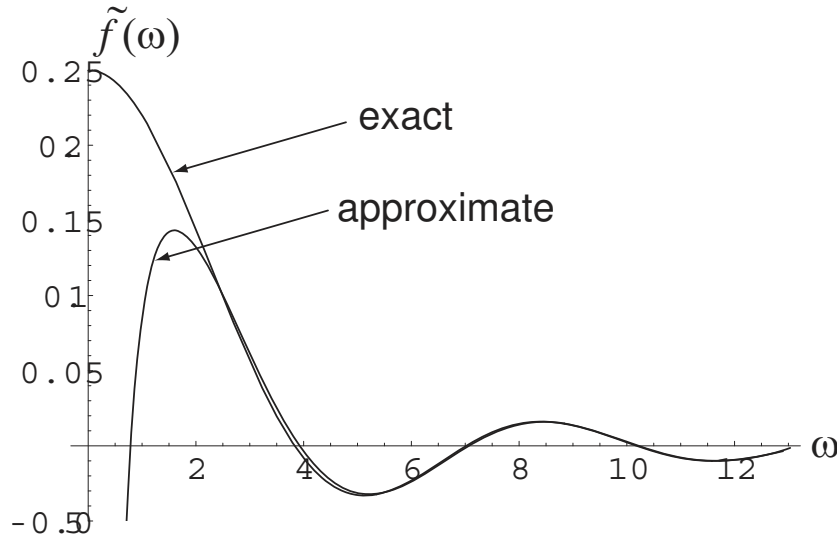


Рис. 2.12. График точного Фурье-образа (18) полуокружности и асимптотики ее Фурье-образа (17) при $\omega \rightarrow \infty$

2.5. Фурье-образ функции Хевисайда

Выше мы нашли Фурье-образ (2.3.6b) функции $g(t; \alpha, h)$ (2.3.6a). В пределе $h \rightarrow 0$ она сходится к правосторонней степенной функции $g(t; \alpha) = t^{\alpha-1} \chi(t)$. Пока $0 < \alpha < 1$, эта функция имеет Фурье-образ (2.3.5), существующий в обычном смысле. Если же $\alpha \geq 1$, обычный Фурье-образ степенной функции $t^{\alpha-1} \chi(t)$ не существует, а Фурье-образ $\tilde{g}(\omega; \alpha, h)$ (2.3.6b)

слабо сходится, при $h \rightarrow 0$, к обобщенному Фурье-образу упомянутой степенной функции.

Детально проследим упомянутую слабую сходимость в простейшем, и в то же время важном для теории и приложений случае $\alpha = 1$. В этом случае соотношения (2.3.6a,b) сводятся к табличной формуле

$$e^{-ht} \chi(t) \quad \mapsto \quad \frac{1}{2\pi(i\omega + h)} . \quad (1)$$

Функция слева здесь сходится, при $h \rightarrow 0$, к функции Хевисайда, не имеющей Фурье-образа в классическом смысле. Найдем ее обобщенный Фурье-образ, вычислив слабый предел Фурье-образа

$$\tilde{g}(\omega; 1, h) = \frac{1}{2\pi(i\omega + h)} \quad (2)$$

при $h \rightarrow 0$. Отделив его реальную и мнимую части, получим

$$\tilde{g}(\omega; 1, h) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{h^2 + \omega^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{\omega}{h^2 + \omega^2} .$$

Нетрудно показать, что первое слагаемое справа в последнем равенстве слабо сходится к $\delta(\omega)/2$. Таким образом, остается вычислить слабый предел, при $h \rightarrow 0$, интеграла

$$I(h) = \int \frac{\omega}{h^2 + \omega^2} \tilde{\phi}(\omega) d\omega , \quad (3)$$

где $\tilde{\phi}(\omega)$ некоторая гладкая и быстро спадающая при $\omega \rightarrow \pm\infty$ функция. Кроме того, в интеграле фигурирует “квази-гипербола”

$$\frac{\omega}{h^2 + \omega^2} . \quad (4)$$

Типичный график сомножителей под интегралом (3) дан на рис. 2.13.

Разделим интеграл (3) на две части

$$I(h) = I_1(h) + I_2(h) ,$$

где

$$I_1(h) = \int_{-h}^h \frac{\omega}{h^2 + \omega^2} \tilde{\phi}(\omega) d\omega$$

и

$$I_2(h) = \left[\int_{-\infty}^{-h} + \int_h^{\infty} \right] \frac{\omega}{h^2 + \omega^2} \tilde{\phi}(\omega) d\omega .$$

Легко показать, что из-за нечетности “квази-гиперболы” (4) и гладкости пробной функции $\tilde{\phi}(\omega)$, первое слагаемое $I_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Можно показать также, что второе слагаемое сходится к

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_2(h) = \lim_{h \rightarrow 0} I(h) = \text{Pv} \int \tilde{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (5)$$

где

$$\text{Pv} \int \tilde{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-h} + \int_h^{\infty} \right] \tilde{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \quad (6)$$

– так называемое *главное значение* расходящегося интеграла

$$\int \tilde{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (7)$$

Из (6) следует, в частности, что можно сосчитать главное значение последнего интеграла, пользуясь его регуляризованной формой

$$\text{Pv} \int \tilde{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\phi}(\omega) - \tilde{\phi}(-\omega)}{\omega} d\omega. \quad (7a)$$

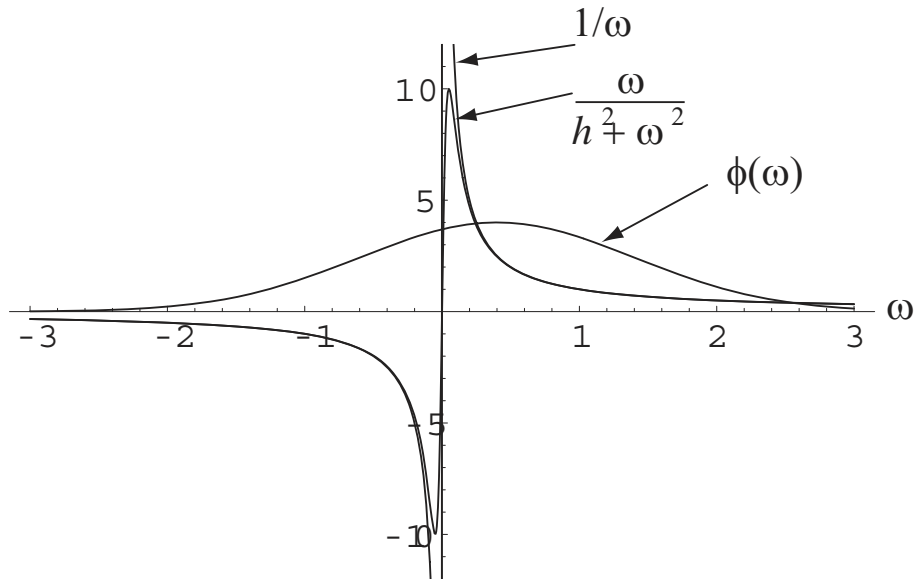


Рис. 2.13. Графики пробной функции $\tilde{\phi}(\omega)$ и “квази-гиперболы” (4) при $h = 0.05$, иллюстрирующие происхождение предела (5)

Таким образом, мы показали, что слабый предел Фурье-образа (2) при $h \rightarrow 0$ равен

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega + h} = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi i} \text{Pv} \frac{1}{\omega}.$$

Здесь принят во внимание тот факт, что главное значение (6) расходящегося интеграла (7) порождает новую сингулярную обобщенную функцию, которую символически обозначают

$$\text{Pv} \frac{1}{\omega} .$$

Ее действие на пробную функцию $\tilde{\phi}(\omega)$ описывается формулой (6).

Обратим внимание читателя на тот факт, что мы вывели еще одну табличную формулу теории обобщенных преобразований Фурье:

$$\chi(t) \quad \mapsto \quad \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi i} \text{Pv} \frac{1}{\omega} .$$

Напомним, действительная часть Фурье-образа действительной функции равна Фурье-образу ее четной компоненты. Поскольку четная компонента функции Хевисайда равна $1/2$, мы приходим к уже знакомой табличной формуле (1.3.2). С другой стороны, имея в виду, что нечетная компонента функции Хевисайда равна $\text{sign}(t)/2$, находим еще одну полезную табличную формулу теории обобщенных преобразований Фурье:

$$\text{sign}(t) \quad \mapsto \quad \text{Pv} \frac{1}{\pi i \omega} . \quad (8)$$

Пример 1. Потребность в вычислении главных значений интегралов возникает в самых различных физических приложениях. Поэтому обсудим один типичный интеграл подобного рода

$$I(x) = \text{Pv} \int e^{-s^2} \frac{ds}{s-x} . \quad (9)$$

Введя новую переменную интегрирования $y = s - x$, будем иметь

$$I(x) = e^{-x^2} J(x) ,$$

где

$$J(x) = \text{Pv} \int e^{-y^2-2xy} \frac{dy}{y} .$$

Дифференцирование последнего равенства по параметру x дает

$$J'(x) = -2 \int e^{-y^2-2xy} dy = -2\sqrt{\pi} e^{x^2} .$$

Учитывая, что $J(0) = 0$, получим

$$I(x) = -2\sqrt{\pi} D(x) ,$$

где

$$D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy$$

– так называемый *интеграл Дайсона*. Таким образом, мы пришли к окончательной формуле

$$\text{Pv} \int e^{-s^2} \frac{ds}{s-x} = -2\sqrt{\pi}D(x) . \quad (10)$$

Заметим напоследок, что при $|x| \rightarrow 0$ справедлива асимптотика $D(x) \sim x$, в то время как при $x \rightarrow \infty$ интеграл Дайсона имеет асимптотику $D(x) \sim 1/2x$. ■

Пример 2. Зная Фурье-образ функции знака $\text{sign}(t)$, можно найти, возникающий в разнообразных физических и инженерных приложениях, Фурье-образ модуля $|t|$. Для этого запишем его в виде:

$$|t| = t \text{sign}(t) ,$$

имея в виду, что Фурье-образы сомножителей в правой части равенства нам известны. Напомним, что $t \rightarrow i\delta(\omega)$, и что Фурье-образ функции $\text{sign}(t)$ задан формулой (8).

Вспомнив еще, что Фурье-образ произведения функций-оригиналов равен свертке Фурье их образов, получим

$$|t| \quad \mapsto \quad i\delta'(\omega) * \frac{1}{\pi} \text{Pv} \left(\frac{1}{i\omega} \right) .$$

После интегрирования по частям интеграла свертки и использования выкалывающего свойства дельта-функции придем отсюда к равенству

$$|t| \quad \mapsto \quad \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\omega} \text{Pv} \left(\frac{1}{\omega} \right) .$$

Выясним, как действует возникшая в правой части последнего соотношения обобщенная функция на пробную функцию $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$. Пользуясь операцией интегрирования по частям, справедливой и для сингулярных обобщенных функций, будем иметь

$$\int \tilde{\phi}(\omega) \frac{d}{d\omega} \text{Pv} \left(\frac{1}{\omega} \right) d\omega = -\text{Pv} \int \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega .$$

Вспомним затем, что главное значение последнего интеграла по определению равно

$$\text{Pv} \int \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega \right] .$$

Применив интегрирование по частям к первому интегралу, получим

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\tilde{\phi}(\omega) - \tilde{\phi}(-\varepsilon)}{\omega^2} d\omega .$$

Аналогично преобразуя второй интеграл, найдем, что

$$\text{Pv} \int \frac{\tilde{\phi}'(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\tilde{\phi}(\omega) - \tilde{\phi}(-\varepsilon)}{\omega^2} d\omega + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}(\omega) - \tilde{\phi}(\varepsilon)}{\omega^2} d\omega \right] .$$

Последний предел определяет новую обобщенную функцию

$$\text{Pv} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) ,$$

Нетрудно показать, что ее действие на пробную функцию $\tilde{\phi}(\omega)$ равно значению, аналогичного (7a), регуляризованного интеграла

$$\text{Pv} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\phi}(\omega) + \tilde{\phi}(-\omega) - 2\tilde{\phi}(0)}{\omega^2} d\omega . \quad (11)$$

С учетом сказанного можно записать еще одну табличную формулу теории обобщенного преобразования Фурье

$$|t| \quad \mapsto \quad -\frac{1}{\pi} \text{Pv} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) . \quad (12)$$

В физических статье и книгах широко используют в некотором роде эквивалентное данной формуле интегральное равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} d\omega = |t| . \quad \blacksquare \quad (13)$$

2.6. Асимптотики интегралов, родственных интегралу Фурье

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^b f(t) e^{-ixp(t)} dt , \quad (1)$$

где $f(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, b]$ функция, такая, что $f(0) = f \neq 0$. Функцию $p(t)$ в показателе экспоненты будем считать дважды непрерывно дифференцируемой в интервале

$(0, b)$ и монотонно возрастающей с положительной производной $\dot{p}(t) > 0$ функцией. В дальнейшем положим для простоты, но без потери общности, что $p(0) = 0$.

Чтобы применить к (1) стандартную схему асимптотического анализа, развитую в предыдущем разделе для интегралов Фурье, перейдем к новой переменной интегрирования $s = p(t)$ и обозначим соответствующую обратную функцию как $t = q(s)$. После этого интеграл (1) примет знакомую форму интеграла Фурье

$$I(x) = \int_0^c F(s) \dot{q}(s) e^{-ixs} ds \quad (q(c) = b), \quad (2)$$

где $F(s) = f(q(s))$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, c]$ функция, такая что $F(0) = f \neq 0$.

Исследуем асимптотическое поведение интеграла $I(x)$ (2) при $x \rightarrow \infty$. Заметим в первую очередь, что производная $\dot{q}(s)$ – также непрерывно дифференцируема в интервале $(0, c)$. Если к тому же она обладает конечным пределом при $s \rightarrow 0$, то последующее изучение асимптотики интеграла $I(x)$ будет копировать асимптотический анализ Фурье-образов функций-оригиналов с разрывами 1-го рода. Более интересен и важен, с точки зрения физических и инженерных приложений, случай функции $p(t)$, имеющей асимптотику

$$p(t) \sim \gamma t^\alpha \quad (t \rightarrow 0) \quad (3)$$

с $\alpha > 0$. Исследуем его более подробно. В данном случае

$$q(s) \sim (s/\gamma)^\beta, \quad \dot{q}(s) \sim \delta s^{\beta-1} \quad (s \rightarrow 0) \quad (4)$$

где $\delta = \beta/\gamma^\beta$ и $\beta = 1/\alpha$.

Степенная асимптотика (4) подынтегрального выражения в (2), а также опыт, накопленный нами в предыдущем разделе, позволяет сделать вывод, что справедлива асимптотическая формула

$$I(x) \sim f \Gamma(\beta) \gamma \left(\frac{1}{ix}\right)^\beta = f \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma ix}\right)^{1/\alpha} \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (5)$$

С другой стороны, если $F(c) = f(b) \neq 0$, то поведение подынтегрального выражения вблизи верхнего предела интеграла (2) дает асимптотику

$$I(x) \sim f(b) \dot{q}(c) \frac{1}{ix} e^{-icx} \quad (x \rightarrow \pm\infty), \quad (5a)$$

спадающую к нулю, при $\alpha > 1$, быстрее асимптотики (5). Таким образом, при $\alpha > 1$, главный вклад в асимптотику интеграла (2) дает выражение

(5). Иначе говоря, возвращаясь к обозначениям исходного интеграла (1), если $\alpha > 1$, то справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-ixp(t)} dt \sim f \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma ix}\right)^{1/\alpha} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (6)$$

Верхний предел здесь намеренно взят равным бесконечности, чтобы подчеркнуть тот факт, что при $\alpha > 1$ главная асимптотика интеграла (1) определяется поведением подынтегральной функции в окрестности нижнего предела.

Перечислим несколько полезных для приложений следствий асимптотического соотношения (6):

- Если функция $p(t)$ – имеет в окрестности некоторой внутренней точки τ ($a < \tau < b$) симметричную степенную асимптотику

$$p(t) \sim \gamma|t - \tau|^\alpha, \quad (7)$$

тогда интеграл

$$\int_a^b f(t)e^{-ixp(t)} dt \quad (8)$$

обладает, при $\alpha > 1$, удвоенной асимптотикой (6):

$$\int_a^b f(t)e^{-ixp(t)} dt \sim 2f(\tau)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma ix}\right)^{1/\alpha} \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (9)$$

- Если $p(t)$ – имеет в окрестности внутренней точки τ асимметричную степенную асимптотику

$$p(t) \sim \gamma|t - \tau|^\alpha \operatorname{sign}(t - \tau),$$

то асимптотика интеграла (8) равна удвоенной реальной части асимптотики (6)

$$\int_a^b f(t)e^{-ixp(t)} dt \sim 2f(\tau)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\gamma ix}\right)^{1/\alpha} \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (10)$$

- На языке теории обобщенных функций равенство (9) означает, что при любом $\alpha > 1$, последовательность функций

$$\frac{e^{-i\gamma|t-\tau|^\alpha}}{2\Gamma(1+1/\alpha)(\gamma ix)^{1/\alpha}}$$

слабо сходится к дельта-функции $\delta(t - \tau)$ при $x \rightarrow \infty$. Частный случай $\alpha = 2$ соответствует уже знакомой фундаментальной последовательности (1.2.4).

- Если $f(t)$ – постоянна, а $p(t) = \gamma t^\alpha$, то асимптотическое соотношение (6) превращается в точное равенство. Положив в нем $f = 1$, $x = 1$, и выделив реальную и мнимую части, придем к табличным интегралам, справедливым при $\alpha > 1$ и $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(\gamma t^\alpha) dt &= \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right), \\ \int_0^\infty \sin(\gamma t^\alpha) dt &= \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

2.7. Метод стационарной фазы

Степенная асимптотика (2.6.7) функции $p(t)$, порождающая (при $\alpha > 1$) асимптотику (2.6.9), может показаться слишком искусственной – выбранной ради удобства математических выкладок. Тем не менее подобные степенные асимптотики совершенно естественно возникают в самых разных прикладных задачах. В первую очередь это относится к частному случаю $\alpha = 2$. Рассмотрим типичную для приложений ситуацию, демонстрирующую универсальность асимптотики (2.6.9) при $\alpha = 2$.

Пусть функция $p(t)$ в интеграле (2.6.8) – дважды непрерывно дифференцируема, а функция $f(t)$ – непрерывно дифференцируема. Оказывается, при этих довольно общих допущениях асимптотическое поведение интеграла (2.6.8) отвечает частному случаю $\alpha = 2$.

Начнем асимптотический анализ (при $x \rightarrow \infty$) интеграла (2.6.8) поиском так называемых *стационарных точек* функции $p(t)$, где выполнено необходимое условие локального экстремума

$$\dot{p}(t) = 0.$$

Пусть τ_m – корни данного уравнения. Предположим, что в этих точках $\ddot{p}(\tau_m) \neq 0$. Тогда функция $p(t)$ ведет себя в окрестности стационарных точек подобно параболе

$$p(t) - p(\tau_m) \sim \gamma(t - \tau)^2, \quad \gamma = \ddot{p}(\tau_m)/2 \neq 0, \quad (1)$$

а сами стационарные точки называют простыми.

Очевидно, если все стационарные точки простые, то интеграл (2.6.8) характеризуется, при $x \rightarrow \infty$, асимптотиками типа (2.5.9), соответствующими значению $\alpha = 2$. График типичной функции $p(t)$, обладающей простыми стационарными точками, изображен на рис. 2.14.

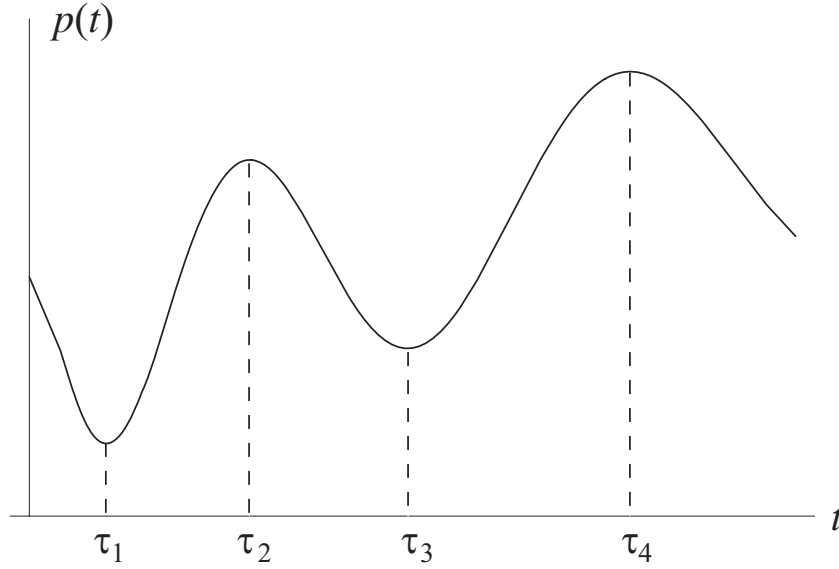


Рис. 2.14. График типичной функции $p(t)$, обладающей простыми стационарными точками

Разобьем интервал интегрирования в (2.6.8) на примыкающие интервалы, каждый из которых содержит одну стационарную точку. В нашем случае $\alpha = 2 > 1$, так что асимптотический вклад граничных точек таких интервалов становится, при $x \rightarrow \infty$, пренебрежимо малым по сравнению с вкладом стационарных точек. Суммируя вклады всех стационарных точек, придем к искомой асимптотической формуле

$$\int_a^b f(t) e^{-ixp(t)} dt \sim \sum_m f(\tau_m) \sqrt{\frac{2\pi}{ix\ddot{p}(\tau_m)}} e^{-ixp(\tau_m)} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Если какие-то из стационарных точек попадают на границы интервала интегрирования в (2.6.8), то соответствующие слагаемые появляются с коэффициентом $1/2$. В случае одной внутренней простой стационарной точки $a < \tau < b$ последняя формула примет вид:

$$\int_a^b f(t) e^{-ixp(t)} dt \sim f(\tau) \sqrt{\frac{2\pi}{ix\ddot{p}(\tau)}} e^{-ixp(\tau)} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Согласно ей, осциллирующая функция

$$\sqrt{\frac{ix\ddot{p}(\tau)}{2\pi}} e^{-ixp(t)} \quad (4)$$

слабо сходится, при $x \rightarrow \pm\infty$, к дельта-функции $\delta(t - \tau)$.

Заметим еще, что описанная выше процедура вывода асимптотической формулы (2) называется *методом стационарной фазы*.

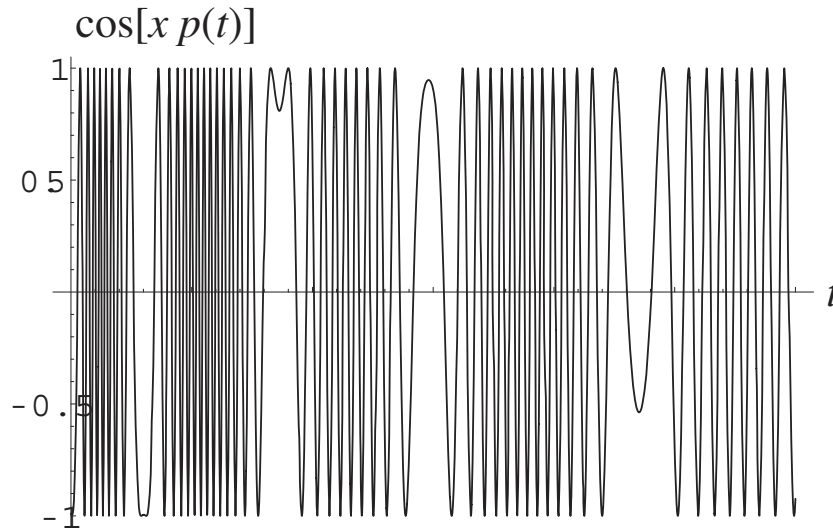


Рис. 2.15. График осциллирующей функции $\cos[xp(t)]$ при большом x , иллюстрирующий “физические корни” метода стационарной фазы (2)

Раскроем, на примере соотношения (4), физические корни метода стационарной фазы, приводящего к асимптотической формуле (2). Это соотношение может быть подкреплено следующими “физическими” рассуждениями: быстрые (при большом $|x|$) колебания функции

$$e^{-ixp(t)}$$

характеризуются *текущей* (зависящей от времени) частотой $\omega(t) = x\dot{p}(t)$ и периодом $T = 2\pi/|\omega|$, убывающим как $1/x$. Если функция $f(t)$ обладает некоторым характерным масштабом θ , тогда, в области интегрирования, где $T \ll \theta$, соседние горбы и впадины подинтегральной функции почти полностью компенсируют друг друга, давая практически нулевой вклад в исследуемый интеграл. И только в окрестности стационарной точки $t = \tau$, где $\omega(\tau) = 0$, указанная компенсация не столь эффективна. В итоге, малая, сжимающаяся с ростом x окрестность стационарной точки τ формирует определяющий вклад в значение интеграла.

На рис. 2.15 дан график функции $\cos[xp(t)]$, при большом x и для функции $p(t)$, изображенной на рис. 2.14. Видно, что в окрестности стационарных точек $\cos[xp(t)]$ осциллирует сравнительно медленно, тем самым обеспечивая справедливость асимптотики (2).

2.8. Функции Ангера и Вебера

Проиллюстрируем обсужденные выше асимптотические формулы на примере хорошо известных в приложениях функций Ангера и Вебера.

Функция Ангера $J_\omega(z)$ и функция Вебера $E_\omega(z)$ определяются (при действительных значениях ω и z) равенством

$$D_\omega(z) = J_\omega(z) - iE_\omega(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-i(\omega\theta - z \sin \theta)} d\theta . \quad (1)$$

Исследуем асимптотические свойства этих функций при больших значениях ω и (или) z . Простейший способ анализа асимптотик этих действительных функций состоит в изучении асимптотик комплексной функции $D_\omega(z)$ (1) и последующем выделении ее действительной и мнимой частей.

Обсудим вначале асимптотическое поведение указанных функций при фиксированном z и при $\omega \rightarrow \infty$. Заметим для этого, что интеграл (1) можно интерпретировать как Фурье-образ функции-оригинала

$$f(\theta) = 2e^{iz \sin \theta} [\chi(\theta) - \chi(\theta - \pi)] ,$$

имеющей два разрыва 1-го рода: $[f(0)] = 2$ и $[f(\pi)] = -2$. Следовательно, с учетом асимптотической формулы (2.1.4), получим

$$D_\omega(z) \sim \frac{1}{\pi i \omega} (1 - e^{i\omega\pi}) , \quad (\omega \rightarrow \infty) .$$

Отделив действительную и мнимую части этого выражения, придем к искомым асимптотикам функций Ангера и Вебера

$$J_\omega \sim \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega\pi} , \quad E_\omega \sim \frac{1 - \cos(\omega\pi)}{\omega\pi} \quad (\omega \rightarrow \infty) . \quad (2)$$

Поменяем местами роли параметров ω и z , исследуя асимптотику функции $D_\omega(z)$ при фиксированном ω , но при $z \rightarrow \infty$. В этом случае главная асимптотика соответствующего интеграла определяется методом стационарной фазы. Легко видеть, что в рассматриваемом случае имеется одна стационарная точка $\theta^* = \pi/2$. Таким образом, привлекая асимптотическое соотношение (2.7.3), будем иметь

$$D_\omega(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{\pi}{4} (2\omega + 1) \right) \right] \quad (z \rightarrow \infty) . \quad (3)$$

Выше мы исследовали асимптотики функций Ангера и Вебера вдоль осей ω и z плоскости (ω, z) . Зададимся вопросом – что происходит в

оставшейся части плоскости? Чтобы ответить на него, пойдём вдоль лучей $z = \rho\omega$, где ρ – некоторая константа. Для этого перепишем интеграл (1) в форме

$$D_\omega(\rho\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-i\omega p(\theta)} d\theta, \quad (4)$$

где

$$p(\theta) = \theta - \rho \sin \theta. \quad (5)$$

График этой функции изображен на рис. 2.16.

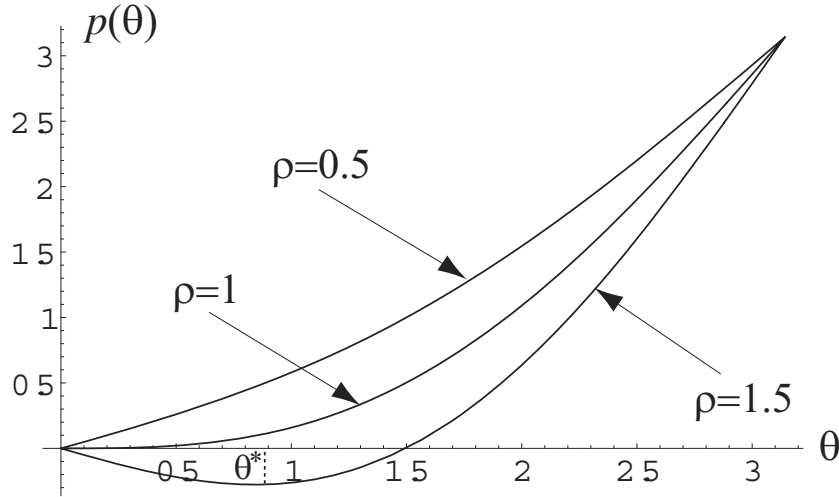


Рис. 2.16. График функции $p(\theta)$ (5) для различных значений параметра ρ

Начнем вычисления со случая $0 < \rho < 1$. Здесь функция $p(\theta)$ строго монотонна, так что существует строго монотонная и гладкая обратная функция $\theta = q(s)$. Соответственно, удобно переписать интеграл (1) в привычной нам форме интеграла Фурье

$$D_\omega(\rho\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(s) e^{-i\omega s} ds,$$

где

$$f(s) = 2\dot{q}(s)[\chi(s) - \chi(s - \pi)].$$

Данная функция имеет два разрыва 1-го рода

$$[f(0)] = 2\dot{q}(0) = \frac{2}{\dot{p}(0)} = \frac{2}{1-\rho}, \quad [f(\pi)] = -2\dot{q}(\pi) = -\frac{2}{\dot{p}(\pi)} = -\frac{2}{1+\rho}.$$

Таким образом, согласно (2.1.4), приходим к асимптотической формуле

$$D_\omega(\rho\omega) \sim \frac{1}{\pi i \omega} \left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{e^{-i\omega\pi}}{1+\rho} \right). \quad (6)$$

Она естественным образом обобщает формулы (2), вытекающие из (6) при $\rho = 0$.

Перейдем к обсуждению случая $\rho = 1$. Заметим, что в этом случае функция $p(\theta)$ (5) монотонно возрастает на всем интервале интегрирования $\theta \in (0, \pi]$ и имеет в окрестности точки $\theta = 0$ степенную асимптотику

$$p(\theta) \sim \theta^3/6 \quad (\theta \rightarrow 0) .$$

Следовательно, здесь применима асимптотическая формула (2.6.6), при $\alpha = 3$, $f = 1/\pi$, $x = \omega$ и $\gamma = 1/6$:

$$D_\omega(\omega) \sim \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6}{i\omega}} = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6}{|\omega|}} [\sqrt{3} - i \operatorname{sign}(\omega)] . \quad (7)$$

Графики ее действительной части, то есть асимптотики функции Ангера $J_\omega(\omega)$, а также самой этой функции, даны на рис. 2.17. Осцилляции функции Ангера объясняются влиянием асимптотики (2.6.5а), учитывающим вклад верхнего предела в значение интеграла (1).

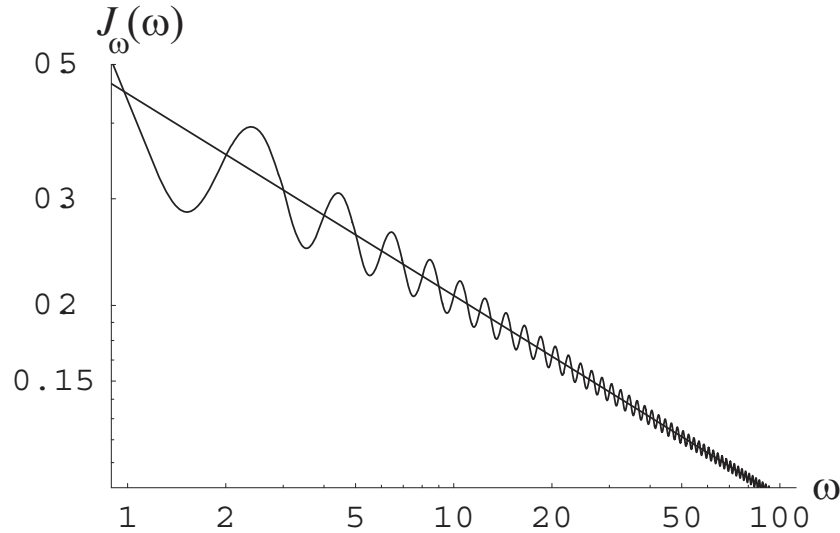


Рис. 2.17. График функции Ангера $J_\omega(\omega)$ (осциллирующая кривая) и ее асимптотики (7)

Завершим обсуждение асимптотических свойств функции $D_\omega(z)$ (1) анализом случая $z = \rho\omega$, где $\rho > 1$. Функция $p(\theta)$ (5) имеет простую стационарную точку θ^* , такую, что $\rho \cos \theta^* = 1$. Другими словами, здесь можно использовать асимптотическую формулу (2.7.3) метода стационарной фазы, где теперь

$$p(\theta^*) = \theta^* - \tan \theta^* , \quad \ddot{p}(\theta^*) = \tan \theta^* , \quad \rho \cos \theta^* = 1 .$$

В итоге находим

$$D_\omega(\rho\omega) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega \tan \theta^*}} e^{i[\omega(\tan \theta^* - \theta^*) - \pi/4]} . \quad (8)$$

Указанные асимптотические свойства функции $D_\omega(\rho\omega)$ (4) заслуживают дополнительного обсуждения с физической точки зрения. Объединяя равенства (6), (7) и (8), получим, что

$$D_\omega(\rho\omega) \sim A(\rho)\omega^{-g(\rho)}$$

где

$$g(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq \rho < 1; \\ 1/3, & \text{if } \rho = 1; \\ 1/2, & \text{if } \rho > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, функция $g(\rho)$, равная показателю степени в асимптотиках функции $D_\omega(\rho\omega)$ (4), испытывает скачок при переходе через точку $\rho = 1$. Другими словами, бесконечно малое изменение параметра ρ приводит к качественным изменениям асимптотики интеграла (1). Такого рода скачки степеней носят в физике название *фазовых переходов*. Они характерны, к примеру, для явлений испарения и кристаллизации, когда малые изменения температуры (или других физических параметров) влекут за собой значительные изменения свойств материальных тел.

2.9. Дробные производные

В современных задачах часто возникает потребность вычисления дробных производных различных функций. По этой причине мы обсудим в данном разделе операцию *дифференцирования дробного порядка*. Чтобы определить операцию дробного дифференцирования напомним, что Фурье-образ производной n -го порядка функции-оригинала $g(t)$ равен $(i\omega)^n \tilde{g}(\omega)$, где n – натуральное число. Естественно определить производную дробного порядка ($\alpha > 0$) некоторой функции-оригинала $g(t)$, как функции $g^{(\alpha)}(t)$, чей Фурье-образ равен

$$(i\omega)^\alpha \tilde{g}(\omega) \quad (\alpha > 0) . \quad (1)$$

Чтобы найти для некоторой функции $g(t)$ ее дробную производную, запишем порядок α дробной производной в виде:

$$\alpha = n - \gamma , \quad (2)$$

где $n = [\alpha]$ – наименьшее целое, большее или равное α , а γ – дробная часть α . Иначе говоря

$$n - 1 < \alpha \leq n, \quad \gamma = n - \alpha, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (3)$$

Соответственно, перепишем (1) в виде:

$$(i\omega)^\alpha \tilde{g}(\omega) = (i\omega)^n [(i\omega)^{-\gamma} \tilde{g}(\omega)] .$$

Отсюда и из общих свойств преобразования Фурье, изложенных в главе 1, следует, что дробная производная функции $g(t)$ порядка α равна

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} [k_\gamma(t) * g(t)] , \quad (4)$$

где $k_\gamma(t)$ – функция-оригинал, соответствующая Фурье-образу

$$\tilde{k}_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi(i\omega)^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1 .$$

Из табличной формулы (2.3.5) находим, что

$$k_\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \chi(t)$$

– так называемое ядро оператора интегрирования I^γ дробного порядка γ . Следовательно, равенство (4) переходит в

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I^\gamma g(t)] \quad (5)$$

или в эквивалентной форме

$$g^{(\alpha)}(t) = I^\gamma g^{(n)}(t), \quad \alpha = n - \gamma .$$

В частном случае $0 < \alpha < 1$ дробная производная функции $g(t)$ равна

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\dot{g}(s)}{(t - s)^\alpha} ds \quad (0 < \alpha < 1) . \quad (6)$$

Графики дробных производных треугольной функции

$$g(t) = (1 - |t - 1|)\chi(1 - |t - 1|) \quad (7)$$

изображены на рис. 2.18.

Заметим в заключение, что в то время, как обычные производные $g^{(n)}(t)$ целого порядка n – локальны в том смысле, что зависят лишь от значений исходной функции $g(t)$ в бесконечно малой окрестности точки дифференцирования t , то дробные (не целые) производные являются *нелокальными операторами*, поскольку величина $g^{(\alpha)}(t)$ зависит от значений исходной функции $g(\tau)$ при всех $\tau < t$, как это хорошо видно из графиков справа на рис. 2.18.

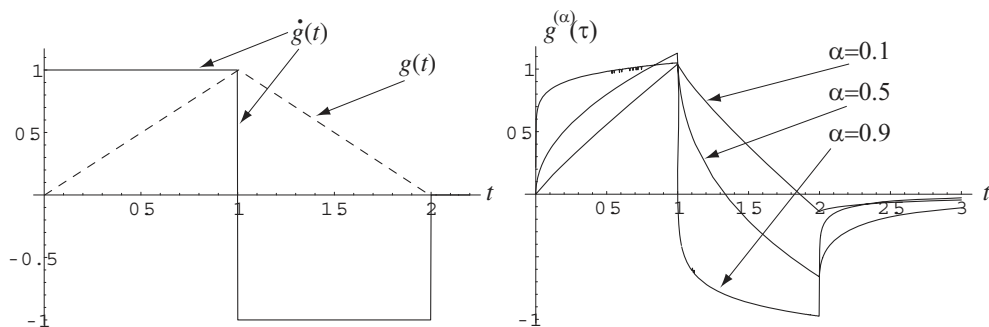


Рис. 2.18. Слева: график треугольной функции $g(t)$ (штриховая линия) и ее 1-й производной (сплошная линия). Справа: графики дробных производных треугольной функции для $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$. Видно, что форма дробной производной порядка $\alpha = 0.1$ напоминает исходную треугольную функцию $g(t)$, в то время как дробная производная порядка $\alpha = 0.9$ близка к $\dot{g}(t)$

Глава 3

Расходящиеся ряды и интегралы

Изложенная в предыдущих главах теория обобщенных функций перекликается с теорией суммирования расходящихся рядов и интегралов. Иллюстрацией этому служит знакопеременный ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

На первый взгляд кажется бессмысленным приписывать этому ряду то или иное конкретное значение. Тем не менее математики предлагают методы обобщенного суммирования, согласно которым данный ряд равен $1/2$. При этом оказывается, что подобные значения не противоречат интуиции физиков, которые иногда сталкиваются с расходящимися рядами в своих вычислениях. В данной главе мы научимся суммировать указанный выше, и даже более странные на первый взгляд, расходящиеся ряды и интегралы. Кроме того, обобщенные методы суммирования помогут нам при суммировании медленно сходящихся рядов и интегралов.

3.1. Метод Абеля

Приступим к знакомству с методами суммирования расходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m . \quad (1)$$

Мы уже знакомы с наиболее известным примером такого ряда, где $a_m = (-1)^m$.

Основная идея, лежащая в основе методов обобщенного суммирования, содержится в “довольно невинной” теореме Абеля:

Если ряд (1) сходится к величине S то, для $0 < q < 1$, родственанный ряд

$$S(q) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m \quad (2)$$

также сходится, и кроме того,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} S(q) = S . \quad (3)$$

Иногда оказывается, что ряд (1) расходится, в то время как ряд (2) сходится для любого $0 < q < 1$, а его сумма $S(q)$ имеет конечный предел при $q \rightarrow 1^-$. В таком случае величину S , равную пределу (3), называют *обобщенной суммой* ряда (1) в смысле Абеля – Пуассона. Часто описанный подход к суммированию расходящихся рядов называют *методом суммирования Абеля*, хотя Абель не занимался теорией обобщенного суммирования.

Пример 1. В случае ряда

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (4)$$

вспомогательный ряд (2) равен

$$S(q) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m = \frac{1}{1+q} , \quad |q| < 1 . \quad (5)$$

При $q \rightarrow 1^-$, функция $S(q)$ имеет ограниченный предел $1/2$, что приводит к уже знакомому равенству

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1/2 . \quad (6)$$

■

Обсудим физическую аргументацию в пользу метода Абеля суммирования расходящихся рядов. Он согласуется с физическим принципом *предельно слабого поглощения*. Последний утверждает, что любой физический процесс подвержен, пусть предельно слабому, поглощению, как например колебания маятника, амплитуда которых с течением времени стремится к нулю. С этой точки зрения множитель q^m при m -том слагаемом сумм (2), (4) учитывает (предельно слабое при $q \rightarrow 1$) поглощение.

Кроме метода Абеля, имеется много других методов суммирования расходящихся рядов. С некоторыми из них мы познакомимся ниже. Математики требуют, чтобы подобные методы удовлетворяли условиям регулярности и линейности. Метод называют *регулярным* если он приписывает любому сходящемуся ряду его действительную сумму S . Метод называют *линейным*, если обобщенная сумма ряда $\sum (pa_m + qb_m)$ равна $pS + qT$, где S и T – обобщенные суммы рядов $\sum a_m$ и $\sum b_m$. Заметим, что регулярность метода Абеля вытекает из одноименной теоремы. Линейность этого метода очевидна.

Пример 2. Вычислим, опираясь на метод Абеля, обобщенную сумму ряда

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \quad (7)$$

Для этого просуммируем сходящийся (при $|q| < 1$) вспомогательный ряд

$$S(q) = - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m q^m .$$

Очевидно,

$$S(q) = -q \frac{d}{dq} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m \right) = -q \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1+q} \right) = \frac{q}{(1+q)^2} .$$

Таким образом, имеем

$$S = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q}{(1+q)^2} = \frac{1}{4} ,$$

или

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4} . \quad (8)$$

■

Полезно отметить, что не всякий расходящийся ряд имеет конечную обобщенную сумму. К примеру сумма ряда $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ равна бесконечности, как бы мы его не суммировали – методом Абеля или иным методом обобщенного суммирования. По этой причине расходящиеся ряды со знакопередающимися слагаемыми, имеющие конечную обобщенную сумму, иногда называют *полусходящимися рядами*.

Пример 3. Заметим, однако, что не всякий регулярный и линейный обобщенный метод суммирования дает одинаковое значение суммы того или иного расходящегося ряда. Покажем это на примере следующего метода обобщенного суммирования

$$S(\alpha) = \lim_{q \rightarrow 1^-} S(q, \alpha) . \quad (9)$$

Здесь

$$S(q, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m(q, \alpha) , \quad (10)$$

а величины $q_m(q, \alpha)$ задаются равенствами

$$q_{2m} = q^{2m} , \quad q_{2m+1} = q^{2m} q^\alpha . \quad (11)$$

В частности, при $\alpha = 1$, мы приходим здесь к стандартному методу суммирования Абеля. Регулярность и линейность метода (9)-(11) легко доказать. Просуммируем с помощью этого метода ряд (4). В этом случае, при любом α и при $q < 1$, ряд (10) сходится абсолютно, так что можно переставлять местами слагаемые и переписать ряд в виде:

$$S(q, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{2m} - q^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} q^{2m} .$$

Суммируя по отдельности геометрические прогрессии в правой части последнего равенства, после несложных преобразований получим

$$S(q, \alpha) = \frac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^2} .$$

Вычислив предел (10) (например с помощью правила Лопиталя), получим окончательно

$$S(\alpha) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^2} = \frac{\alpha}{2} .$$

Последнее означает, что, согласно правилу суммирования (9)-(10), можно приписать ряду (4) любое значение $S \in (-\infty, \infty)$. ■

Последний пример подсказывает, что для того, чтобы методы обобщенного суммирования приводили к одинаковой у каждого расходящегося ряда сумме, надо наложить на эти методы, помимо условий регулярности и линейности, некоторое дополнительное условие. В качестве этого условия возьмем *условие разделения масштабов*. Грубо говоря, оно требует, чтобы масштаб (по индексу суммирования m) “предельно слабого поглощения” был много больше характерного масштаба изменения, с ростом m , слагаемых исходного знакопеременного ряда. Более аккуратно мы сформулируем условие разделения масштабов ниже.

3.2. Метод Чезаро

Другой подход к суммированию расходящихся рядов, известный как *метод Чезаро*, опирается на *арифметические средние*

$$A_0 = S_0 , \quad A_1 = \frac{S_0 + S_1}{2} , \dots , \quad A_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n + 1} , \dots \quad (1)$$

частичных сумм

$$S_n = \sum_{m=0}^n a_m \quad (2)$$

исходного ряда (3.1.1), и исследованию сходимости средних (1). В данном контексте арифметические средние (1) иногда называют средними Чезаро. Очевидно, если последовательность S_n сходится при $n \rightarrow \infty$, то и средние Чезаро A_n – сходятся к тому же пределу. Иногда, однако, средние A_n сходятся, даже если частичные суммы S_n расходятся. В таких случаях говорят, что расходящийся ряд (3.1.1) *суммируем по Чезаро*, а предел последовательности A_n называют *обобщенной суммой* ряда (3.1.1) *в смысле Чезаро*.

В простейшем случае ряда $\sum \pm 1$, который мы используем для тестирования методов обобщенного суммирования, частичные суммы равны $S_{2n} = 1$, $S_{2n+1} = 0$ и не имеют предела с другой стороны, как нетрудно сообразить, средние Чезаро равны

$$A_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad A_{2n+1} = \frac{1}{2},$$

так что $A_n \rightarrow 1/2$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, метод суммирования Чезаро привел к тому же результату, что и метод Абеля.

Имеется еще одна удобная форма записи метода суммирования Чезаро. Чтобы прийти к ней, подставим в выражения для средних Чезаро A_n (1) частичные суммы (2) и перепишем A_n в форме

$$A_n = \sum_{m=0}^n a_m \left(1 - \frac{m}{n+1}\right).$$

В свою очередь, последнее выражение равно

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi(\gamma m), \quad (3)$$

где

$$\psi(x) = (1-x)\chi(1-x) \quad (4)$$

и $\gamma = 1/(n+1)$. Последнее позволяет переформулировать метод суммирования Чезаро следующим образом: *Обобщенная сумма Чезаро расходящегося ряда (3.1) равна*

$$S = \lim_{\gamma \rightarrow 0} S(\gamma), \quad S(\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi(\gamma m), \quad (5)$$

где *материнская функция суммирования* $\psi(x)$ задается выражением (3).

Подчеркнем, практически все обобщенные методы суммирования можно записать в форме (5). Отличаются они лишь видом материнской функции $\psi(x)$. К примеру, мы вернемся к методу Абеля, взяв

$$\psi(x) = e^{-x} \quad (6)$$

и заметив, что (5), (6) преобразуется (3.1.2) при $\gamma = -\ln q$. Графики наиболее известных материнских функций $\psi(x)$ обобщенного суммирования – Чезаро (4) и Абеля (5) – изображены на рис. 3.1.

Заметим еще, что если метод суммирования Абеля удобен в аналитических выкладках, то метод Чезаро более приспособлен для численных расчетов. В самом деле, в то время, как метод Абеля оставляет число слагаемых ряда бесконечным, метод Чезаро сводится (при $\gamma > 0$) к суммированию конечного числа слагаемых, как это и требуют методы численного суммирования.

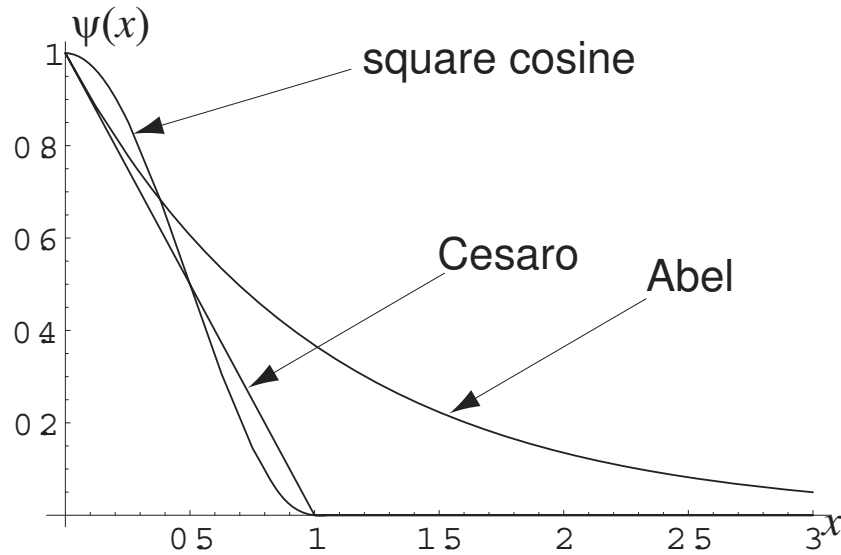


Рис. 3.1. График материнской функции процедуры обобщенного суммирования (5): Чезаро (4), Абеля (6) и квадрата косинуса (7)

Методы суммирования, выраженные соотношениями (5), где материнская функция $\psi(x)$ удовлетворяет сформулированным ниже условиям, удовлетворяют методу разделения масштабов. В данном контексте он означает, что чем ближе γ к нулю, тем медленнее, с ростом индекса суммирования m , меняется в сумме (5) множитель $\psi(\gamma x)$.

В общем случае будем требовать, чтобы материнская функция удовлетворяла условиям:

- Для выполнения условия регулярности необходимо, чтобы выполнялось “условие нормировки” $\psi(0) = 1$.
- Чтобы иметь возможность суммировать “все более и более расходящиеся ряды”, материнская функция должна быть быстро спада-

ющей, то есть такой, чтобы для “достаточно большого” k выполнялось предельное равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \psi(x) = 0 .$$

- Материнская функция должна быть непрерывной и достаточно гладкой. В дальнейшем мы убедимся, что чем более гладкая материнская функция, тем “большей мощностью” обладает соответствующий метод суммирования.

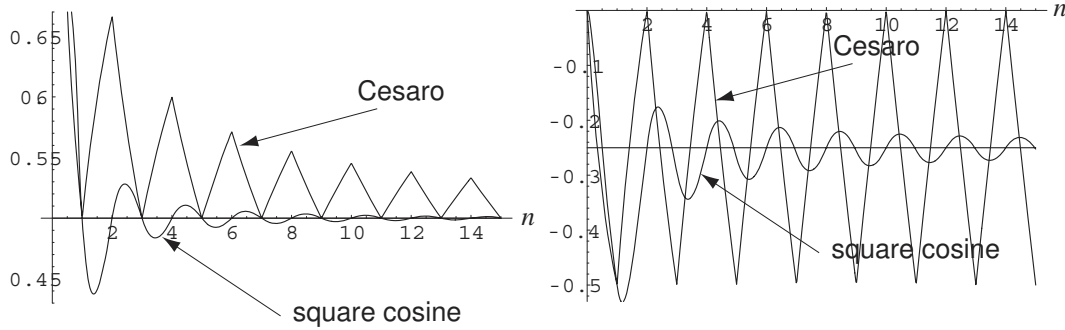


Рис. 3.2. Графики суммы $S(\gamma)$ (5), для $\gamma = 1/(n+1)$, как функции индекса суммирования n , для Чезаро (4) и квадрата косинуса (7) материнских функций. Слева: Суммирование расходящегося ряда (3.1.4). Справа: Суммирование ряда (3.1.7)

Пример 1. Проиллюстрируем практическую важность последнего требования гладкости материнской функции, сравнив результаты суммирования рядов (3.1.4) и (3.1.8) как предела (5), для $\gamma = 1/(n+1)$ и двух разных материнских функций. Первая из них – материнская функция Чезаро (4). В качестве второй материнской функции возьмем заимствованный из раздела 2.2 квадрат косинуса

$$\psi(x) = \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \chi(1-x) . \quad (7)$$

На рис. 3.2 даны графики зависимости $S(\gamma)$ (5), $\gamma = 1/(n+1)$, от числа слагаемых n для знакопеременного ряда (3.1.4) (графики слева), и ряда (3.1.7) (графики справа). Видно, что в случае ряда (3.1.4) гладкая материнская функция (7) дает более быструю сходимость к значению обобщенной суммы $S = 1/2$, чем метод Чезаро. Более того, для “более расходящегося” ряда (3.1.7) метод Чезаро терпит фиаско, в то время как метод суммирования с материнской функцией (7) обеспечивает сходимость с ростом n к значению обобщенной суммы $S = -1/4$.

3.3. Ряд комплексных экспонент

Многие важные проблемы теории расходящихся и слабо сходящихся рядов удается решить после детального анализа ряда, слагаемыми которого служат комплексные экспоненциальные функции

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} . \quad (1)$$

Здесь $z = x + iy$. При $y > 0$ ряд сходится абсолютно, а его сумма равна

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} = \frac{1}{1 - e^{iz}} . \quad (2)$$

Кроме того, абсолютная сходимость ряда (1) при $y > 0$, обеспечивает справедливость, полученной почленным дифференцированием членов ряда (1), формулы

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^n e^{imz} = (-1)^n \frac{d^n}{dy^n} \left(\frac{1}{1 - e^{iz}} \right) ,$$

справедливой при любых натуральных $n = 1, 2, \dots$. Если при $y \rightarrow 0+$ правые части последних равенств сходятся к ограниченным значениям, то их принимают за обобщенные суммы соответствующих расходящихся рядов, возникающих в левой части равенства. К примеру, положив $x = \pi$, получим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} = (-1)^n H^{(n)}(0) ,$$

где

$$H(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{y}{2} \right) .$$

Разложение в ряд Тейлора гиперболического тангенса известно и равно

$$\frac{1}{2} \tanh \left(\frac{y}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{(2n)!} B_{2n} y^{2n-1} , \quad |y| < \pi ,$$

где B_n – так называемые *числа Бернулли*. Обычно их определяют как коэффициенты ряда Тейлора функции

$$\frac{x}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \coth \left(\frac{x}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} .$$

В частности,

$$B_0 = 1 , \quad B_1 = -\frac{1}{2} , \quad B_2 = \frac{1}{6} , \quad B_3 = B_5 = \dots 0 , \quad B_4 = -\frac{1}{30} \dots$$

Таким образом, мы приходим к следующим табличным формулам обобщенного суммирования расходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^{2n} = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n} B_{2n}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

При $n = 1$ (3) дает равенство (3.1.6), а при $n = 2$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m^3 = 1 - 8 + 27 - 64 + \dots = -\frac{1}{8}.$$

3.4. Суммирование расходящихся интегралов

После очевидной модификации, обсужденные выше методы обобщенного суммирования рядов могут быть применены к суммированию расходящихся интегралов. Возьмем, к примеру, расходящийся интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \sin t \, dt. \quad (1)$$

Следуя идее суммирования Абеля, рассмотрим вспомогательный сходящийся интеграл

$$I(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sin t \, dt \quad (2)$$

и определим обобщенное значение интеграла (1) как предел

$$I = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\gamma). \quad (3)$$

Несложные вычисления дают

$$I(\gamma) = \frac{1}{1 + \gamma^2} \quad \text{так что} \quad I = 1. \quad (4)$$

Можно интерпретировать этот результат в духе равенства (3.1.6), разбив интеграл (1) на ряд, составленный из интегралов по отрезкам $[m\pi, (m+1)\pi]$, внутри которых значения синуса имеют одинаковый знак. При этом интеграл (1) превратится в ряд (3.1.1), где

$$a_m = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \sin t \, dt = 2(-1)^m.$$

В итоге получаем

$$\int_0^{\infty} \sin t \, dt = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1.$$

Пример 1. Рассмотрим расходящиеся интегралы

$$C(\alpha, \omega) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cos(\omega t) dt, \quad S(\alpha, \omega) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \sin(\omega t) dt. \quad (5)$$

Легко найти их обобщенные значения, применив метод суммирования Абеля. Покажем это, вычислив вспомогательный, абсолютно сходящийся, несобственный интеграл

$$C(\alpha, \omega, \gamma) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) dt.$$

Его значение известно и равно

$$C(\alpha, \omega, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha, \omega) \cos[\alpha \kappa(\nu)]}{(\omega^2 + \gamma^2)^{\alpha/2}}.$$

Здесь

$$\kappa = \arctan \nu, \quad \nu = \omega/\gamma.$$

Таким образом,

$$C(\alpha, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C(\alpha, \omega, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}{|\omega|^\alpha} \quad (\omega \neq 0). \quad (6)$$

Аналогично нетрудно вывести равенство

$$S(\alpha, \omega) = \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{|\omega|^\alpha} \operatorname{sign}(\omega) \quad (\omega \neq 0). \quad (7)$$

Образно выражаясь, соотношения (5) и (6) описывают, при $\alpha \geq 1$, “несингулярные части” сингулярных обобщенных Фурье-образов степенных функций. К примеру, при $\alpha = 1$ из (6) следует, что

$$C(\alpha = 1, \omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) dt \equiv 0.$$

С другой стороны, тот же интеграл, трактуемый как обобщенное преобразование Фурье, равен обобщенному Фурье-образу постоянной функции $f(t) = \pi$. Напомним, согласно (1.3.2), указанный обобщенный Фурье-образ равен $\pi\delta(\omega)$.

Аналогично, интеграл $S(1, \omega)$ (7) равен

$$S(1, \omega) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\omega}, \quad (8)$$

и может быть интерпретирован как классическая версия обобщенного Фурье-образа функции-оригинала $\pi \operatorname{sign}(t)$, (сравните с табличной формулой (2.5.8)). ■

Применим метод суммирования Абеля к обратному интегралу Фурье (1.2.6), заменив его на

$$f(t, \gamma) = \int \tilde{f}(\omega) \psi(\gamma|\omega|) e^{i\omega t} d\omega . \quad (9)$$

В частном случае обобщенного Фурье-образа (1.3.4) дельта-функции имеем

$$\delta(t, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\gamma|\omega|) e^{i\omega t} d\omega . \quad (10)$$

Если $\psi(x)$ – достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, то последний интеграл сходится и определяет некоторую гладкую функцию $\delta(t, \gamma)$, слабо сходящуюся при $\gamma \rightarrow 0$ к дельта-функции.

В общем случае правая часть равенства (9) равна свертке функции-оригинала $f(t)$ и функции $\delta(t, \gamma)$ (10):

$$f(t, \gamma) = f(t) * \delta(t, \gamma) . \quad (11)$$

Пример 2. Иногда, вместо описанной выше процедуры суммирования (9), пользуются простым *усечением пределов*, заменяя интеграл (1.2.6) на

$$f_{\Omega}(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12)$$

и выбирая Ω – достаточно большим. С позиций формулы (9) это сводится к выбору материнской функции

$$\psi(x) = \chi(1 - x) .$$

и замене γ на $1/\Omega$. В итоге имеем

$$\delta(t, \gamma) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t} .$$

Напомним – это уже знакомая нам функция (1.2.9), слабо сходящаяся к дельта-функции при $\Omega \rightarrow \infty$. ■

Воспользуемся процедурой усечения пределов для восстановления функции знака $\text{sign}(t)$ по ее обобщенному Фурье-образу (2.4.8). В этом случае интеграл (12) принимает вид:

$$\text{sign}_{\Omega}(t) = \frac{1}{\pi i} \text{Pv} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega .$$

Перепишем последний интеграл в более удобной для анализа форме

$$\text{sign}_{\Omega}(t) = 2g(\Omega t) , \quad (13)$$

где

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \text{Si}(z) , \quad (14)$$

и

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx$$

– так называемый *интегральный синус*. График функции $\text{sign}_\Omega(t)$, аппроксимирующей указанным выше способом функцию знака, изображен на рис. 3.3. ■

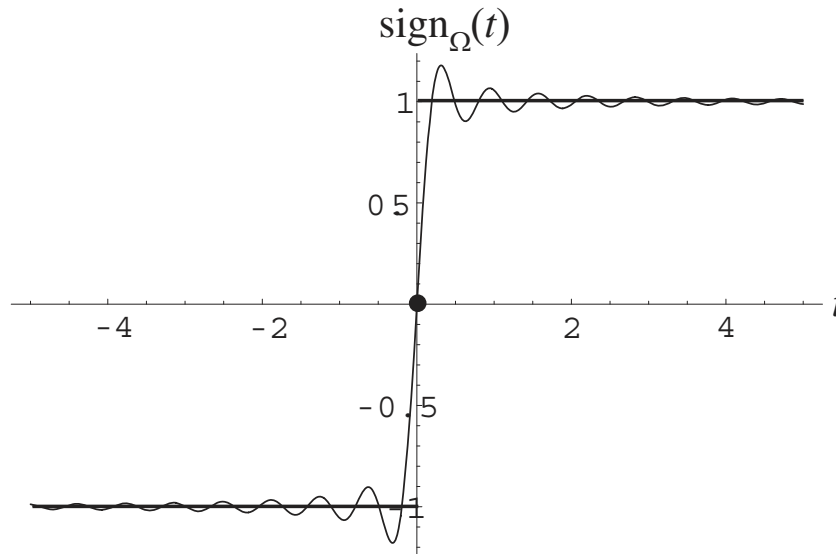


Рис. 3.3. График функции $\text{sign}_\Omega(t)$ (13), аппроксимирующей функцию знака, при $\Omega = 10$

Заметим, что график на рис. 3.3 иллюстрирует общий эффект, возникающий при усечении пределов обратных интегралов Фурье (а также рядов Фурье), для функций-оригиналов, обладающих разрывами 1-го рода. Опишем упомянутый эффект более подробно, для чего предположим, что некоторая кусочно-непрерывная функция $f(t)$ имеет скачок в точке $t = \tau$. В малой окрестности точки разрыва функция достаточно аккуратно описывается следующей асимптотической формулой

$$f(t) \sim f_+(\tau) + \frac{1}{2}[f(\tau)]\text{sign}(t - \tau) .$$

Здесь

$$f_+(\tau) = \frac{1}{2}[f(\tau + 0) + f(\tau - 0)] , \quad [f(\tau)] = [f(\tau + 0) - f(\tau - 0)] .$$

Соответственно, при достаточно большом Ω , функция $f_\Omega(t)$ (12) описывается, в окрестности точки τ , приближенным выражением

$$f_\Omega(t) \simeq f_+(\tau) + [f(\tau)]g(\Omega t) .$$

Легко показать, что $g(z)$ (14) – нечетная функция и достигает своего максимального значения при $z = \pi$: $g(\pi) \simeq 0.59$. Соответственно, при больших значениях Ω , на расстоянии π/Ω слева и справа от точки разрыва функции $f(t)$, график функции $f_\Omega(t)$ имеет резкие выбросы вверх и вниз, так что максимальное отклонение функции $f_\Omega(t)$ от исходной функции $f(t)$ в окрестности скачка равно

$$f_\Omega\left(\tau + \frac{\pi}{\Omega}\right) - f_\Omega\left(\tau - \frac{\pi}{\Omega}\right) \simeq 2[f(\tau)]g(\pi) \simeq 1.18[f(\tau)] .$$

Такого рода аномальное поведение функции $f_\Omega(t)$ в окрестности точек скачков исходной функции $f(t)$ называют *явлением Гиббса*. Оно возникает в инженерных приложениях, когда пытаются восстановить исходную скачкообразную функцию $f(t)$, зная ее Фурье-образ лишь в конечной полосе частот. Чтобы избавиться от такого нежелательного явления, часто используют методы, аналогичные описанным выше методам обобщенного суммирования расходящихся интегралов и рядов.

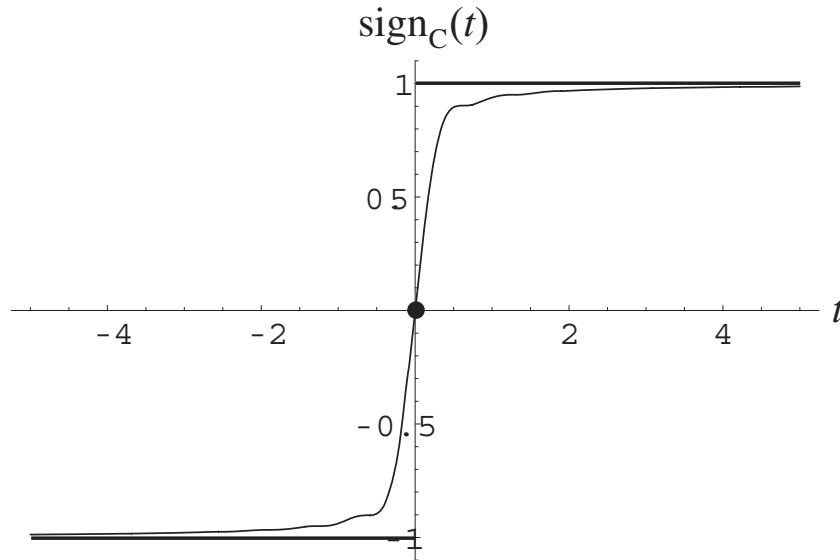


Рис. 3.4. График аппроксимации (15) функции знака, полученной методом суммирования Чезаро, при $\Omega = 10$

Пример 3. Продемонстрируем эффективность применения методов обобщенного суммирования для устранения явления Гиббса, подставив в

(10) материнскую функцию Чезаро $\psi(x)$ (3.2.4) при $\gamma = 1/\Omega$. В итоге будем иметь

$$\text{sign}_C(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1 - \frac{|\omega|}{\Omega}\right) \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Это дает, применительно к функции знака $\text{sign}(t)$ (2.4.8), ее Чезаро аппроксимацию

$$\text{sign}_C(t) = 2g_C(\Omega t) . \quad (15)$$

Здесь

$$g_C(x) = \frac{1}{\pi} \left(\text{Si}(x) + \frac{\cos x - 1}{x} \right) .$$

График аппроксимирующей функции Чезаро (15) для того же значения Ω , что и на рис. 3.3, дан на рис. 3.4. Сравнение графиков на рис. 3.3 и рис. 3.4 показывает, что суммирование Чезаро эффективно устраняет явление Гиббса. ■

3.5. Формула суммирования Пуассона

Ограниченный набор элементарных, и даже специальных функций ведет к тому, что аналитические решения тех или иных физических и инженерных проблем могут быть записаны лишь в форме бесконечных рядов. К примеру, известный в математической физике метод разделения переменных выражает решения уравнений в частных производных в виде бесконечных рядов по собственным функциям соответствующей краевой задачи. Часто оказывается, что возникающие при этом ряды сходятся медленно, или даже вовсе расходятся. В таких случаях желательно найти методы, ускоряющие сходимость исследуемых рядов. Иногда эта цель достигается использованием *формулы суммирования Пуассона*

$$\Omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi n}{\Omega}\right) , \quad (1)$$

которая немедленно вытекает из равенства (1.4.6) после умножения обеих его частей на $f(t)$ и последующего интегрирования по оси t .

3.5.1. Ускорение сходимости

Обратим внимание на главную особенность формулы (1). Чем медленнее меняется функция $f(t)$, фигурирующая в правой части равенства, тем быстрее Фурье-образ $\tilde{f}(\omega)$, фигурирующий слева, стремится к нулю.

Это значит, что чем больше слагаемых мы должны учитывать в правой части равенства для аккуратного вычисления приближенного значения ряда, тем меньше слагаемых надо оставлять в левом ряду для достижения того же результата. Другими словами, формула суммирования Пуассона способна преобразовывать медленно сходящиеся ряды в быстро сходящиеся.

Пример 1. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий способность формулы Пуассона ускорять сходимость рядов. Пусть

$$\tilde{f}_\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \varepsilon^2}, \quad (2)$$

а мы намерены вычислить сумму ряда

$$S(\varepsilon) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi m) = \frac{2}{\varepsilon} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\varepsilon}{(2\pi m)^2 + \varepsilon^2}. \quad (3)$$

При большом ε необходимо удержать здесь много слагаемых, чтобы найти сумму ряда с приемлемой точностью. С другой стороны, известно, что функция-оригинал $f(t)$, отвечающая Фурье-образу (2)

$$f(t) = e^{-\varepsilon|t|},$$

– экспоненциально быстро стремится к нулю с ростом $|t|$. Поэтому в данном случае (при больших значениях $\varepsilon > 1$) имеет смысл заменить ряд (3) эквивалентным ему, вытекающим из формулы суммирования Пуассона

$$S(\varepsilon) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n}. \quad (4)$$

Очевидно, последний ряд сходится, при больших ε , гораздо быстрее, чем ряд (3). Более того, преобразованный ряд оказывается геометрической прогрессией, точная сумма которой хорошо известна

$$S(\varepsilon) = \coth\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad \blacksquare \quad (5)$$

Пример 2. Из предыдущего примера видно, что иногда формула суммирования Пуассона не только ускоряет сходимость исследуемого ряда, но и дает его точное значение. Последнее справедливо, в частности, для рядов, слагаемые которых равны отношению полиномов индекса суммирования m . Проиллюстрируем сказанное на примере ряда

$$S(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\delta\alpha m^2}{(\alpha^2 - m^2)^2 + 4\delta^2 m^2 \alpha^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\delta\alpha m^2}{(\alpha^2 - m^2)^2 + 4\delta^2 m^2 \alpha^2}, \quad (6)$$

часто возникающего в физических приложениях. Применение формулы суммирования Пуассона сводит его к ряду

$$S(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m; \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n; \alpha) , \quad (7)$$

где

$$\tilde{f}(\omega; \alpha) = \frac{2\delta\alpha\omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\alpha^2}$$

и

$$f(t; \alpha) = \int \tilde{f}(\omega; \alpha) \cos(\omega t) d\omega .$$

Последний интеграл легко вычисляется методом вычетов. В частности, при $\delta^2 < 1$, он равен

$$f(t; \alpha) = \frac{\pi}{\gamma} e^{-\beta|t|} (\gamma \cos(\gamma t) - \beta \sin(\gamma|t|)) , \quad (8)$$

где

$$\beta = \alpha\delta , \quad \gamma = \alpha\sqrt{1 - \delta^2} .$$

Подстановка (8) в (7) дает

$$S(\alpha) = \frac{2\pi}{\gamma} \left[\frac{\gamma}{2} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\beta n} \cos(2\pi\gamma n) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\beta n} \sin(2\pi\gamma n) \right] . \quad (9)$$

Вычисление рядов в последнем равенстве сводится к суммированию комплексной геометрической прогрессии

$$Q(\lambda, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\lambda + i\nu)n} = \frac{1}{e^{\lambda + i\nu} - 1} ,$$

В результате, после несложных выкладок получаем

$$S(\alpha) = \frac{2\pi}{\gamma} \left[\frac{\gamma}{2} + \gamma \operatorname{Re} Q(2\pi\beta, 2\pi\gamma) + \operatorname{Im} Q(2\pi\beta, 2\pi\gamma) \right] .$$

Последующее выделение действительной и мнимой частей функции $Q(\lambda, \nu)$ приводит к окончательному ответу

$$S(\alpha) = \frac{\pi}{\gamma} \frac{\gamma \sinh(2\pi\beta) - \beta \sin(2\pi\gamma)}{\cosh(2\pi\beta) - \cos(2\pi\gamma)} . \quad (10)$$

График этой функции изображен на рис. 3.5. ■

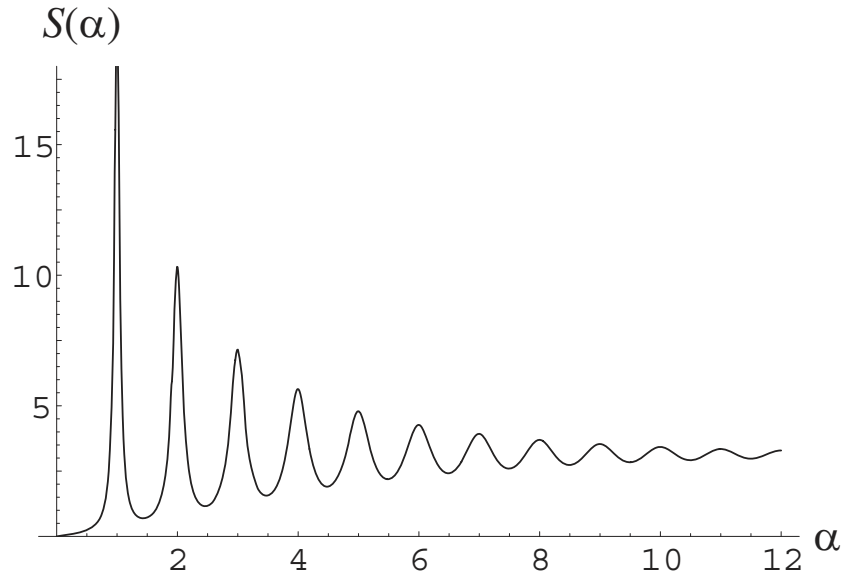


Рис. 3.5. График точной суммы (10) ряда (6) при $\delta = 0.05$

3.5.2. Дискретное преобразование Фурье

Как известно, в инженерных приложениях часто используют не “непрерывное” (1.1.1), а *дискретное преобразование Фурье*

$$\tilde{f}_{\Delta}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\Delta m) e^{-im\Delta\omega} . \quad (11)$$

Опираясь на общие свойства (1.1.2) интеграла Фурье, а также на формулу суммирования Пуассона (3.5.1), легко получить полезное выражение

$$\tilde{f}_{\Delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\omega + \frac{2\pi n}{\Delta}\right) , \quad (12)$$

явно раскрывающее “взаимоотношения” между дискретным и непрерывным преобразованиями Фурье. Оставляя в стороне многочисленные приложения дискретных преобразований Фурье, обсудим пример, иллюстрирующий возможности использования формул (11), (12) для суммирования рядов.

Пример 3. Анализ распространения акустических и электромагнитных волн в волноводах часто приводит к необходимости суммирования рядов вида:

$$U(v; \Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\Delta m) e^{-img(v)} , \quad (13)$$

где $g(v)$ – некоторая гладкая функция, а $f(t)$ – абсолютно интегрируемая функция и такая, что $f(0) = 1$. Заметим, что чем меньше Δ , тем больше слагаемых ряда (13) надо учитывать, чтобы найти сумму ряда с требуемой точностью. С другой стороны, как видно из (11), (12), этот ряд (13) равен

$$U(v; \Delta) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \tilde{f} \left(\frac{g(v) - 2\pi n}{\Delta} \right) . \quad (14)$$

Для достаточно гладких функций $f(t)$ (обеспечивающих быстрое спадание к нулю их Фурье-образов $\tilde{f}(\omega)$), и при малом Δ , последний ряд сходится лучше, чем исходный ряд (13). Более того, так как функция

$$\frac{1}{\Delta} \tilde{f} \left(\frac{x}{\Delta} \right)$$

слабо сходится, при $\Delta \rightarrow 0$, к дельта-функции $\delta(x)$, слабый предел функции $U(v; \Delta)$ (14), при $\Delta \rightarrow 0$, равен

$$U(v) = \frac{2\pi}{|\dot{g}(v)|} \sum_n \delta(v - v_n) ,$$

где суммирование ведется по корням v_n уравнения $g(v) = 2\pi n$. ■

3.6. Теорема Котельникова

В этом разделе мы используем формулу суммирования Пуассона для доказательства знаменитой теоремы Шеннона – Котельникова, играющей ключевую роль в теории передачи информации.

Рассмотрим функцию $g(t)$, равную ряду

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\Delta m) \psi(t - \Delta m) . \quad (1)$$

Здесь $f(t)$ и $\psi(t)$ – заданные функции, имеющие Фурье-образы $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{\psi}(\omega)$. Применим Фурье преобразование (1.1.1) к обеим частям равенства (1). Учитывая соотношение (1.1.2а), а также тот факт, что

$$\psi(t - \Delta n) \quad \mapsto \quad \tilde{\psi}(\omega) e^{-i\omega \Delta n} ,$$

получим

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{\psi}(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\Delta m) e^{-i\omega \Delta m} .$$

Пользуясь затем формулами (3.5.12) и (3.5.13), получим окончательно

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \tilde{\psi}(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta}\right). \quad (2)$$

Пусть теперь $\tilde{f}(\omega)$ – финитная функция, тождественно равная нулю при

$$|\omega| \geq \pi/\Delta. \quad (3)$$

Тогда носители слагаемых в (2) не пересекаются, и при любой частоте ω не равен нулю лишь один член ряда. В частности, при $|\omega| \leq \pi/\Delta$ равенство (2) сводится к

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \tilde{\psi}(\omega) \tilde{f}(\omega). \quad (4)$$

Пусть к тому же $\tilde{\psi}(\omega)$ равна

$$\tilde{\psi}_0(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \Pi\left(\frac{\Delta\omega}{\pi}\right), \quad (5)$$

где $\Pi(x)$ – прямоугольная функция (2.2.1), равная 1 при $|x| < 1$ и нулю в противном случае. Тогда равенство (4) справедливо при любом ω и приобретает форму

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{f}(\omega). \quad (6)$$

Равенство Фурье-образов означает, что равны и соответствующие функции-оригиналы. Следовательно, подставив в (1) обратный Фурье-образ

$$\psi_0(t) = \frac{\sin x}{x}, \quad x = \frac{\pi t}{\Delta},$$

прямоугольной функции (5), придем к тождеству

$$f(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\Delta m) \psi_0(t - \Delta m), \quad (7)$$

составляющему содержание теоремы Шеннона – Котельникова:

Пусть Фурье-образ функции $f(t)$ равен нулю вне интервала $|\omega| \leq \pi/\Delta$. Тогда, при любом t , значения функции $f(t)$ выражаются, с помощью ряда (7), через значения той же функции в дискретные моменты времени

$$t_m = \Delta m. \quad (8)$$

Мы не будем здесь обсуждать многочисленные применения этой теоремы в физике и теории передачи информации. Вместо этого обсудим некоторые модификации и обобщения данной теоремы.

Перепишем равенство (2), заменив Δ на δ :

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{2\pi}{\delta} \tilde{\psi}(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\delta}\right). \quad (9)$$

Заметим, что если

$$\delta < \Delta,$$

а $\tilde{f}(\omega)$, как и раньше, тождественно равна нулю при $|\omega| > \pi/\Delta$, то носители слагаемых суммы (9) разделены интервалами длины

$$2\pi \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta} \right).$$

Поэтому, чтобы перейти от (9) к (6), достаточно выбрать функцию $\tilde{\psi}(\omega)$ из широкого класса Фурье-образов

$$\tilde{\psi}(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta}{2\pi} & \text{при } |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta}; \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \frac{2\pi}{\delta} - \frac{\pi}{\Delta}; \\ \text{произвольна} & \text{при } \frac{\pi}{\Delta} < |\omega| < \frac{2\pi}{\delta} - \frac{\pi}{\Delta}. \end{cases} \quad (10)$$

При этом оказывается справедливым тождество

$$f(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\delta m) \psi(t - \delta m). \quad (11)$$

Схематический график одного из возможных Фурье-образов $\tilde{\psi}(\omega)$ для которых справедливы тождества (6) и (11), изображен на рис. 3.6.

Подчеркнем, тождество (11) имеет, в сравнении с известной формулой Котельникова (7), тот недостаток, что требует знания значений функции $f(t)$ в большем числе моментов времени $t_m = \delta m$, чем формула (7). Однако указанный недостаток частично или даже полностью искупается появившейся свободой выбора функции $\psi(t)$ (точнее, ее Фурье-образа). Эту свободу выбора можно эффективно использовать для улучшения сходимости ряда в правой части равенства (11). Действительно, накопленный при чтении этой книги опыт, основанный на знании свойств преобразований Фурье, подсказывает, что для улучшения сходимости ряда (11) надо подобрать функцию $\tilde{\psi}(\omega)$ внутри интервала

$$\frac{\pi}{\Delta} < |\omega| < \frac{2\pi}{\delta} - \frac{\pi}{\Delta}$$

как можно более гладкой, желательно бесконечно дифференцируемой. Тогда функция $\psi(t)$ будет спадать к нулю, при $|t| \rightarrow \infty$, быстрее любой степенной функции $1/|t|^n$. В итоге, вычисление с заданной точностью значений функции $f(t)$ может потребовать суммирования меньшего числа слагаемых ряда (11), чем ряда (7).

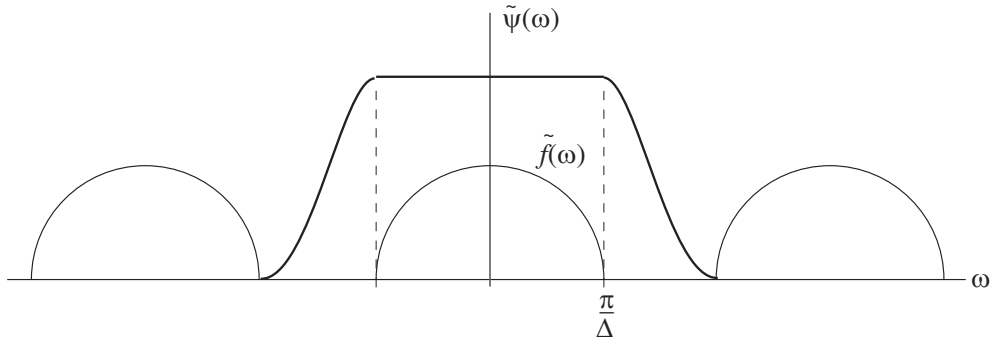


Рис. 3.6. Схематичный график возможного Фурье-образа $\tilde{\psi}(\omega)$ (10), обеспечивающего справедливость равенства (11), в случае $\delta = 2\Delta/3$

Глава 4

Введение в теорию аналитических сигналов

4.1. Преобразование Гильберта

В этой главе мы рассмотрим основы теории аналитических сигналов, которые необходимо знать физикам и инженерам при решении различных задач спектрального анализа и синтеза. Перед этим необходимо освоить преобразование Гильберта, на которое существенно опирается определение аналитического сигнала.

Пусть $\phi(t)$ – некоторая функция. Ее преобразованием Гильберта называют функцию $\psi(t)$, равную главному значению интеграла

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \text{Pv} \int \frac{\phi(s)}{s-t} ds . \quad (1)$$

Найдем формулу обратного преобразования Гильберта. Для этого применим Фурье-преобразование к обеим частям равенства (1). При этом левая часть равенства окажется равной

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(t) e^{-i\omega t} dt ,$$

в то время как правая часть равенства, после смены порядка интегрирования и других простых преобразований, окажется равной

$$\frac{1}{2\pi^2} \int \phi(s) e^{-i\omega s} \left[\text{Pv} \int \frac{e^{i\omega(s-t)}}{s-t} dt \right] ds .$$

Заметив, что

$$\text{Pv} \int \frac{e^{i\omega(s-t)}}{s-t} dt = i \int \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = i\pi \text{sign}(\omega) ,$$

будем иметь

$$\tilde{\psi}(\omega) = i\tilde{\phi}(\omega) \text{sign}(\omega) . \quad (2)$$

Пусть $g(T)$ – Гильберт-образ функции $\psi(t)$. Тогда, согласно предыдущей формуле, ее Фурье-образ равен

$$\tilde{g}(\omega) = i\tilde{\psi}(\omega) \operatorname{sign}(\omega) = -\tilde{\phi}(\omega) .$$

Таким образом, $g(t) = -\phi(t)$. Последнее означает, что искомая формула обратного преобразования Гильберта имеет вид

$$\phi(t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Pv} \int \frac{\psi(s)}{s-t} ds . \quad (4)$$

Заметим, что одно из важнейших применений преобразования Гильберта связано с принципом причинности. Покажем это на примере абсолютно интегрируемой функции $h(t)$, которую будем трактовать как отклик некоторой линейной системы на дельта-импульс $\delta(t)$. Знание свойств Фурье-образа отклика линейной системы необходимо при решении многих прикладных задач. Заменяем в соответствующем Фурье-интеграле действительную частоту ω комплексной переменной $\lambda = \omega + i\alpha$:

$$\tilde{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty h(t) e^{-i\lambda t} dt . \quad (5)$$

Нулевой нижний предел последнего интеграла принимает во внимание принцип причинности, согласно которому отклик линейной системы не может появиться ранее входного импульса, то есть $h(t < 0) \equiv 0$. Очевидно, что функция $\tilde{h}(\lambda)$ (5) – аналитическая в нижней полуплоскости и непрерывна на реальной оси $\alpha = 0$. В свою очередь это означает, что имеет место равенство

$$-i\pi\tilde{h}(\omega) = \operatorname{Pv} \int \frac{\tilde{h}(\kappa)}{\kappa - \omega} d\kappa .$$

Представим комплексную функцию $\tilde{h}(\omega)$ в виде действительной и мнимой частей

$$\tilde{h}(\omega) = \tilde{\phi}(\omega) + p\tilde{s}i(\omega) .$$

Подставив правую часть этого выражения в предыдущее равенство, обнаружим, что $\phi(t)$ и $\psi(t)$ связаны между собой прямым и обратным преобразованием Гильберта. Соответствующие формулы (1) и (3), примененные к реальной и мнимой частям Фурье-образа отклика линейной, удовлетворяющей принципу причинности, системы на дельта-импульс, хорошо известны в физике и носят там название *соотношений Крамерса-Кчнига*.

4.2. Понятие аналитического сигнала

Другое важное применение преобразования Гильберта в физике и в теории передачи информации связано с понятием *аналитического сигнала*. Дадим вначале математическое определение аналитического сигнала:

Каждому реальному процессу $\xi(t)$, который мы будем считать абсолютно интегрируемым, ставится в соответствие комплексный процесс $\zeta(t)$, реальная часть которого совпадает с исходным процессом $\xi(t)$, а его мнимая часть $\eta(t)$ выбирается из условия, чтобы полученная аналитическим продолжением комплексная функция $\zeta(z)$ комплексного аргумента $z = t + i\beta$ была бы аналитической в верхней полуплоскости $\beta > 0$.

Из предыдущего раздела следует, что, для получения аналитического сигнала из исходного сигнала $\xi(t)$, достаточно положить Фурье образ исходного сигнала равным нулю для отрицательных частот, то есть заменить Фурье-образ $\tilde{\xi}(\omega)$ на

$$\tilde{\zeta}(\omega) = 2\chi(\omega)\tilde{\xi}(\omega) . \quad (1)$$

Очевидно, последнее равенство можно переписать в виде

$$\tilde{\zeta}(\omega) = \tilde{\xi}(\omega) + \tilde{\xi}(\omega) \operatorname{sign}(\omega) . \quad (2)$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части равенства представляет собой Фурье-образ исходного сигнала $\xi(t)$, в то время как второе слагаемое имеет чисто мнимую функцию оригинал, то есть является (с точностью до мнимой единицы) – Фурье-образом мнимой части аналитического сигнала. Сравнивая последнее слагаемое в (2) с правой частью равенства (4.1.2), обнаруживаем, что мнимая часть аналитического сигнала выражается через исходный сигнал с помощью преобразования Гильберта

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Pv} \int \frac{\xi(s)}{s-t} ds . \quad (3)$$

Укажем одно из ”лежащих на поверхности” применений аналитического сигнала в задачах теории передачи информации. Для этого напомним, что при передаче информации используют, как правило, узкополосные сигналы, чьи Фурье образы существенно не равны нулю лишь в малой окрестности некоторой *несущей* частоты Ω . Такие сигналы обычно представляют в виде

$$\xi(t) = A(t) \cos[\Omega(t) + \psi(t)] , \quad (4)$$

где $A(t)$ и $\psi(t)$ – медленно меняющиеся, на периоде $T = 2\pi/\Omega$ колебания, амплитуда и фаза узкополосного сигнала. Одна из важнейших проблем анализа узкополосных сигналов состоит в выделении амплитуды $A(t)$ и фазы $\psi(t)$ узкополосных сигналов. С точки зрения математики – это некорректная задача, так как подразумевает нахождение двух неизвестных A и ψ , связанных одним уравнением (4). Задача становится корректно поставленной, если мы дополним (4) аналогичным равенством для мнимой части аналитического сигнала

$$\eta(t) = A(t) \sin[\Omega(t) + \psi(t)] . \quad (5)$$

4.3. Свойства преобразования Гильберта

Для лучшего понимания сути преобразования Гильберта и свойств аналитических сигналов, полезно ясно представлять некоторые общие свойства преобразования Гильберта. По аналогии с тем, как мы это делали в случае преобразования Фурье, мы будем записывать формулы, связывающие исходную функцию $\phi(t)$ и ее Гильберт-образ в виде:

$$\phi(t) \mapsto \psi(t) .$$

Так из определения преобразования Гильберта (4.1.1) следует, что если сдвинуть аргумент исходной функции на величину τ , то форма ее Гильберт-образа не изменится, а аргумент Гильберт-образа сдвинется на то же τ :

$$\phi(t + \tau) \mapsto \psi(t + \tau) .$$

Кроме того, как нетрудно показать, преобразование Гильберта обладает свойством масштабной инвариантности в том смысле, что для любого $a > 0$ справедливо соотношение

$$\phi(at) \mapsto \psi(at) .$$

С другой стороны, при обращении исходной функции во времени, знак ее Гильберт-образа меняется на обратный:

$$\phi(-t) \mapsto -\psi(-t) .$$

Отсюда как частный случай следует, что если исходная функция $\phi(t)$ – четная, то ее Гильберт-образ $\psi(t)$ – нечетная функция времени и наоборот.

Полезно также иметь ввиду, что преобразование Гильберта сохраняет гладкость функций. Так если $\phi(t)$ – n -раз непрерывно-дифференцируемая функция, то такой же будет и ее Гильберт-образ, причем

$$\phi^{(m)}(t) \quad \mapsto \quad \psi^{(m)}(t) , \quad m = 1, 2, \dots, n .$$

Другое замечательное, с точки зрения приложений, свойство преобразования Гильберта состоит в том, что “энергии” исходной функции и ее Гильберт-образа – одинаковы, то есть

$$\int |\phi(t)|^2 dt \equiv \int |\psi(t)|^2 dt .$$

Советуем читателю самому доказать, проясняющие некоторые детали взаимосвязи между исходными функциями и их Гильберт-образами, асимптотические формулы.

Если функция $\phi(t)$ – непрерывна всюду, за исключением точки $t = \tau$, где она имеет скачок величиной

$$[\phi] = \phi(\tau + 0) - \phi(\tau - 0) ,$$

то ее Гильберт-образ обладает, в той же точке, логарифмической особенностью:

$$\psi(t) \sim -\frac{[\phi]}{\pi} \ln |t - \tau| .$$

С другой стороны, если $\psi(t)$ – гладкая четная функция, то ее нечетный Гильберт-образ обладает следующей асимптотикой в окрестности нуля:

$$\psi(t) \sim -ct , \quad (t \rightarrow 0) ,$$

где

$$c = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(0) - \phi(t)}{t^2} dt .$$

4.4. Вычисление аналитического сигнала

Поскольку мнимая часть аналитического сигнала выражается через преобразование Гильберта от исходного сигнала, начнем с обсуждения вычисления преобразования Гильберта от заданной функции $\phi(t)$. Часто кратчайший путь вычисления Гильберт-образов лежит через преобразования Фурье. Так, из (4.1.2) видно, что если известен Фурье-образ $\tilde{\phi}(\omega)$ исходного сигнала, то его Гильберт-образ можно вычислить по формуле

$$\psi(t) = -2\text{Im} \int_0^\infty \tilde{\phi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Приведем типичный пример использования этой формулы.

Пример 1. Требуется найти Фурье-образ сигнала

$$\phi(t) = \frac{1}{t^2 + \tau^2} .$$

Мы знаем, что Фурье-образ этой функции равен

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{2\tau} e^{-|\omega|\tau} .$$

Подставив его в интеграл (1), получим

$$\psi(t) = \frac{t}{\tau(t^2 + \tau^2)} . \quad \blacksquare$$

Аналогично могут быть вычислены и аналитические сигналы.

Пример 2. Пусть исходный сигнал равен

$$\xi(t) = \frac{\cos \Omega t}{t^2 + \tau^2} . \quad (1)$$

Его Фурье-образ имеет вид

$$\tilde{\xi}(\omega) = \frac{1}{4\tau} \left(e^{-|\omega - \Omega|\tau} + e^{-|\omega + \Omega|\tau} \right) .$$

Подставив последний в формулу обратного преобразования Фурье

$$\zeta(t) = 2 \int_0^\infty \tilde{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

будем иметь

$$\zeta(t) = \frac{1}{t^2 + \tau^2} \left(e^{i\Omega t} + i \frac{t}{\tau} e^{-i\Omega t} \right) . \quad \blacksquare \quad (2)$$

Особенно простые формулы для Гильберт образов и аналитических сигналов возникают, если исходный сигнал описывается выражением

$$\xi(t) = f(t) \cos \Omega t + g(t) \sin \Omega t , \quad (3)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – функции с финитными Фурье-образами, тождественно равными нулю при $|\omega| \geq \Omega$. Выведем формулу для аналитического

сигнала, соответствующего исходному сигналу (3). Для этого перепишем его в форме

$$\xi(t) = \frac{1}{2} [f(t) - ig(t)] e^{i\Omega t} + \frac{1}{2} [f(t) + ig(t)] e^{-i\Omega t} .$$

Из теоремы смещения теории преобразований Фурье следует, что Фурье-образ 2-го слагаемого в правой части тождественно равен нулю при $\omega > 0$, в то время как Фурье-образ 1-го слагаемого тождественно равен нулю при $\omega < 0$. Это означает, что аналитический сигнал, соответствующий исходному сигналу (3), равен

$$\zeta(t) = [f(t) - ig(t)] e^{i\Omega t} . \quad (4)$$

Пример 3. Найти аналитический сигнал, соответствующий сигналу

$$\xi(t) = t \sin \Omega t .$$

Напомним, что обобщенный Фурье-образ функции-оригинала t равен $i\delta'(\omega)$. Это означает, что при любом Ω соответствующий аналитический сигнал может быть вычислен по формуле (4), которая в данном случае принимает вид

$$\zeta(t) = -ite^{i\omega t} .$$

Аналогично, если $f(t) = P_n(t)$, $g(t) = Q_m(t)$, где $P_n(t)$ и $Q_m(t)$ – произвольные полиномы произвольных степеней n и m , то при любом Ω аналитический сигнал находится по формуле

$$\zeta(t) = [P_n(t) - iQ_m(t)] e^{i\Omega t} . \quad \blacksquare$$

Рассмотрим еще один простой, но полезный для информационных приложений пример использования формулы (4).

Пример 4. Используя формулы (4.2.4) и (4.2.5), найти мгновенную амплитуду, фазу и частоту сигнала

$$\xi(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + A_2 \sin \Omega_2 t , \quad \Omega_1, \Omega_2 > 0 .$$

Очевидно, искомым аналитический сигнал равен

$$\zeta(t) = A(t)e^{\Phi(t)} = A_1 e^{i\Omega_1 t} - iA_2 e^{i\Omega_2 t} .$$

Соответственно, мгновенная амплитуда сигнала равна

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t} .$$

Полагая для определенности, что $A_1 > A_2$ (то есть параметр $p = A_2/A_1 < 1$), приходим к следующему выражению для мгновенной фазы сигнала

$$\Phi(t) = \Omega_1 - \arctan \left(\frac{p \cos(\Omega_2 - \Omega_1)t}{1 + p \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t} \right) .$$

Дифференцируя мгновенную фазу, находим мгновенную частоту исследуемого сигнала

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\Omega_1[1 + p \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t] + \Omega_2[p^2 + p \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t]}{1 + p^2 + 2p \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t} . \quad \blacksquare$$

Соотношения (3) и (4) выражают в идеализированной математической форме причины, по которым концепция аналитического сигнала привлекательна среди физиков и инженеров, специализирующихся по проблемам передачи и обработки информации. Если, как правило, исследуемый сигнал – узкополосный и представим в виде (3), где $f(t)$ и $g(t)$ – медленно меняющиеся на периоде $T = 2\pi/\Omega$ функции, то естественно полагать, что их Фурье-образы практически равны нулю при $|\omega| > \Omega$. Последнее означает, что, в случае узкополосных сигналов, простая и наглядная формула (4) дает достаточно аккуратное приближенное выражение для аналитического сигнала. В этом можно убедиться на примере узкополосного (при $\Omega\tau \gg 1$) сигнала (1). Соответствующий ему аналитический сигнал (2) практически равен (при $\Omega\tau \gg 1$) сигналу

$$\zeta(t) \simeq \frac{e^{i\Omega t}}{t^2 + \tau^2} ,$$

полученному из исходного сигнала (1) заменой $\cos \Omega t$ на $e^{i\Omega t}$. График мнимой части аналитического сигнала (2)

$$\eta(t) = \frac{1}{t^2 + \tau^2} \left(\sin \Omega t + \frac{t}{\tau} \cos \Omega t \right) \quad (5)$$

и его “узкополосного” аналога

$$\eta_0(t) = \frac{\sin \Omega t}{t^2 + \tau^2} , \quad (6)$$

при $\Omega\tau = 50$ изображены на рис. 4.1. \blacksquare

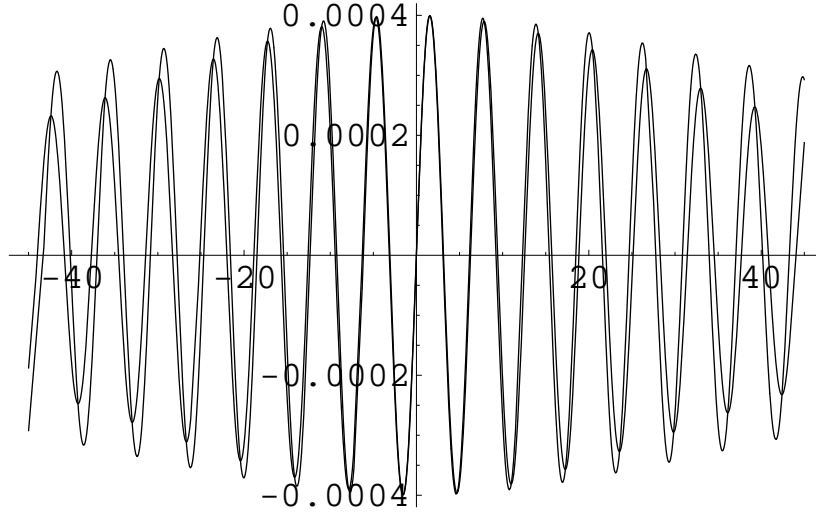


Рис. 4.1. Графики мнимой части аналитического сигнала $\eta(t)$ (5) и его “узкополосного” аналога $\eta_0(t)$ (6), при $\Omega\tau = 50$, демонстрирующие сходство и различие указанных функций.

Наряду с неоспоримыми достоинствами при анализе сигналов, характерных для систем передачи информации, аналитический сигнал обладает и некоторыми недостатками. Пожалуй главный из них – возможность нарушения принципа причинности, согласно которому если исходный сигнал $\xi(t)$ тождественно равен нулю при $t < 0$, то при $t < 0$ должен быть равен нулю и аналитический сигнал. Приведем пример, иллюстрирующий нарушение аналитическим сигналом принципа причинности.

Пример 5. рассмотрим исходный синусоидальный сигнал

$$\xi(t) = \chi(t) \sin \Omega t, \quad (7)$$

“начинающийся” в момент $t = 0$. Найдем соответствующий ему аналитический сигнал. Для этого рассмотрим вспомогательную комплексную функцию

$$\xi_c(t) = \chi(t) e^{i\omega t},$$

Гильберт-образ которой равен

$$\eta_c(t) = -\frac{1}{\pi} \text{Pv} \int \frac{\xi_x(s)}{s-t} ds = -e^{i\Omega t} \frac{1}{\pi} \text{Pv} \int_{-\Omega t}^{\infty} \frac{e^{i\theta}}{\theta} d\theta.$$

Здесь мы ввели новую переменную интегрирования $\theta = \Omega(s-t)$. Разделив интеграл на реальную и мнимую части, получим

$$\eta_c(t) = e^{i\Omega t} \left[\frac{1}{\pi} \text{Ci}(|\Omega t|) - i \left(\frac{1}{2} + \text{Si}(\Omega t) \right) \right],$$

где использованы стандартные обозначения для известных специальных функций – интегрального косинуса и синуса:

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta, \quad x > 0, \quad \text{Si}(x) = - \int_0^x \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta.$$

Очевидно, мнимая часть комплексной функции $\eta_c(t)$ совпадает с мнимой частью аналитического сигнала. Другими словами, мы пришли к следующему выражению

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \text{Ci}(|\Omega t|) \sin \Omega t - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega t) \right) \cos \Omega t. \quad (8)$$

График этой функции, иллюстрирующей нарушение аналитическим сигналом принципа причинности, изображен на рис. 4.2.

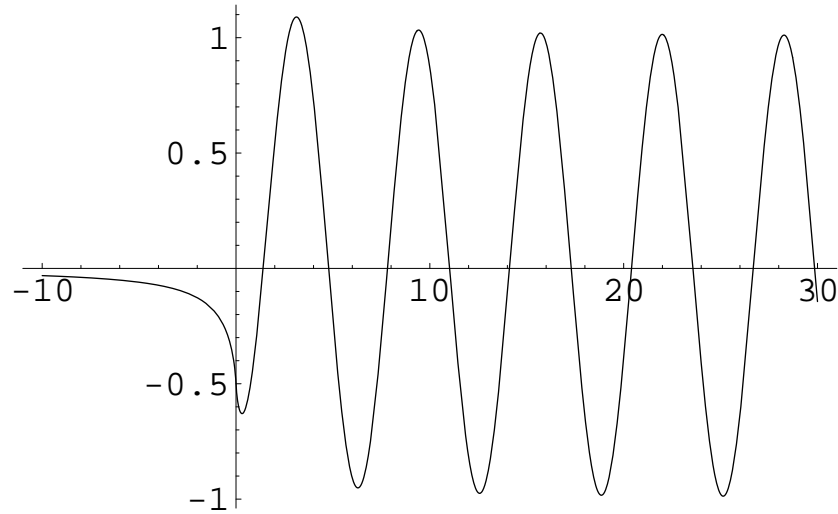


Рис. 4.2. График мнимой части $\eta(t)$ (8) аналитического сигнала, соответствующего исходному сигналу $\xi(t)$ (7). Видно, что функция $\eta(t)$ (8) не равна нулю при $t < 0$, где равен нулю исходный сигнал (7). Последнее как раз и означает, что аналитический сигнал нарушает условие причинности.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Преобразование Фурье	5
1.1. Определение и основные свойства	5
1.2. Обратное преобразование Фурье	7
1.3. Обобщенное преобразование Фурье	10
1.4. Ряд Фурье	17
Глава 2. Асимптотики интегралов Фурье	20
2.1. Обозначения асимптотик	20
2.2. Функции с разрывами	23
2.3. Сглаживание функции	29
2.4. Разрывы 2-го рода	33
2.5. Фурье образ функции Хевисайда	41
2.6. Асимптотики интегралов, родственных интегралу Фурье	46
2.7. Метод стационарной фазы	49
2.8. Функции Ангера и Вебера	52
2.9. Дробные производные	55
Глава 3. Расходящиеся ряды и интегралы	58
3.1. Метод Абеля	58
3.2. Метод Чезаро	61
3.3. Ряд комплексных экспонент	65
3.4. Суммирование расходящихся интегралов	66
3.5. Формула суммирования Пуассона	71
3.5.1. Ускорение сходимости	71
3.5.2. Дискретное преобразование Фурье	74
3.6. Теорема Котельникова	75
Глава 4. Введение в теорию аналитических сигналов	79
4.1. Преобразование Гильберта	79
4.2. Понятие аналитического сигнала	81
4.3. Свойства преобразования Гильберта	82
4.4. Вычисление аналитического сигнала	83