

Федеральное агентство по образованию  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»  
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр  
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и  
математическое обеспечение»

К.Г. Мишагин, В.Д. Шалфеев

## Фазирование антенных решеток на основе эффектов коллективной нелинейной динамики

*Учебно-методические материалы по программе повышения  
квалификации «Новые подходы в исследованиях и разработках  
информационно-телекоммуникационных систем и технологий»*

Нижегород

2006

*Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»*

Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д. Фазирование антенных решеток на основе эффектов коллективной нелинейной динамики. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы в исследованиях и разработках информационно-телекоммуникационных систем и технологий». Нижний Новгород, 2006.

В пособии рассмотрен один из перспективных способов осуществления когерентного суммирования непрерывного лазерного излучения, основанный на использовании систем фазовой автоподстройки. Представлен обзор методов нелинейного фазирования в активных антенных решетках, основанных на использовании коллективной динамики связанных фазоуправляемых генераторов. Приведены пример сложной хаотической динамики в ансамблях связанных фазоуправляемых генераторов и обсуждаются возможные приложения хаотических сигналов, генерируемых в таких ансамблях.

© авторский коллектив

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Задача когерентного суммирования непрерывного лазерного излучения в решетках волоконных усилителей.</b>	<b>6</b>
Описание модели системы автоматической фазовой коррекции в оптическом волокне.	
Точность фазирования и динамические режимы системы автоматической фазовой коррекции.	
Фазирование в решетках волоконных усилителей.	
<b>Глава 2. Коллективная нелинейная динамика связанных фазоуправляемых генераторов в задаче нелинейного фазирования.</b>	<b>16</b>
Генератор с цепью фазовой автоподстройки, уравнение модели.	
Метод фазирования на основе синхронизации генераторов общим опорным сигналом.	
Каскадное соединение фазовых систем.	
Организация взаимных связей с помощью колец фазовой автоподстройки.	
Скорость установления градиентных фазовых распределений.	
Оценка точности фазирования при случайном разбросе параметров.	
Управление нестационарным градиентным распределением фаз.	
<b>Глава 3. Генерация широкополосных сигналов в ансамблях связанных фазовых систем.</b>	<b>48</b>
Исследование хаотической динамики в экспериментальной схеме двух каскадно-связанных фазовых систем.	
Спектральные свойства хаотических колебаний, генерируемых в ансамбле двух каскадно-связанных фазовых систем.	
Синтез широкополосных и сверхширокополосных сигналов в цепочке локально-связанных фазоуправляемых генераторов.	
<b>Приложение</b>	<b>66</b>
<b>Список литературы.</b>	<b>79</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема изучения коллективной динамики активных сред имеет сегодня высокую привлекательность не только в физике, но и в биологии, химии, экономике и социальных науках. В изучении пространственно-временных задач (биологические возбудимые среды, нейронные сети, турбулентность, энергосети, решетки связанных лазеров, джозефсоновские контакты, антенные решетки и т.д.), сводящихся обычно к дискретным решеточным моделям, несмотря на исключительную сложность исследования, в последние десятилетия достигнут существенный прогресс, обусловленный в значительной степени появлением мощных вычислительных средств. Можно отметить успехи в области изучения однородных сетей из взаимодействующих осцилляторов различного типа и, в частности, изучение фундаментальных колебательно-волновых явлений, связанных с развитием неустойчивостей в потоковых системах, появлением пространственно-временной синхронизации, хаотизации и образованием структур.

В последнее время особый интерес представляют задачи прикладного использования различных эффектов, связанных с регулярной и хаотической динамикой ансамблей нелинейных осцилляторов. Реальным примером радиофизической системы, представляющей собой сеть взаимодействующих нелинейных осцилляторов, способной демонстрировать эффекты коллективной динамики, такие как: синхронизация, хаотизация, структурообразование, является активная антенная решетка.

В первой главе представлены результаты теоретического исследования динамики цепи автоматической коррекции фазы в оптическом волокне – базовом элементе системы когерентного сложения, основанной на методе активной фазовой коррекции. Представлено сравнение точности фазирования в решетке оптоволоконных усилителей при использовании автоматической фазовой коррекции относительно опорного сигнала и при автоматической подстройке с помощью сигналов фазовых рассогласований между соседними элементами решетки.

Во второй главе представлен обзор методов нелинейного фазирования в активных антенных решетках, где в качестве базового элемента предлагается использование генератора с кольцом фазовой автоподстройки частоты. Для разных схем показано существование и устойчивость градиентных фазовых распределений, а также возможность управления этими распределениями. Рассмотрены проблемные вопросы

схем нелинейного фазирования, касающиеся времени переходных процессов, влияния расстроек управляющих параметров на точность фазирования. Также рассмотрен вопрос управления изменяющимся во времени градиентным фазовым распределением.

В третьей главе рассматривается хаотическая динамика ансамблей связанных фазовых систем. Представлены результаты эксперимента со схемой двух каскадно-связанных фазовых систем. Обсуждаются спектральные характеристики хаотических колебаний, генерируемых в таких ансамблях. Показана возможность синтеза широкополосных и сверхширокополосных сигналов на основе сигналов с хаотической угловой модуляцией.

# **ЗАДАЧА КОГЕРЕНТНОГО СУММИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕШЕТКАХ ВОЛОКОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ**

В настоящее время оптические генераторы и усилители с локальными электрооптическими кольцами управления представляют большой интерес как с точки зрения использования в когерентных оптических системах связи и интерферометрических измерительных системах, так и для решения задач когерентного сложения мощностей, коррекции волнового фронта, и управления лучом в решетках оптоволоконных усилителей. Когерентное сложение мощностей на основе метода активной фазовой коррекции предполагает использование одного лазера, генерирующего высококогерентное излучение, для запитки нескольких оптических усилителей с локальными цепями фазовой автоподстройки. Такая схема применяется для фазирования в мощных антенных решетках радиочастотного диапазона. Несмотря на сложность реализации интерферометрических датчиков и фазовых модуляторов для каждого усилителя, данный метод активной фазовой коррекции представляется одним из наиболее перспективных с точки зрения надежности и управляемости, а также масштабируемости системы как по мощности, так и по количеству усилителей. Работа [1] является одной из первых работ, в которых была показана возможность практической реализации метода активной фазовой коррекции для когерентного суммирования излучения на выходе решетки оптических волноводов. В этой работе использовалась система автоматической подстройки фазы в каждом отдельном волоконном усилителе относительно фазы опорного оптического сигнала, схема содержала семь усилителей.

В данной главе представлены результаты теоретического исследования динамики цепи автоматической коррекции фазы в оптическом волокне – базовом элементе системы когерентного сложения, основанной на методе активной фазовой коррекции. Представлено сравнение точности фазирования в решетке оптоволоконных усилителей при использовании автоматической фазовой коррекции относительно опорного сигнала и при автоматической подстройке с помощью сигналов фазовых рассогласований между соседними элементами решетки.

## Описание модели системы автоматической фазовой коррекции в оптическом волокне.

На рис. 1.1 представлена схема системы автоматической фазовой коррекции оптоволоконного усилителя, использующая электрооптическую цепь обратной связи. Данная электрооптическая цепь автоматической подстройки представляет собой волоконно-оптический интерферометр Маха-Цендера [2, 3] с обратной связью. На представленной схеме на вход двух одноименных оптических волокон, в которых может распространяться только мода  $HE_{11}$ , подается высококогерентное одночастотное оптическое излучение от одного твердотельного лазера. Одно из волокон используется для передачи опорной световой волны, другое активное волокно с лазерной накачкой является оптическим услителем. В результате прохождения излучения по активному оптическому волокну, длина которого может составлять десятки метров, фаза излучения на выходе становится не предсказуемой, случайной, вследствие случайных деформаций волокна, флуктуации коэффициента преломления, обусловленной в свою очередь флуктуацией температуры и инверсии населенностей. Вследствие этого, при отсутствии взаимодействия между волокнами световые волны на выходе этих волокон не являются когерентными.

Задача системы управления заключается в стабилизации фазы на выходе волоконного усилителя относительно фазы опорной волны. При этом желательно, чтобы в результате действия данной системы разность фаз между световыми волнами на выходе волокон принимала некоторое определенное значение, не зависящее от начальной разности фаз.

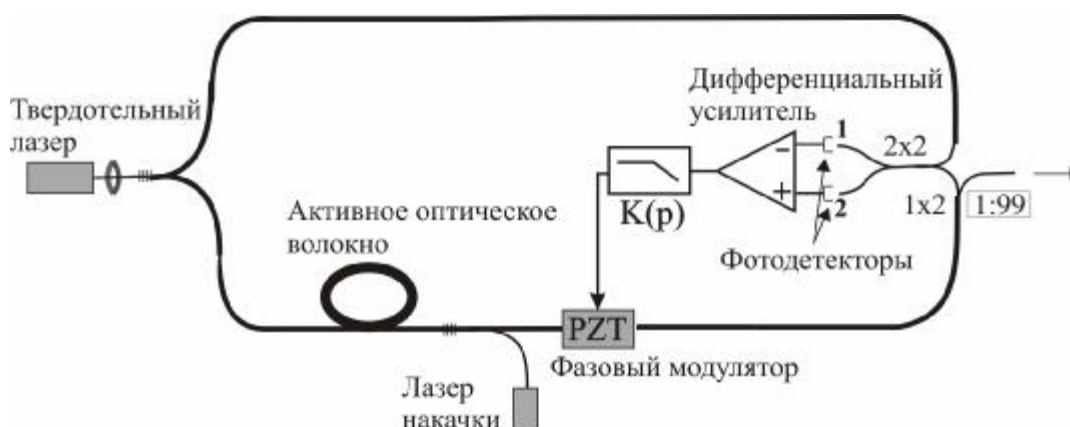


Рис. 1.1. Схема системы автоматической фазовой коррекции для волоконного усилителя.

Опишем модель схемы (рис. 1.1). Пусть на первое плечо интерферометра Маха-Цендера (первый вход оптического соединителя 2x2) поступает излучение, используемое

в качестве опоры. С помощью волоконного соединителя 1x2 меньшая часть излучения от усилителя (допустим 1%) попадает на второе плечо интерферометра. Электрические поля на входах интерферометра могут быть записаны в виде:

$$E_{11} = E_1^0 \exp(j(\omega t + j_1)), \quad E_{12} = E_2^0 \exp(j(\omega t + j_2)), \quad (1.1)$$

где  $E_1^0, E_2^0$  – амплитуды электрических полей,  $\varphi_1, \varphi_2$  – их фазы соответственно. Мы предполагаем отсутствие сдвига частоты в волокнах, поэтому частоты световых волн на выходе волокон равны частоте питающего твердотельного лазера  $\omega$ . Предполагается, что оптический соединитель 2x2 описывается следующей передаточной матрицей:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

В соответствии с этим, интенсивность электрических полей, принимаемых фотодетекторами, записывается так:

$$\begin{aligned} I_{21} &= |E_{11} + E_{12}|^2 = (I_{11} + I_{12})[1 + \chi \cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \\ I_{22} &= |E_{11} - E_{12}|^2 = (I_{11} + I_{12})[1 - \chi \cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \\ i_d &= 2b(I_{11} + I_{12})c \cos(j_1 - j_2), \quad \chi = \frac{2\gamma\sqrt{I_{11}I_{12}}}{I_{11} + I_{12}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\chi$  – контраст интерференционной картины,  $\gamma$  – коэффициент когерентности ( $|\gamma| \leq 1$ ). Предполагаем, что ток в фотодетекторах линейно пропорционален интенсивности падающего света, а также считаем постоянным коэффициент усиления, тогда ток на выходе дифференциального усилителя:

$$i_d = 2b(I_{11} + I_{12})c \cos(j_1 - j_2), \quad (1.4)$$

где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности.

Описанный выше дифференциальный метод обработки является одним из эффективных способов снижения шумов волоконного интерферометра [2, 3]. В рассматриваемой схеме волоконный интерферометр вместе с дифференциальным усилителем играют роль фазового дискриминатора, позволяющего получить сигнал, являющийся функцией от разности фаз двух световых волн.

После фазового дискриминатора сигнал проходит через фильтр с коэффициентом передачи  $K(p)$  ( $p=d/dt$ ) и поступает на фазовый модулятор, который может быть реализован на основе пьезоэлектрического преобразователя. Считаем характеристику фазового модулятора линейной, тогда фаза волны на выходе волоконного усилителя (на входе интерферометра):



$$j_2(t) = j_2^0 + a \exp(-pt)U_c(t), \quad U_c(t) = K(p)i_d(t), \quad (1.5)$$

где  $\varphi_2^0$  – фаза на выходе волоконного усилителя в отсутствии управления,  $\tau$  – общая временная задержка электрооптического кольца обратной связи (в соотношении (1.5) оптическая задержка описывается приближенно, когда  $\tau$  мало). В представленной схеме фазовый модулятор располагается после активного волокна и оптическая задержка при распространении оптического сигнала от модулятора до интерферометра крайне мала. Но если модулятор располагается перед волоконным усилителем (как, например, в работе [1]), длина которого составляет десятки метров, то эта задержка может быть более существенной и предположительно может влиять на динамические процессы в кольце управления.

Без ограничения общности сделаем замену:  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$ , тогда в результате получим:

$$j_2(t) = j_2^0 + a \exp(-pt)K(p) \sin(j_1 - j_2(t)), \quad (1.6)$$

где  $a$  – общий коэффициент усиления кольца управления. Предположим, что фазы  $\varphi_2^0$  и  $\varphi_1$  меняются значительно медленнее в сравнении с характерным временем процессов в кольце управления, и поэтому будем считать их постоянными. После замен:

$$j(t) = j_2(t) - j_1, \quad g = j_2^0 - j_1 = const \quad (1.7)$$

уравнение (1.6) примет вид:

$$j + a \exp(-pt)K(p) \sin j = g. \quad (1.8)$$

Начальное условие для данной системы определяется соотношением  $\varphi(t=0)=\gamma$ . Полученная математическая модель (1.8) также описывает фазовую динамику систем фазовой автоподстройки усиления (с учетом задержки в кольце управления), работающих в радиодиапазоне [4, 5].

### **Точность фазирования и динамические режимы системы автоматической фазовой коррекции.**

Динамика системы (1.8), главным образом, определяется видом фильтра в кольце управления. Рассмотрим несколько примеров для конкретных видов коэффициента передачи  $K(p)$  в случае  $\tau=0$ .

В случае идеального интегратора, когда  $K(p)=1/Tp$ ,  $T$  – характерное время интегрирования, после замены  $t/T \rightarrow t$  уравнение (1.8) примет вид ( $\tau=0$ ):

$$j + a \sin j = 0. \quad (1.9)$$

Динамика системы (1.9) очень проста, существуют только устойчивые  $\varphi_s$  и неустойчивые  $\varphi_u$  состояния равновесия:

$$j_s = 2pk, j_u = p + 2pk, k \in Z. \quad (1.10)$$

Важно отметить, что в этом случае в результате действия цепи автоматической фазовой коррекции разность фаз  $\varphi$  принимает фиксированное значение, которое не зависит от начального значения разности фаз  $\gamma$ .

В случае низкочастотного фильтра первого порядка с  $K(p)=1/(1+Tp)$  ( $T$  – постоянная времени фильтра), после замены  $t/T \rightarrow t$  уравнение (1.8) примет вид ( $\tau=0$ ):

$$j\ddot{+} j + a \sin j = g. \quad (1.11)$$

Динамика системы (1.11) также очень проста, существуют только устойчивые и неустойчивые состояния равновесия, количество которых определяется параметрами  $a$  и  $\gamma$  [4]. Рис. 1.2а представлены состояния равновесия системы для параметра  $a=12$ . Устойчивые состояния равновесия располагаются на ветвях с положительным наклоном, неустойчивые – на ветвях с отрицательным наклоном (рис. 1.2а). Устойчивому состоянию равновесия, находящемуся на нижней ветви, соответствует так называемый основной режим фазирования.

Пусть начальная разность фаз есть случайная величина, которая равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Определим точность фазирования системы в этом случае. Функцию распределения результирующей разности фаз (рис. 1.2б) можно записать в виде:

$$W(j^*) = \begin{cases} \frac{1}{2p}(1 + a \cos j^*), & |j^*| \leq j_1, \\ 0, & |j^*| > j_1, \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $\varphi_1$  определяется из уравнения:

$$j_1 + a \sin j_1 = p, \quad j_1 \in [0, p]. \quad (1.13)$$

Для дисперсии фазовой ошибки справедливо:

$$s_{j^*}^2 \sim \frac{5p^2}{6a^2} \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Из (1.12) и (1.14) следует, что с помощью параметра  $a$  можно управлять точностью фазирования.

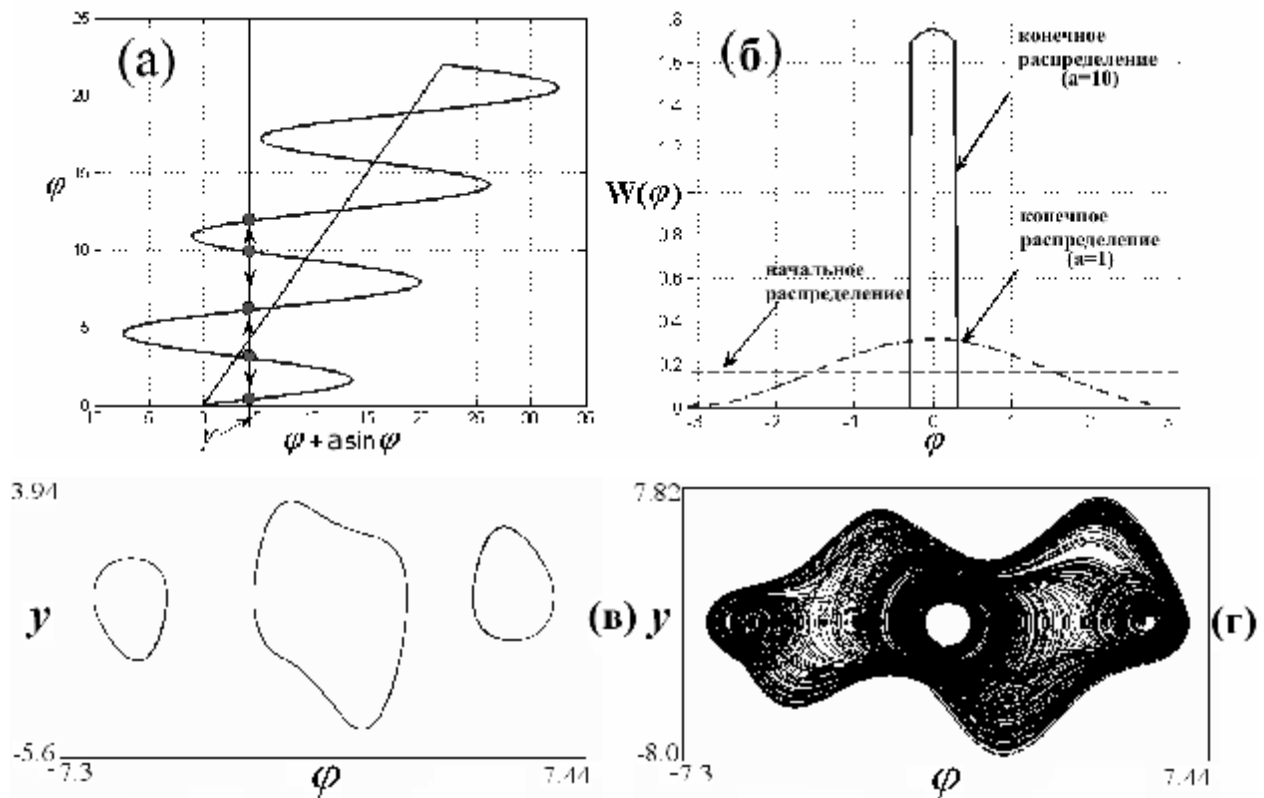


Рис. 1.2. а – состояния равновесия системы (1.11) при  $a=12$ , б – функции распределения разности фаз; в, г – регулярные (в) и хаотический (г) автомодуляционные режимы системы (1.15):  $a=10, \gamma=0.5, a_1=0.1, a_2=0.25, b_1=1.1, b_2=1, b_3=0.63$  (в),  $b_3=1$  (г)

Для демонстрации автомодуляционных режимов в кольце управления системы автоматической фазовой коррекции рассмотрим фильтр с коэффициентом передачи  $K(p)=(1+a_1p+a_2p^2)/(1+b_1p+b_2p^2+b_3p^3)$ . Как было показано в [4], фильтр с таким коэффициентом передачи является простейшим, когда в системе (1.8) при  $\tau=0$  будут возможны автомодуляционные режимы. Математическая модель системы в данном случае может быть записана так:

$$\begin{aligned}
 \dot{j} &= y, \\
 \dot{y} &= z, \\
 b_3 \dot{z} &= g - j - a \sin j - (b_1 + a_1 a \cos j - a_2 a y \sin j) y - (b_2 + a_2 a \cos j) z.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Результаты исследования динамики системы (1.15), представленные в [4], свидетельствуют о существовании сложных как регулярных, так и хаотических режимов. На рис. 1.2в представлен мультистабильный режим, когда в фазовом пространстве системы (1.15) существует три устойчивых предельных цикла; на рис. 1.2г представлена проекция хаотического аттрактора. Отметим, что существование хаотических

автомодуляционных режимов дает возможность для реализации различных способов скрытой передачи информации на основе динамического хаоса в таких системах [6].

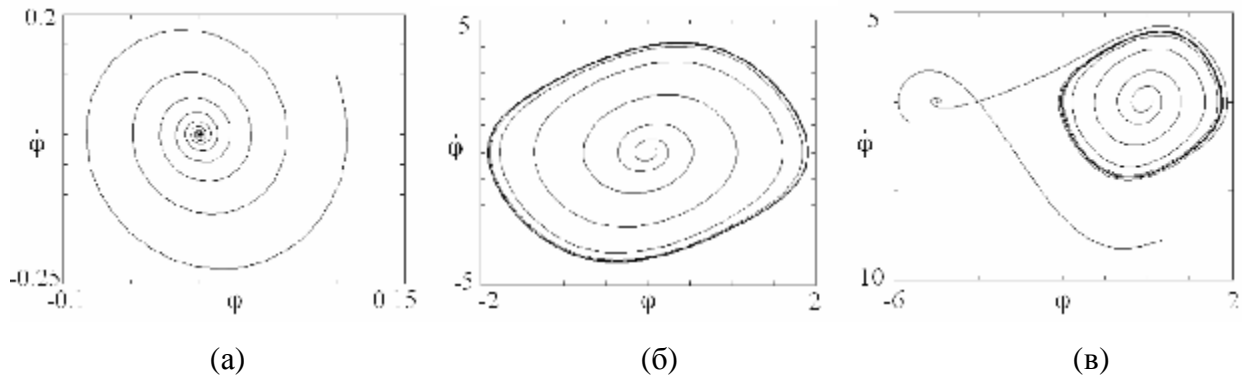


Рис. 1.3. Примеры аттракторов в модели системы автоматической фазовой коррекции с учетом запаздывания в кольце управления. Единственное состояние равновесия устойчивое (соответствует основному режиму фазирования)  $g = 0, a = 3, t < T_1/a$  (а); единственный аттрактор – предельный цикл (автомодуляционный режим)  $g = 0, a = 3, t > T_1/a$  (б); бистабильный режим  $g = -0.5, a = 3, t > T_1/a$  (в).

Рассмотрим теперь влияние задержки в кольце управления на динамику системы автоматической фазовой коррекции. В случае малой задержки справедливо разложение:  $\exp(-p\tau) \approx 1 - p\tau$ . Пусть коэффициент передачи фильтра:  $K(p) = 1/(1 + T_1 p + T_2 p^2)$ , тогда после замены  $t \rightarrow t/T_2^{1/2}$ , из уравнения (1.8) можно получить:

$$\begin{aligned} \dot{j} &= y, \\ \dot{y} &= g - j - a \sin j - y(d - aq \cos j). \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $d = T_1/T_2^{1/2}$ ,  $q = \tau/T_2^{1/2}$ . В случае если задержка  $\tau < T_1/a$  (рис. 3а), тогда динамика системы (1.16) похожа на динамику (1.11) (в фазовом пространстве существуют только состояния равновесия, координаты которых такие же, как и для системы (1.11)). При  $\tau > T_1/a$  (рис. 3б, 3в) состояние равновесия, соответствующее основному режиму фазирования, теряет устойчивость и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова-Хопфа). Если в системе существуют другие устойчивые состояния равновесия, то дальнейшее увеличение задержки также приводит к рождению устойчивых предельных циклов в их окрестности. Таким образом, задержка в кольце управления может приводить к возбуждению колебаний, которые негативно повлияют на точность фазирования.

## Фазирование в решетках волоконных усилителей

Во введении к данной главе была кратко описана общая схема использования метода активной фазовой коррекции для решения задачи когерентного сложения непрерывного лазерного излучения. Для автоматической подстройки фаз можно использовать один оптический сигнал в качестве опоры и независимо корректировать фазу в каждом волокне относительно фазы опорного сигнала [1] либо организовывать взаимные связи и подстраивать фазу в каждом волокне относительно фаз излучения на выходе соседних волокон. В первом случае необходима реализация для каждого волокна в отдельности системы фазового управления, аналогичной системе, представленной на рис. 1. Тогда в случае реализации в кольцах управления интегратора ( $K(p)=1/Tp$ ) теоретически возможно обеспечение полной синфазности излучения на выходе волокон. В случае низкочастотных фильтров первого и более высоких порядков имеет место ошибка фазирования, связанная с остаточной разностью фаз в каждом волокне, дисперсия этой ошибки может быть оценена с помощью соотношения (1.14). Недостатком системы автоматической подстройки фазы относительно одного опорного сигнала является сложность реализации в случае большого количества волоконных усилителей.

Рассмотрим вариант организации взаимных связей для решения задачи фазирования. Допустим, что возможно организовать взаимные электрооптические связи между волоконными усилителями аналогично тому, как это представлено на рис. 1.1. В таком случае математическая модель, описывающая фазовую динамику в ансамбле усилителей с локальными электрооптическими цепями управления, может быть записана следующим образом:

$$j_i + a \exp(-pt) K(p) \sum_{j=1, j \neq i}^N s_{ij} \cos(j_i - j_j - \psi_{ij}) = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

где  $s_{ij}$  – элементы матрицы связи,  $\psi_{ij}$  – константы связи. Допустим возможность организации связи таким образом, что для  $i, j=1, 2, \dots, N$ ,  $\psi_{ij}=\pi/2$ . Для оценки точности фазирования в рассматриваемом ансамбле будем использовать, аналогично [7], следующую характеристику:

$$r_j = \frac{1}{N} \left| \sum_{m=1}^N e^{ij_m} \right|. \quad (18)$$

Значение  $r_\varphi = 1$  соответствует равенству фаз на выходе всех волоконных усилителей. На рис. 1.3 представлена зависимость величины  $r_\varphi$  от значения параметра  $a$  для различных топологий связи (рассматриваются только локальные связи).

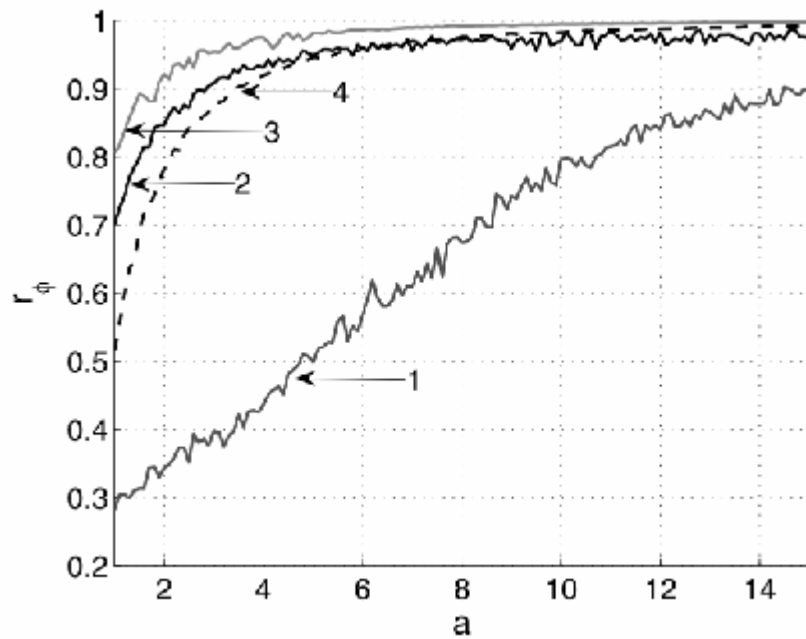


Рис. 1.4. Зависимость величины  $r_\phi$  от параметра  $a$  для модели (1.17) ( $\tau=0$ ,  $K(p)=1/(1+Tp)$ ). 1 – цепочка ( $N=16$ ), 2 – квадратная решетка ( $N=16$ ), 3 – гексагональная решетка ( $N=19$ ), 4 – результат для фазовой автоподстройки относительно опорного сигнала ( $N=16$ )

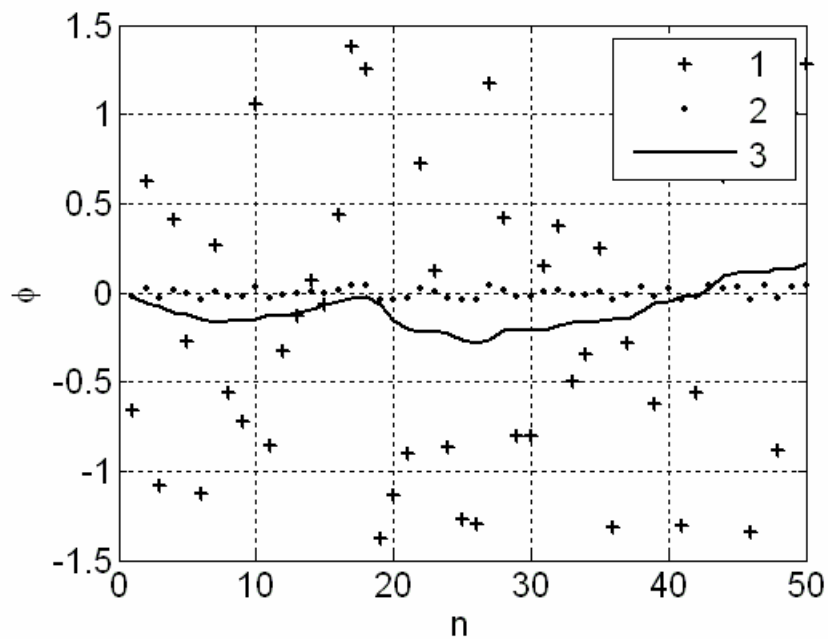


Рис. 1.5. 1 – начальные значения фаз на выходе элементов решетки, 2 – результирующие значения фаз в случае фазирования с использованием опорного канала, 3 – результирующее распределение фаз в случае использования локальных взаимных связей (топология цепочки)

Результаты численного счета свидетельствуют о том, что увеличение количества связей у каждого элемента ансамбля приводит к повышению точности фазирования, которая может быть даже выше точности фазирования при подстройке всех усилителей относительно одного опорного оптического сигнала. На рис. 1.5 представлены начальное и результирующие распределения фаз для схем фазирования с помощью подстройки под опорный сигнал и с помощью организации взаимных связей.

В данной главе была рассмотрена схема системы автоматической фазовой коррекции оптоволоконного усилителя и получена математическая модель для этой схемы. Анализ стационарных состояний математической модели свидетельствует о возможности управления точностью фазирования. Показано, что задержка в кольце управления приводит к возникновению автомодуляционных режимов, которые нарушают режим фазирования. Результаты численного моделирования ансамбля усилителей с локальными цепями управления при подстройке относительно одного опорного сигнала и при подстройке с помощью взаимных связей свидетельствуют о возможности достижения высокой точности фазирования в обоих случаях.

## КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ФАЗИРОВАНИЯ

Фазированные антенные решетки нашли широкое применение в радиолокации и системах связи. В стандартных фазированных решетках когерентность излучения в каждом элементе достигается путем использования одного задающего генератора, излучение от которого подается на каждый элемент антенны через распределительную сеть [Utkin]. Перед каждым элементом располагается фазовращатель и, как правило, усилитель, поскольку получить необходимую мощность от одного генератора трудно. К тому же, могут быть существенными потери в распределительной сети и фазовращателях. В антенных решетках большой мощности, когда в каждом канале используются усилители с высоким коэффициентом усиления, имеет место нестабильность фазы. Для стабилизации фазы применяются системы фазовой автоподстройки усиления [5]. Интересно отметить, что схема фазирования с использованием колец фазовой автоподстройки на данный момент является одной из наиболее перспективных схем в задаче когерентного суммирования непрерывного лазерного излучения [1, 8]. К недостаткам стандартной схемы фазирования, описанной выше, относится ее высокая стоимость, во многом связанная с дороговизной фазосберегающих кабелей и разветвителей в распределительной сети, а также фазовращателей, что несколько ограничивает области приложений, в которых могла бы использоваться эта схема.

На данный момент беспроводные системы связи развиваются в направлении широкого использования антенных решеток, smart-антенн, в связи с чем реализация дешевых и эффективных фазированных антенных решеток является важной и актуальной проблемой. Один из наиболее интересных альтернативных подходов к проблеме фазирования, который интенсивно исследуется последние пятнадцать лет, можно определить как нелинейное фазирование в активных антенных решетках, и связан он с использованием эффектов нелинейной динамики связанных генераторов. Общее преимущество почти всех схем нелинейного фазирования заключается в том, что они не требуют использования фазовращателей в каждом элементе, а также в некоторых схемах нет необходимости в радиочастотной распределительной сети и подведении управляющих сигналов к каждому элементу. Напомним, что в активных антенных решетках каждый элемент содержит генератор, поэтому кроме обеспечения необходимых фазовых соотношений между элементами решетки так же необходимо обеспечить синхронизацию генераторов. Идея



осуществления фазирования заключается в управлении фазовыми распределениями в ансамбле синхронизированных генераторов с помощью управления параметрами этих генераторов или параметрами связей между ними. При этом для обеспечения синхронизации возможно использование различных топологий и схем связи. Самый простой способ организации связи для осуществления синхронизации генераторов – это инжектирование сигнала от одного генератора в другой. Многие схемы нелинейного фазирования впервые были предложены и экспериментально реализованы именно для данного типа связи [10 – 12]. Однако такой способ накладывает существенное ограничение на ширину полосы частот для сигналов, так как синхронизация генераторов возможна только в узкой полосе частот, следовательно, такие схемы могут использоваться только в узкополосных системах связи. Существенно расширить полосу частот можно, если использовать кольца фазовой автоподстройки частоты для организации связей между генераторами. Системы фазовой автоподстройки (фазовые системы) являются неотъемлемой частью в современных системах связи, они способны работать как на низких, так и на сверхвысоких частотах, могут быть использованы для синхронизации мощных генераторов. Важно отметить, что фазовые системы обладают фильтрующими свойствами и способствуют снижению фазовых шумов.

Идея использования коллективной динамики ансамблей связанных систем фазовой автоподстройки для управления фазовыми распределениями в антенных решетках была высказана в книге [17]. Однако рассмотренные в книге ансамбли не позволяют получить точное градиентное распределение фаз в элементах, и пределы, в которых можно управлять фазовыми сдвигами, довольно малы. В то же время использование специальных структур связей позволяет достичь синхронного режима в ансамбле с необходимым распределением фаз [18–21]. Динамика ансамблей связанных систем фазовой автоподстройки является качественно более сложной в сравнении с динамикой одной системы фазовой автоподстройки. Объединение фазовых систем с регулярной динамикой может привести к возбуждению в них хаотических колебаний, таких как квазисинхронные хаотические колебания и хаотические биения. Регулярные и хаотические автомодуляционные режимы в системах фазовой автоподстройки являются паразитными и не используются в обычных системах связи. Для рассматриваемой нами задачи нелинейного фазирования эти режимы так же являются нерабочими. С другой стороны хаотические режимы могут представлять интерес с точки зрения возможных приложений в широкополосной радиолокации [27 – 30] и системах связи, основанных на динамическом хаосе [6]. Подробнее о хаотической динамике ансамблей связанных

фазовых систем, свойствах генерируемых в них хаотических колебаний и о возможных приложениях можно узнать в следующей главе.

В данной главе рассмотрены некоторые методы нелинейного фазирования в активных антенных решетках, которые представляются наиболее интересными с точки зрения практического использования. В качестве базового элемента предлагается использование генератора с кольцом фазовой автоподстройки частоты. В каждом методе для простоты рассматривается модель одномерной антенной решетки, при этом результаты довольно просто могут быть обобщены на двумерный случай.

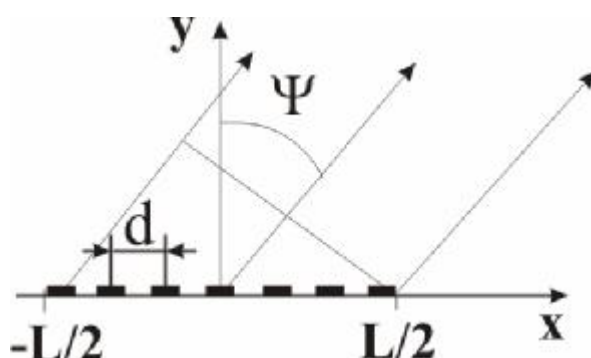


Рис. 2.1. Отклонение луча в фазированной антенной решетке при градиентном распределении фаз.

Для отклонения диаграммы направленности на угол  $\Psi$  от нормали к плоскости антенны (рис. 2.1) необходимо обеспечить в элементах решетки градиентное распределение фаз:

$$f_n - f_{n-1} = -2p \frac{d}{l} \sin \Psi = q, \quad n = \overline{2, N}. \quad (2.1)$$

Здесь  $f_n$  – фаза колебаний в  $n$ -ом элементе решетки,  $d$  – пространственный период решетки,  $\lambda$  – длина волны излучения. Таким образом, задача фазирования активной антенной решетки заключается в синхронизации генераторов и обеспечения градиентного (или близкого к нему) распределения фаз (2.1) в элементах решетки.

### Генератор с цепью фазовой автоподстройки, уравнение модели.

В качестве базового элемента для схем нелинейного фазирования в активных антенных решетках рассмотрим генератор с кольцом фазовой автоподстройки частоты, представленный на рис. 2.2а. На данном рисунке: ФД – фазовый дискриминатор, Ф – фильтр низких частот, УЭ – управляющий элемент, который изменяет частоту генератора пропорционально входному напряжению. Управляющий элемент имеет дополнительный вход для внешнего управления собственной частотой подстраиваемого генератора.

Уравнение, описывающее динамику системы фазовой автоподстройки частоты [9], может быть записано следующим образом:

$$w(t) = w_0 - \Omega K(p) F(f - f_{o.г.}),$$

$$\frac{df}{dt} = w(t), \quad \frac{df_{o.г.}}{dt} = w_{o.г.} \quad (2.2)$$

Где  $w(t)$  – частота управляемого генератора,  $w_0$  – начальная частота управляемого генератора,  $w_{o.г.}$  – частота генератора опорных колебаний,  $f$  – полная фаза колебаний на выходе управляемого генератора,  $f_{o.г.}$  – полная фаза опорного сигнала на входе фазовой системы,  $\Omega$  – максимальная разность начальной частоты управляемого генератора и опорного сигнала, при которой возможна синхронизация управляемого генератора.  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра низких частот,  $p=d/dt$  – оператор дифференцирования,  $F(f-f_{o.г.})$  – нормированная характеристика фазового дискриминатора (рис. 1б).

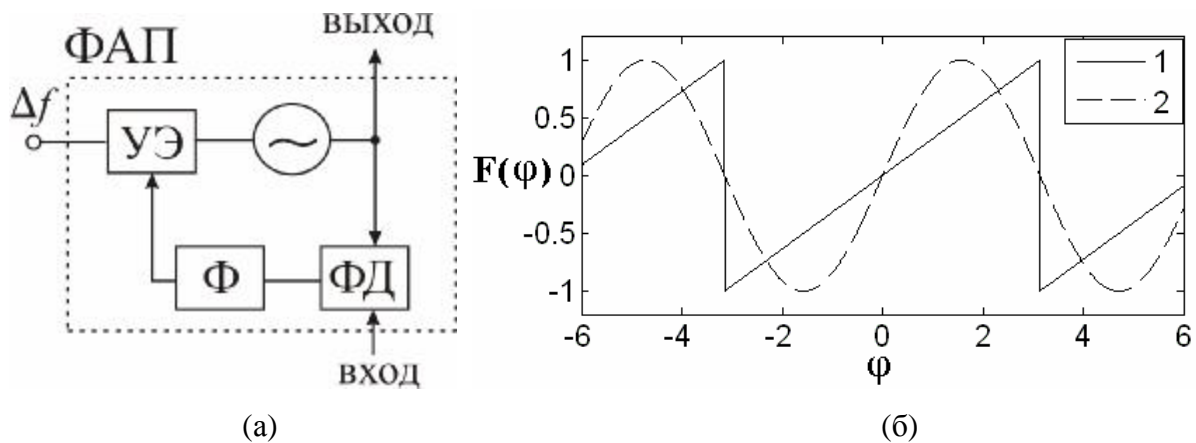


Рис. 2.2. а – схема генератора с цепью фазовой автоподстройки частоты (ФАП), б – возможные характеристики фазового дискриминатора: 1 – синусоидальная характеристика, 2 – пилообразная характеристика.

Функция  $F(j)$  обладает следующими свойствами:  $F(j) = F(j + 2p)$ ,  $F(j) = -F(-j)$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $\max F(j) = 1$ ,  $\min F(j) = -1$ , на отрезке  $j \in [0, p]$  функция имеет единственный максимум. Таким образом, функция  $F(j)$  описывает широкий класс физически реализуемых фазовых дискриминаторов.

Динамика системы (2.2) главным образом определяется сложностью фильтра в кольце управления. Будем рассматривать случай фильтра первого порядка с коэффициентом передачи:

$$K(p) = \frac{1}{1+Tp}, \quad (2.3)$$

где  $T$  – постоянная времени фильтра. В таком случае уравнение, описывающее динамику фазовой системы, может быть записано следующим образом:

$$e \frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{dj}{dt} + F(j) = g, \quad (2.4)$$

где  $j = f - f_{0.r.}$ ,  $t = \Omega t$  – безразмерное время,  $g = (w_0 - w_{0.r.})/\Omega$  – относительная начальная частотная расстройка,  $\varepsilon = \Omega \cdot T$ . Кроме системы фазовой автоподстройки уравнение (2.4) также описывает динамику маятника с трением под действием постоянного внешнего момента силы, динамику сверхпроводящего Джозефсоновского контакта и другие системы.

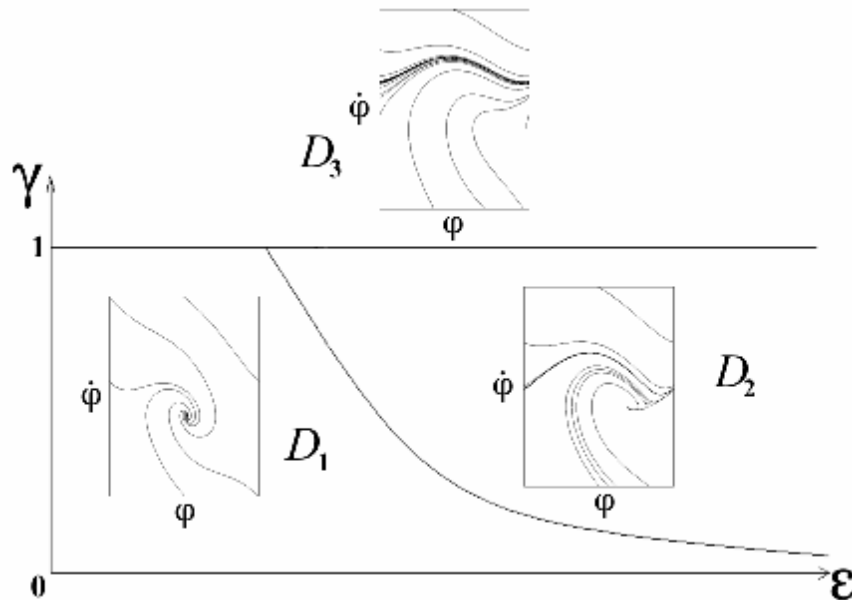


Рис. 2.3. Разбиение пространства параметров и различные фазовые портреты системы (2.4).

Пространство параметров системы (2.2) можно разбить на три области  $D_{1,2,3}$ , качественно представленные на рис. 2.3. В области  $D_1$  единственным аттрактором на поверхности  $(j, dj/dt)$  модели (2.4) является устойчивое состояние равновесие, которое соответствует синхронному режиму работы фазовой системы. В области  $D_3$  единственный аттрактор – это вращательный предельный цикл, охватывающий цилиндр, в этом случае реализуется режим биений. В области  $D_2$  система является бистабильной, в зависимости от начальных условий реализуется либо синхронный режим, либо режим биений. Граница областей  $D_2$  и  $D_3$  соответствует седло-узловой бифуркации исчезновения состояний равновесия ( $\gamma = 1$ ),

переход между  $D_1$  и  $D_3$  осуществляется через бифуркацию петли сепаратрис седло-узла. Граница между областями  $D_1$  и  $D_2$  определяется бифуркацией петли сепаратрис седла.

Система фазовой автоподстройки с фильтром первого порядка (2.3) является статической по фазе. Это означает, что в режиме синхронизации имеет место ненулевая остаточная разность фаз между сигналами на входе и выходе фазовой системы. Величина фазового сдвига определяется координатой устойчивого состояния равновесия уравнения (2.4):

$$\begin{cases} F(j^s) = g, \\ F'(j^s) > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

В случае стандартного фазового дискриминатора, характеристика которого является синусоидальной (рис. 1б), фазовый сдвиг равен:  $j^s = \arcsin g$ . Таким образом, путем изменения частоты подстраиваемого генератора  $\omega_0$  в пределах полосы синхронизации  $|\omega_0 - \omega_{0.r.}| < \Omega$  ( $|g| < 1$ ) можно управлять фазовым сдвигом на выходе в пределах  $(-p/2, p/2)$ . Максимальный фазовый сдвиг осуществляется, когда собственная частота управляемого генератора находится на границе полосы синхронизации. В этом случае возрастает вероятность потери синхронизации и перехода в режим биений под воздействием внутренних шумов системы.

Пределы управления фазой можно увеличить, если использовать фазовый дискриминатор со специальной характеристикой, имеющей положительный наклон в большей области изменения разности фаз, например дискриминатор с пилообразной характеристикой (рис. 2.2б):

$$F(j) = \frac{1}{p} [(j + p) \bmod 2p - p]. \quad (2.6)$$

В случае такого дискриминатора можно управлять фазовым сдвигом в интервале  $(-p, p)$ .

Стоит отметить, что соотношение (2.5), описывающее стационарный сдвиг фаз в системе (2.4), остается справедливым и для фазовых систем с более сложными фильтрами низких частот, имеющих коэффициент передачи вида:

$$K(p) = \frac{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}, \quad n, m \geq 0, \quad a_{1\dots n}, b_{1\dots m} \geq 0. \quad (2.7)$$

Однако уже в случае фильтра второго порядка существует область параметров, внутри которой состояние равновесия (2.5) становится неустойчивым (потеря устойчивости происходит в результате бифуркации Андронова-Хопфа [9]).

## Метод фазирования на основе синхронизации генераторов общим опорным сигналом.

Рассмотрим наиболее простую структуру схемы синхронизации и управления фазовыми распределениями в активных антенных решетках (рис. 2.4). В данном случае сигнал от одного опорного генератора используется для синхронизации генераторов в элементах антенной решетки с помощью организации локальной цепи фазовой автоподстройки частоты для каждого генератора. Предполагается, что связью генераторов через внешнее поле можно пренебречь. В каждом элементе антенны управление фазовым сдвигом осуществляется с помощью управления частотной расстройкой генератора.

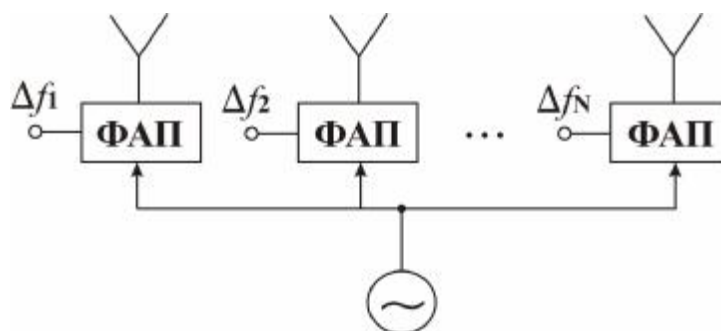


Рис. 2.4. Схема фазирования нескольких генераторов с помощью автоматической фазовой подстройки под один опорный сигнал (ФАП – генератор с кольцом фазовой автоподстройки частоты).

Представленная схема является наиболее интересной с точки зрения задачи когерентного суммирования мощностей. В работе [#PowComb] представлен результат по когерентному суммированию излучения для решетки 4x4 с топологией связи как на рис. 2.4 (однако в этой работе синхронизация осуществляется с помощью простого инжектирования сигнала без использования фазовой автоподстройки частоты).

Для осуществления поворота диаграммы направленности в достаточно больших пределах (представляющих практический интерес) необходимо, чтобы в каждом элементе была возможность осуществления фазового сдвига во всем интервале  $(-p, p)$ . Для осуществления такого сдвига нужно использовать фазовый дискриминатор со специальной характеристикой как, например пилообразная характеристика (2.6).

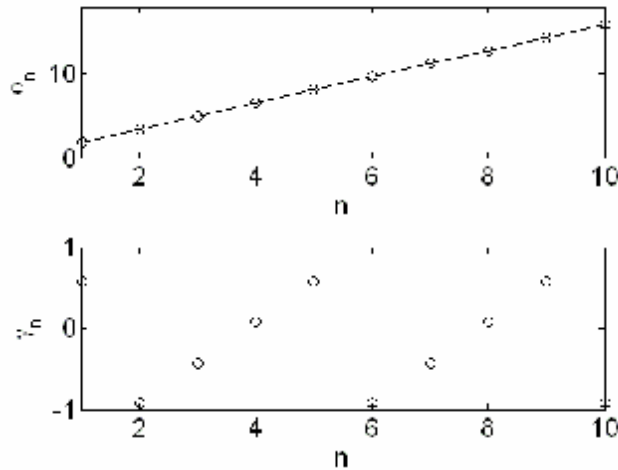


Рис. 2.5. Градиентное распределение фаз (а) и соответствующее распределение управляющих параметров (относительных начальных частотных расстройк генераторов) (б).

На рис. 2.5 представлен пример градиентного распределения фаз в рассматриваемой схеме и необходимое распределение частотных расстройк в случае пилообразной характеристики фазового дискриминатора.

К сожалению, на данный момент не известно, есть ли результаты по управлению поворотом луча в решетках с топологией связи, представленной на рис. 3

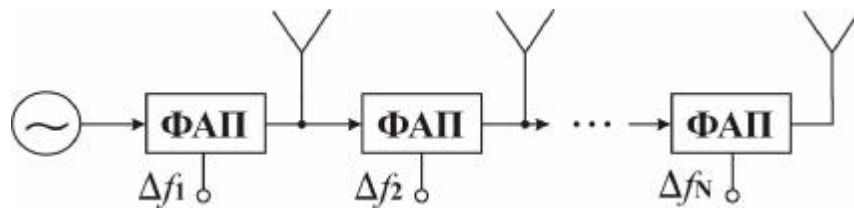


Рис. 2.6. Схема каскадного соединения фазоуправляемых генераторов.

### Каскадное соединение фазовых систем.

Использование топологии с однонаправленными связями или каскадное соединение фазоуправляемых генераторов (рис. 2.6) является развитием предыдущего метода фазирования. Так как в каждом фазоуправляемом генераторе можно управлять фазовым сдвигом, то каскадное соединение таких генераторов автоматически позволяет получить градиентное распределение фаз. Модель цепочки каскадно-связанных фазовых систем с фильтрами первого порядка в кольцах управления (2.4) описывается следующей системой уравнений:

$$e^{j\varphi_n} + j_n + F(j_n - j_{n-1}) = g, \quad n = \overline{1, N} \quad (2.8)$$

$$j_0 = 0.$$

Здесь  $j_n$  – разность фаз колебаний на выходе  $n$ -го генератора и опорного сигнала. В данном случае рассматривается однородная цепочка, то есть все элементы одинаковые с одинаковыми параметрами. Состояние равновесия системы (2.8) с градиентным распределением фазовых сдвигов:

$$\begin{aligned} j_n^s - j_{n-1}^s &= q, \quad n = \overline{2, N}, \\ j_1^s &= q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где постоянная разность фаз  $q$  между соседними элементами цепочки определяется уравнением:

$$\begin{cases} F(q) = g, \\ F'(q) > 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Состояние равновесия с градиентным распределением фаз (2.9) существует, если  $|g| < 1$ , то есть собственные частоты генераторов находятся внутри полосы синхронизации. Покажем устойчивость такого состояния равновесия системы (2.8). Матрица линеаризации является блочной треугольной, в силу однонаправленности связи. Ее определитель равен произведению определителей блоков на диагонали:

$$\begin{vmatrix} -I & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \\ -\frac{1}{e}F'(q) & -\frac{1}{e}I & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & -I & 1 & 0 & \mathbf{L} \\ \frac{1}{e}F'(q) & 0 & -\frac{1}{e}F'(q) & -\frac{1}{e}I & 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} -I & 1 \\ -\frac{1}{e}F'(q) & -\frac{1}{e}I \end{matrix} \right|^N = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, характеристическое уравнение и показатели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (I^n)^2 + \frac{1}{e}I^n + \frac{1}{e}F'(q) &= 0, \\ I_{1,2}^n &= -\frac{1}{2e} \pm \sqrt{\frac{1}{4e^2} - \frac{1}{e}F'(q)}, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как для рассматриваемого состояния равновесия  $F'(\theta) > 0$ , то оно является устойчивым ( $\text{Re } \lambda_{1,2}^n < 0, 1 \leq n \leq N$ ) во всей области существования ( $|g| < 1, \varepsilon > 0$ ).

Для управления поворотом диаграммы направленности необходимо управлять собственными частотами в каждом подстраиваемом генераторе, устанавливая в каждом элементе одинаковую частотную расстройку. Так же возможен более простой вариант управления, когда изменяется частота опорного сигнала при фиксированных одинаковых начальных частотах генераторов в цепочке. Однако в этом случае частота излучаемого сигнала будет так же изменяться. Схема фазирования с помощью цепочки



однонаправлено-связанных генераторов, связанных без колец фазовой автоподстройки, была рассмотрена в работе [10].

Отметим, что при использовании стандартного фазового дискриминатора с синусоидальной характеристикой фазовый сдвиг между соседними элементами может изменяться в пределах  $(-p/2, p/2)$ . Если пространственный период антенной решетки составляет половину длины волны излучения, то поворот диаграммы направленности в соответствии с (2.1) может быть осуществлен в пределах  $\pm 30^\circ$ . Такой интервал изменения может быть вполне достаточным для некоторых приложений. Для увеличения пределов изменения фазовых сдвигов можно использовать фазовые дискриминаторы со специальной характеристикой (например (2.6)) либо, как это было предложено в работе [24], можно использовать на выходе каждого генератора умножители частоты, которые также приводят к умножению межэлементных фазовых сдвигов. Однако второй подход имеет ряд недостатков таких как: усложнение схемы и усиление фазового шума.

#### **Организация взаимных связей с помощью колец фазовой автоподстройки.**

В данной части главы рассматриваются схемы нелинейного фазирования, основанные на использовании коллективной динамики генераторов с взаимными связями, образованными с помощью колец фазовой автоподстройки. Как уже говорилось, идея использования связанных систем фазовой автоподстройки для управления фазовыми распределениями, в том числе и в антенных решетках была высказана в работе [17]. Однако изложенные в книге исследования не носили конкретный прикладной характер. Представленные в книге фазовые распределения не являются строго градиентными и фазовые сдвиги между соседними элементами достаточно малы. Конкретные схемы для задачи фазирования в антенных решетках изначально были предложены не для связанных систем фазовой автоподстройки, а для взаимосвязанных генераторов, связь в которых осуществлялась через внешнее поле либо с помощью взаимного инжектирования сигналов между соседними элементами.

Работа [13, 14] является одной из первых, где была предложена схема взаимосвязанных генераторов для решения задачи фазирования. Согласно этой схеме генераторы на концах цепочки синхронизованы одним опорным генератором. В связь между опорным генератором и одним из генераторов на конце вносится задержка для управления фазовым сдвигом. Таким образом, если собственные частоты всех генераторов одинаковые, то вдоль цепочки устанавливается градиентное распределение фаз с максимальной разницей фаз между соседними элементами:  $\theta = \pi/(N+1)$ , где  $N$  – количество элементов в цепочке.



После фильтра низких частот сигнал поступает на управляющий элемент, который изменяет частоту генератора пропорционально входному напряжению, при этом допустим, что частота управляемого генератора может изменяться в пределах  $[\omega_n^0 - 2\Omega, \omega_n^0 + 2\Omega]$  ( $\omega_n^0$  – частота генератора с номером  $n$  при нулевом напряжении на входе управляющего элемента). Пусть  $f_n$  – фаза колебаний на выходе  $n$ -го генератора ( $1 \leq n \leq N$ ). Представим уравнения, описывающие динамику фаз управляемых генераторов [17, #CPLLA4], в переменных разности фаз  $\varphi_n = f_n - f$ , отсчитываемых относительно вращающейся с постоянной частотой  $\omega$  фазы  $f$  ( $df/dt = \omega = const$ ):

$$pj_n + K(p)[k_n \cos(j_n - j_{n+1} - \Phi_n) + d_n \cos(j_n - j_{n-1} + \Phi_{n-1})] = g_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.11)$$

$$j_0 = j_1, \quad j_{N+1} = j_N, \quad \Phi_0 = p/2, \quad \Phi_N = p/2.$$

Здесь  $p = d/d\tau$  – оператор дифференцирования,  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время,  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра вида (2.7),  $\gamma_n = (\omega_n^0 - \omega)/\Omega$  – относительная начальная расстройка частоты  $n$ -го генератора,  $k_n, \delta_n$  – величины связи ( $0 \leq k_n \leq 1, 0 \leq \delta_n \leq 1$ ),  $\Phi_n$  – значение фазового сдвига в фазовращателе в цепи связи между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м генераторами.

Рассмотрим случай постоянных фазовых сдвигов в фазовращателях. Пусть  $\Phi_n = \pi/2$ , а также пусть  $k_n = k, \delta_n = \delta$  ( $1 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$ ), тогда система уравнений (2.11) примет вид:

$$pj_n + K(p)[k \sin(j_n - j_{n+1}) + d \sin(j_n - j_{n-1})] = g_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.12)$$

$$j_0 = j_1, \quad j_{N+1} = j_N.$$

Режиму синхронизации в системе (2.12) с градиентным распределением фаз  $\varphi_n = n \cdot \theta$ ,  $1 \leq n \leq N$ , соответствует состояние равновесия, которое существует, если выполняются следующие соотношения:

$$g_1 = -k \sin q, \quad g_N = d \sin q, \quad g_n = (d - k) \sin q, \quad n = \overline{2, N-1}. \quad (2.13)$$

Как видно из (2.13) для осуществления изменения фазового сдвига можно в равной степени либо управлять частотными расстройками при фиксированных параметрах связи, либо управлять величинами связей при фиксированных частотных расстройках. Отметим, что в данной модели возможен частный случай однонаправленной связи (например,  $k=0, \delta \neq 0$ ), рассмотренный выше.

Рассмотрим другой частный случай, когда связь симметричная ( $k=\delta \neq 0$ ). Тогда искомое градиентное распределение существует при  $\gamma_n=0, 2 \leq n \leq N-1, \gamma_1 = -\gamma, \gamma_N = \gamma, |\gamma| < \delta$ , то есть расстройку по частоте имеют только генераторы на концах цепочки, остальные генераторы имеют начальную частоту, равную  $\omega$ . Таким образом, для осуществления

поворота диаграммы направленности достаточно управлять параметрами двух генераторов на концах цепочки. При этом все генераторы синхронизованы на частоте  $\omega$  и разность фаз между соседними элементами определяется уравнением:  $\sin\theta = \gamma/\delta$ .

Покажем локальную устойчивость состояния равновесия системы (2.12), соответствующего градиентному распределению фаз  $\varphi_n = n \cdot \theta$ ,  $1 \leq n \leq N$ . При этом ограничимся случаем фильтра первого порядка в кольце управления с коэффициентом передачи  $K(p) = 1/(1 + \varepsilon p)$  ( $\varepsilon = \Omega T > 0$ ,  $T$  – постоянная времени фильтра). Тогда система уравнений, описывающая динамику рассматриваемой модели, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} j_n + j_{n+1} + k \sin(j_n - j_{n+1}) + d \sin(j_n - j_{n-1}) &= g_n, \quad n = \overline{1, N}, \\ j_0 &= j_1, \quad j_{N+1} = j_N, \\ g_1 &= -g, \quad g_N = g, \quad g_n = 0, \quad n = \overline{2, N-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим малое возмущение стационарного распределения фаз:  $\varphi_n = n \cdot \theta + \eta_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Подставляя это решение в (2.14) получим линеаризованную в окрестности состояния равновесия систему:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} h_n + h_{n+1} &= \cos q (k h_{n+1} - (k + d) h_n + d h_{n-1}), \quad n = \overline{1, N}, \\ h_0 &= h_1, \quad h_{N+1} = h_N. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для осуществления перехода к нормальным координатам для цепочки осцилляторов выполним две вспомогательные замены переменных. Вначале перейдем к переменным:

$$V = \sum_{n=1}^N h_n, \quad u_n = h_{n+1} - h_n, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (2.16)$$

Система уравнений для новых переменных имеет вид:

$$\begin{cases} e^{j\theta} V + V = 0, \\ e^{j\theta} u_n + u_n = \cos q (k u_{n+1} - (k + d) u_n + d u_{n-1}), \quad n = \overline{1, N-1}, \\ u_0 = u_N = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Из первого уравнения, которое независимо от других, находим два характеристических показателя:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1/\varepsilon$ . Нулевой характеристический показатель соответствует инвариантности системы уравнений относительно сдвига фаз во всех элементах на некоторое одинаковое значение. Осуществим еще одну вспомогательную замену переменных для матрицы связей к симметричному виду:

$$x_n = z^n u_n, \quad z = \sqrt{\frac{k}{d}}. \quad (2.18)$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$e^{\frac{pk}{N}} + \frac{pk}{N} = \cos q (\sqrt{kd} x_{n+1} - (k+d)x_n + \sqrt{kd} x_{n-1}), \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$x_0 = x_N = 0. \quad (2.19)$$

Теперь можно перейти к нормальным координатам:

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} A_k \sin \frac{pkn}{N}. \quad (2.20)$$

В результате получим  $N-1$  независимое уравнение:

$$e^{\frac{pk}{N}} + \frac{pk}{N} = -\cos q (k+d - 2\sqrt{kd} \cos \frac{pn}{N}) A_k, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (2.21)$$

Откуда находим остальные  $2N-2$  характеристических показателя:

$$I_{n,2} = -\frac{1}{2e} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{e^2} - \frac{4\cos q}{e} \left( k+d - 2\sqrt{kd} \cos \frac{pn}{N} \right)}, \quad n = \overline{1, N-1} \quad (2.22)$$

Из анализа характеристических показателей следует, что стационарное градиентное распределение фаз является устойчивым, если  $\varepsilon > 0$ ,  $\cos \theta > 0$ . Таким образом, в частном случае симметричной связи устойчивому решению соответствует фазовый сдвиг  $\theta = \arcsin(\gamma/\delta)$ . Отметим, что градиентное решение является локально устойчивым во всей области существования синхронного режима, при этом в устойчивом синхронном режиме можно управлять сдвигом фаз между соседними элементами в пределах:  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Такой предел изменения фазового сдвига является вполне приемлемым для осуществления управления поворотом диаграммы направленности в стандартных антенных решетках. На рис. 2.8 представлены две диаграммы направленности для двух различных значений управляющих параметров системы (2.14) в случае симметричных связей ( $k = \delta \neq 0$ ).

Как и для предыдущих схем нелинейного фазирования, основанных на использовании систем фазовой автоподстройки, возможно увеличение пределов управления поворотом диаграммы направленности с помощью использования фазовых дискриминаторов со специальной характеристикой (например (2.6)). Также можно использовать умножители частоты на выходе каждого генератора [24].

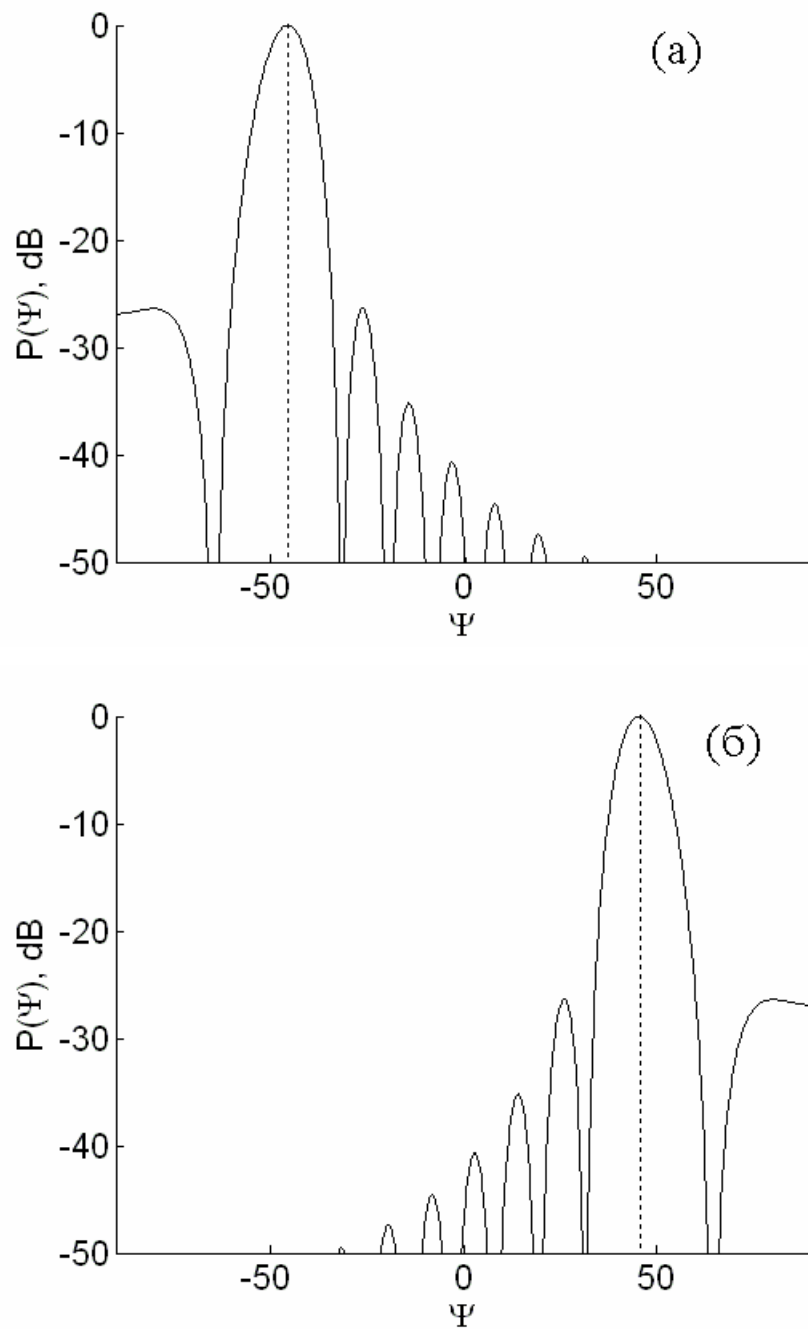


Рис. 2.8. Управление поворотом диаграммы направленности в антенной решетке с взаимными симметричными связями (2.14). Длина цепочки –  $5\lambda$ ,  $\gamma=-0.9$  (а),  $\gamma=0.9$  (б).

Перейдем теперь к рассмотрению еще одного интересного метода управления градиентным фазовым распределением в цепочке генераторов с взаимными локальными связями, образованными с помощью колец фазовой автоподстройки, который основан на управлении константами фазовой связи. Вернемся к исходной модели (2.11), в которой будем считать, что собственные частоты всех генераторов совпадают, то есть

относительные частотные расстройки  $g_n=0$ ,  $1 \leq n \leq N$ , коэффициенты силы связи:  $k_n=d_n=1$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Положим коэффициенты фазовой связи:

$$\Phi_n = \tilde{\Phi}_n + \frac{p}{2}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2.23)$$

Тогда система (2.11) примет вид:

$$pj_n + K(p)[\sin(j_n - j_{n+1} - \tilde{\Phi}_n) + d_n \sin(j_n - j_{n-1} + \tilde{\Phi}_{n-1})] = 0, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.24)$$

$$j_0 = j_1, \quad j_{N+1} = j_N, \quad \tilde{\Phi}_0 = 0, \quad \tilde{\Phi}_N = 0.$$

Будем предполагать, что коэффициент передачи фильтра  $K(p)$  имеет вид (2.7). Состояние равновесия системы (2.24) с градиентным распределением фаз  $j_n - j_{n-1} = q$  ( $2 \leq n \leq N$ ) существует, если все коэффициенты фазовой связи имеют одинаковое значение и равны:

$$\tilde{\Phi}_n = \Phi = -q, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (2.25)$$

Покажем устойчивость такого решения для случая фильтра первого порядка с коэффициентом передачи  $K(p) = 1/(1 + \epsilon p)$ . Прделав процедуру, аналогичную той, что была показана для предыдущего метода управления фазовыми распределениями, получим следующие характеристические показатели рассматриваемого состояния равновесия:

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{1}{e}, \quad (2.26)$$

$$I_{n,2} = -\frac{1}{2e} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{e^2} - \frac{16}{e} \sin^2 \left( \frac{pn}{2N} \right)} \quad n = \overline{2, N-1}$$

Все характеристические показатели кроме одного нулевого являются отрицательными во всей области допустимых значений параметров системы ( $e > 0$ ,  $\Phi \in \mathbf{R}$ ). Таким образом, градиентное распределение фаз  $j_n - j_{n-1} = q$  ( $2 \leq n \leq N$ ) является устойчивым, при этом фазовый сдвиг между соседними элементами может изменяться в пределах всего интервала:  $-p \leq q \leq p$ . Если расстояние между элементами антенной решетки составляет половину длины волны, то поворот диаграммы направленности может осуществляться в пределах:  $-p/2 \leq \Psi \leq p/2$ . Большой интервал управления, который реализуется без использования специальных схем фазовых дискриминаторов и метода удвоения частоты, является важным преимуществом данного способа. Важно отметить, что значение фазового сдвига  $q$  не влияет на устойчивость режима синхронизации, в отличие от методов управления частотными расстройками, когда для осуществления максимального фазового сдвига параметры устанавливаются вблизи бифуркационных значений и под воздействием малого шума синхронный режим может перейти в режим биений. К недостаткам данного метода можно отнести необходимость реализации управляемых

фазовращателей в кольцах фазовой связи генераторов, при этом необходимо одновременно управлять всеми фазовращателями (в отличие от метода управления частотными расстройками когда в случае симметричной связи достаточно изменять параметры только двух генераторов на концах цепочки).

Идея описанного выше метода управления с помощью констант фазовой связи была высказана в работе [26], где рассматривалась фазовая модель слабо связанных генераторов (связь с ближайшими соседями).

$$\dot{f}_n = w_n + \Omega[\sin(f_{n+1} - f_n + \Phi_{n+1,n}) + \sin(f_{n-1} - f_n + \Phi_{n-1,n})], \quad n = \overline{1, N} \quad (2.27)$$

Обычно фазовая связь между генераторами является симметричной, то есть матрица  $\Phi_{n,m}$  – симметричная ( $\Phi_{n,m} = \Phi_{m,n}$ ). Изначально метод управления коэффициентами фазовой связи был предложен как раз для этого случая в работе [25] и является развитием метода управления собственными частотами генераторов на концах цепочки. В работе [26] было проведено теоретическое обобщение на случай несимметричной фазовой связи. Интересно, что в рассмотренной нами схеме цепочки генераторов, связанных через кольца фазовой автоподстройки (рис. 2.7), реализуется случай антисимметричной фазовой связи,  $\Phi_{i,j} = -\Phi_{j,i}$  (2.24). Оказалось, что один из методов, описанный в [26], как раз подходит для этого случая. Принципиально возможна реализация двух других известных методов управления параметрами фазовой связи в ансамбле генераторов, связанных с помощью колец фазовой автоподстройки. Однако такая реализация потребует создания дополнительных колец фазовой автоподстройки, что усложнит систему и сделает ее громоздкой. Поэтому здесь не приводится описание этих методов, подробно о них можно узнать в работах [25, 26].

### **Скорость установления градиентных фазовых распределений.**

С точки зрения практического использования антенных решеток, фазирование в которых основано на организации специальных связей между элементами, критичным параметром является характерное время установления синхронного режима с необходимым фазовым распределением. В данной работе мы ограничимся линейной оценкой характерного времени установления синхронного режима:  $\tau^* \sim 1/\min|\lambda_{n1,2}|$ , где  $\lambda_{n1,2}$  – характеристические показатели (2.22), при этом положим  $\theta=0$ . В случае схемы однонаправленно-связанных генераторов (рис. 2.6, система (2.8) или система (2.14) при  $k=0, d=1$ ) характерное время установления синхронного режима во всей цепочке линейно пропорционально количеству элементов цепочки и времени установления стационарного



режима в одиночном элементе, которое связано с параметром инерционности цепи управления  $\varepsilon$ :  $\tau^* \sim (N-1) \cdot \varepsilon$ . В случае симметричной взаимной связи ( $k=\delta \neq 0$ ) при  $N < N_{th} \approx 2\pi\varepsilon^{1/2}$  время переходного процесса  $\tau^* \sim \varepsilon$ , при  $N >> N_{th}$ :  $\tau^* \sim N^2$ . Таким образом, при малой инерционности каждого элемента в случае однонаправленной связи время переходного процесса зависит линейно от количества элементов в цепочке, а в случае взаимной связи имеет место квадратичная зависимость. То есть однонаправленная связь должна давать преимущество в скорости установления синхронного режима. Однако при достаточно большой инерционности элементов ( $\varepsilon > N^2/(4p^2)$ ) в случае симметричной связи общее время переходного процесса во всей цепочке сравнимо со временем установления стационарного режима в отдельном элементе. И тогда скорость установления синхронного режима в цепочке симметрично-связанных генераторов выше, чем в цепочке однонаправленно-связанных генераторов. Количество элементов  $N = N_{th} \approx 2\pi\varepsilon^{1/2}$  является критическим для ансамбля с взаимными симметричными связями.

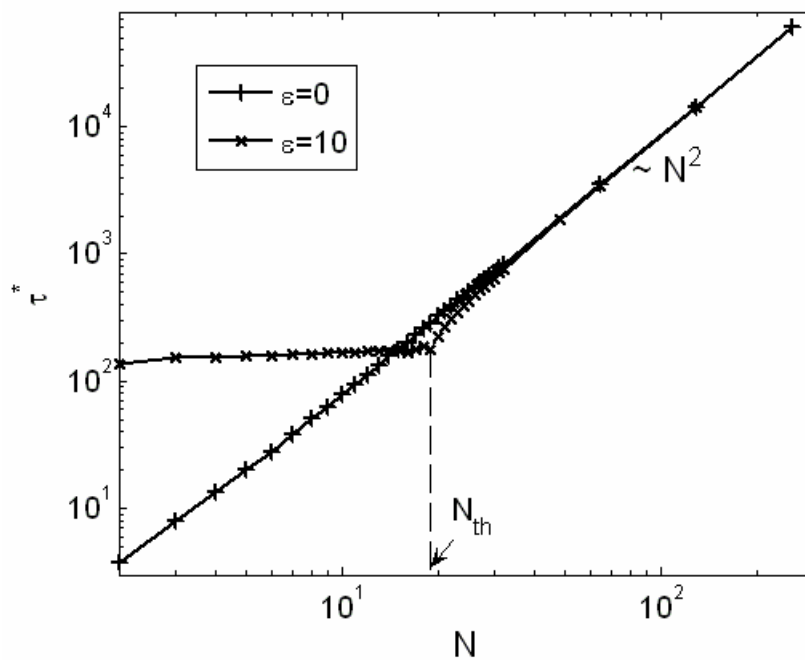


Рис. 2.9. Зависимость времени переходного процесса от размера цепочки при  $k=\delta=1$ ,  $\gamma=0$ .

При практическом выборе количества элементов в антенной решетке с взаимными связями, желательно, чтобы оно не сильно превышало это значение, иначе влияние коллективной динамики будет существенным, что приведет к значительному увеличению времени установления синхронного режима (тогда использование топологии каскадного соединения более предпочтительно).

На рис 2.9 представлен результат численного расчета времени установления стационарного распределения фаз с точностью  $10^{-3}$  ( $dj_n/dt < 10^{-3}$ ,  $1 \leq n \leq N$ ) в цепочке с симметричными взаимными связями. Время переходного процесса усреднялось по результатам численных экспериментов для 100 случайных начальных условий.

Перейдем теперь к исследованию влияния нелокальности связей на время установления синхронного режима. Как известно, элементы антенной решетки имеют между собой связь через внешнее поле, поэтому рассмотрение локальной связи является некоторым приближением. Здесь мы ограничимся качественным изучением влияния нелокальных связей на скорость синхронизации, основываясь на фазовой модели связанных генераторов. При этом рассмотрим связь с  $K$ -ближайшими соседями, которая соответствует топологии замкнутой цепочки (кольца) с симметричными нелокальными связями между элементами (рис. 2.10):

$$\dot{j}_n = g_n - \sum_{d=1}^K f(d)(\sin(j_n - j_{n+d}) + \sin(j_n - j_{n-d})), \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.28)$$

где  $f(d)$  – сила связи  $n$ -го элемента и элементов с номерами  $n \pm d$ . Для простоты рассмотрим однородный ансамбль:  $g_n = g$ ,  $1 \leq n \leq N$ , без ограничения общности можно положить  $g=0$ . Преимущество теоретического рассмотрения такого ансамбля связано с тем, что характеристические показатели состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации, легко выражаются аналитически. При этом переход к нормальным координатам осуществляется с помощью такого же преобразования что и для случая кольца с локальными связями, а именно:

$$x_n = \sum_{k=1}^{N-1} A_k \sin\left(\frac{2pkn}{N}\right) \quad (2.29)$$

В результате замены переменных легко получить характеристические показатели стационарного решения системы (2.28):

$$I_k = -4 \sum_{d=1}^K f(d) \sin^2 \frac{pkd}{N}, \quad k = \overline{1, N} \quad (2.30)$$

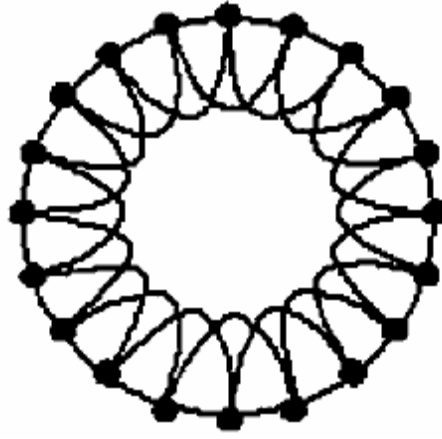


Рис. 2.10. Ансамбль с топологией «связь с  $K$ -ближайшими соседями» ( $K=2$ ).

Аналогично проделанному выше анализу будем изучать линейную оценку характерного времени установления синхронного режима:  $\tau^* \sim 1/\min|\lambda_k|$ ,  $1 \leq k \leq N$ .

$$\min_k |I_k| = 4 \sum_{d=1}^K f(d) \sin^2 \left( \frac{pd}{N} \right)^{(K \ll N)} \approx 4 \frac{p^2}{N^2} \sum_{d=1}^K f(d) d^2 \quad (2.31)$$

Важно отметить, что приближение (2.31) справедливо, когда максимальная дальность связи между элементами много меньше количества элементов в ансамбле ( $K \ll N$ ).

$$t_K^* \sim \frac{N^2}{4p^2 S_K}, \quad S_K = \sum_{d=1}^K f(d) d^2. \quad (2.32)$$

Рассмотрим несколько частных случаев для различных законов спадания величины связи  $f(d)$ . Результаты представлены в таблице:

$f(d), 1 \leq d \leq K$	$S_K$	$t^*$
1	$\sum_{d=1}^K d^2 = \frac{K(1+K)(1+2K)}{6}$	$\frac{3N^2}{2p^2 K(1+K)(1+2K)}$
$d^{-1}$	$\sum_{d=1}^K d = \frac{1+K}{2} K$	$\frac{N^2}{2p^2 K(1+K)}$
$d^{-2}$	$\sum_{d=1}^K d = K$	$\frac{N^2}{4p^2 K}$
$d^{-3}$	$\sum_{d=1}^K d^{-1} = HN(K)$	$\frac{N^2}{4p^2 HN(K)}$
$2^{-d}$	$\sum_{d=1}^K d^2 2^{-d} = 2^{1-K} (3 \cdot 2^{1+K} - 6 - 4K - K^2)$	$\frac{N^2 2^{K-3}}{p^2 (3 \cdot 2^{K+1} - 6 - 4K - K^2)}$

Для степенного закона спадаения силы связи с расстоянием  $f(d) = d^{-r}$ , ( $r \geq 0$ ) увеличение дальности связи ведет к уменьшению времени установления синхронного режима (рис. 2.11). В случае «экспоненциального» закона спадаения силы связи  $f(d)=2^{-d}$  увеличение дальности связи до некоторого значения  $K \approx 15$  ведет к уменьшению времени переходного процесса. В случае  $K > 15$  время переходного процесса почти не зависит от  $K$  (рис. 2.11). На рис. 2.1 представлено сравнение аналитических оценок зависимости времени переходного процесса от дальности связи с результатами численного счета. Время установления стационарного решения считается с точностью  $10^{-3}$  ( $dj_n/dt < 10^{-3}$ ,  $1 \leq n \leq N$ ) и усредняется по результатам 150 экспериментов для разных случайно выбранных начальных условий.

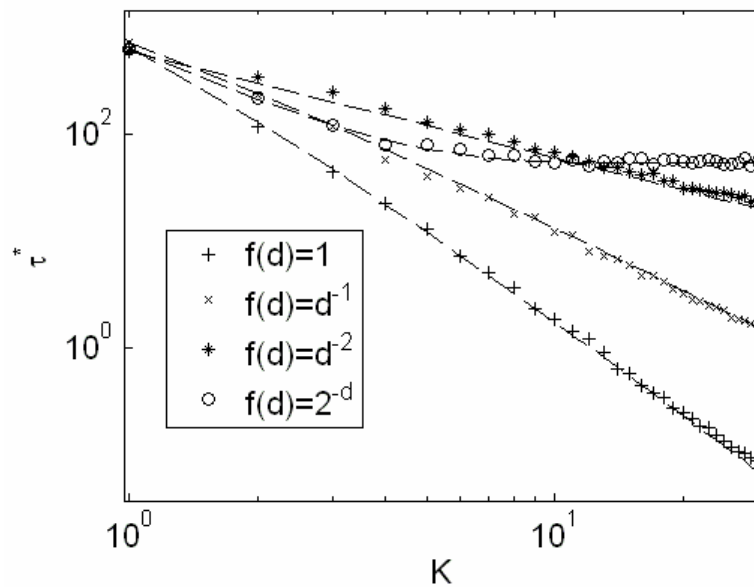


Рис. 2.11. Зависимость времени установления синхронного режима в модели (2.28) от дальности связи  $K$  для различных законов спадаения силы связи  $f(d)$ , штриховые линии – аналитические оценки. Установление стационарного решения рассчитывается с точностью  $10^{-3}$ , количество элементов  $N=256$ .

Отметим, что линейная оценка дает хороший результат, когда требуется определение времени перехода в синхронный режим с высокой точностью, как это продемонстрировано на рис. 10 (точность  $10^{-3}$ ). В таком случае большую часть времени фазовая траектория находится в окрестности состояния равновесия системы (2.28), соответствующего синхронному режиму. Если производить расчет времени перехода фазовой траектории в окрестность состояния равновесия большего радиуса, то есть

определять время установления с меньшей точностью, то расходимость может быть существенной (рис. 11).

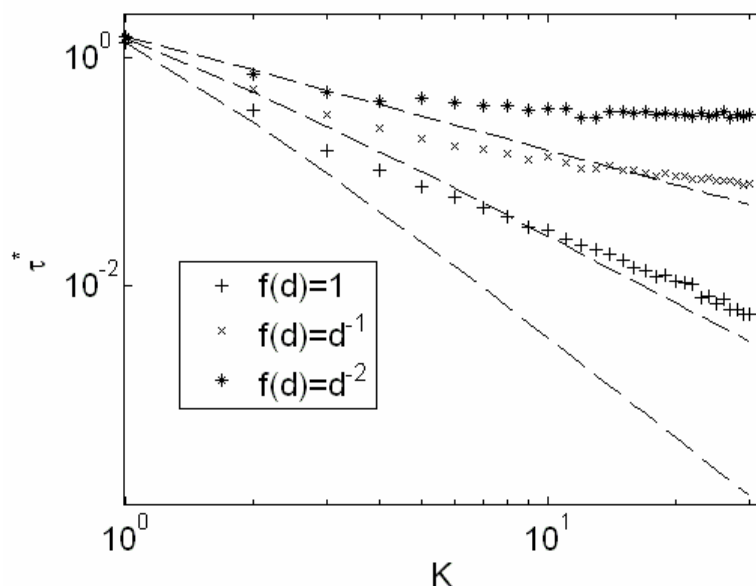


Рис. 2.12. Зависимость времени установления синхронного режима в модели (2.28) от дальности связи  $K$  для различных законов спада силы связи  $f(d)$ , штриховые линии – аналитические оценки. Установление синхронного режима рассчитывается с точностью  $10^{-2}$ , количество элементов  $N=256$ .

### Оценка точности фазирования при случайном разбросе параметров.

Рассмотрим еще один важный с точки зрения приложений вопрос, касающийся точности фазирования при случайном разбросе управляющих параметров системы. Проведем исследование для трех схем фазирования: параллельное соединение несвязанных друг с другом фазоуправляемых генераторов (рис. 3), однонаправленная связь, система (2.8) при  $F(j)=\sin j$  либо система (2.12) при  $k=0$ ,  $d=1$ , и симметричная взаимная связь, система (2.12),  $k=d=1$ .

Предположим, что частотные расстройки генераторов  $\gamma_n$  заданы с ошибкой  $z_n$  относительно значений, точно соответствующих требуемому градиентному распределению фаз. Пусть ошибки независимы в каждом элементе, имеют гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2_\gamma$ . Случайное распределение частотных расстроек приводит к некоторому случайному отклонению фаз от точного градиентного распределения:  $\eta_n = \varphi_n - n \cdot \theta$ . Для оценки точности фазирования рассмотрим параметр порядка, который уже использовался в первой главе:

$$\langle r_h^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \left\langle \left| \sum_{n=1}^N e^{ih_n} \right|^2 \right\rangle \quad (2.33)$$

Параметр порядка имеет физический смысл нормированной средней интенсивности поля в точке максимума диаграммы направленности.

Перепишем выражение (2.33) в более удобном виде для дальнейших аналитических оценок:

$$\begin{aligned} \langle r_h^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{n=1}^N \exp(ih_n) \sum_{m=1}^N \exp(-ih_m) \right\rangle = \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{n,m=1}^N \exp[i(h_n - h_m)] \right\rangle = \\ &= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{n,m=1}^N \cos(h_n - h_m) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.34)$$

Будем считать, что дисперсия частотных расстройек достаточно мала, чтобы были малыми случайные отклонения фаз  $h_n$ , тогда справедливо:  $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$ , и выражение (2.34) можно переписать в виде:

$$\langle r_h^2 \rangle \approx \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1}^N \left[ 1 - \frac{1}{2} \langle (h_n - h_m)^2 \rangle \right] = \frac{1}{N^2} \left( N + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N-n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \langle (h_n - h_{n+k})^2 \rangle \right] \right) \quad (2.35)$$

Для первой схемы, в которой генераторы синхронизируются общим опорным сигналом и не связаны друг с другом, установившиеся фазовые ошибки являются независимыми в каждом генераторе. Дисперсия фазовой ошибки определяется:

$$s_h^2 = \frac{s_g^2}{\cos q}. \quad (2.36)$$

Легко показать, что параметр порядка имеет следующий вид:

$$\langle r_h^2 \rangle \approx 1 - \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \frac{s_g^2}{\cos q}. \quad (2.37)$$

При  $N \rightarrow \infty$  параметр порядка не зависит от количества элементов в ансамбле.

Перейдем к рассмотрению случая однонаправленной связи (система (2.8) при  $F(j) = \sin j$ ). Подставляя решение  $\varphi_n = n \cdot \theta + \eta_n$  в уравнение, определяющее стационарное распределение фаз, получим систему уравнений для фазовой ошибки:

$$\begin{aligned} \sin(h_n - h_{n-1}) &= \frac{z_n}{\cos q}, \quad n = \overline{1, N}, \\ h_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Предположим, что фазовая ошибка мала, и будем приближенно считать:  $\sin(x) \approx x$ , тогда

$$h_n \approx h_{n-1} + \frac{z_n}{\cos q} \quad (2.39)$$

Отсюда легко найти дисперсию фазовой ошибки в  $n$ -м элементе:

$$S_h^2 = \frac{S_g^2}{\cos q} \cdot n \quad (2.40)$$

Как и следовало ожидать, при однонаправленной связи дисперсия растет линейно вдоль цепочки. Проведем вспомогательные вычисления для получения оценки параметра порядка (2.35):

$$\langle h_n, h_{n+k} \rangle = \langle h_n, h_n + z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+k} \rangle = \langle h_n^2 \rangle \quad (2.41)$$

$$\langle (h_n - h_{n+k})^2 \rangle = \langle h_n^2 \rangle + \langle h_{n+k}^2 \rangle - 2\langle h_n, h_{n+k} \rangle = \langle h_{n+k}^2 \rangle - \langle h_n^2 \rangle = \frac{S_g^2}{\cos q} k \quad (2.42)$$

Подставляя (2.42) в (2.35) получим:

$$r_h^2 \approx \frac{1}{N^2} \left[ N + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N-n} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{S_g^2}{\cos q} k \right) \right] = 1 - \left( N - \frac{1}{N} \right) \frac{S_g^2}{6 \cos q} \quad (2.43)$$

Как видно, в приближении малой дисперсии  $S_g^2$  и при большом значении  $N$ , параметр порядка приблизительно линейно убывает с увеличением количества элементов (рис. 2.15).

Рассмотрим теперь случай симметричной взаимной связи (система (2.12),  $k=d=1$ ). Подставляя решение  $\varphi_n = n \cdot \theta + \eta_n$  в уравнение, определяющее стационарное распределение фаз системы (2.12), получим систему уравнений для фазовых ошибок:

$$\begin{aligned} \sin(h_{n+1} - h_n) + \sin(h_{n-1} - h_n) &= \frac{z_n}{\cos q}, \quad n = \overline{1, N}, \\ h_0 = h_1, \quad h_{N+1} &= h_N. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Аналогично предыдущему случаю будем предполагать, что случайные фазовые ошибки малы, тогда можно линеаризовать систему (2.44):

$$\begin{aligned} h_{n+1} - 2h_n + h_{n-1} &= \frac{z_n}{\cos q}, \quad n = \overline{1, N}, \\ h_0 = h_1, \quad h_{N+1} &= h_N. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для аналитической оценки статистических характеристик случайных фазовых сдвигов и определение их связи с дисперсией частотных расстройек осуществим переход к нормальным координатам, но перед этим сделаем переход к переменным суммы и разностей:

$$V = \sum_{n=1}^N h_n, \quad u_n = h_{n+1} - h_n, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (2.46)$$

Подставляя (2.46) в (2.45) для разностных переменных получим:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \frac{c_n}{\cos q}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.47)$$

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0.$$

Где  $c_n = g_n - g_{n-1}$ . Теперь можно осуществить дискретное синусное преобразование для перехода к нормальным координатам для цепочки с фиксированными граничными условиями:

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} A_k \sin \frac{pkn}{N} \quad (2.48)$$

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} \Gamma_k \sin \frac{pkn}{N}$$

Подставляя (2.48) в (2.47) найдем связь  $A_k$  и  $\Gamma_k$ :

$$4 \sin^2 \left( \frac{pk}{2N} \right) A_k = \Gamma_k, \quad A_k = \frac{\Gamma_k}{4 \sin^2 \left( \frac{pk}{2N} \right)}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (2.49)$$

Осуществляя обратное дискретное синусное преобразование, получаем выражение для относительных фазовых сдвигов  $u_n$  через величины разностных ошибок начальных частот генераторов:

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Gamma_k}{4 \sin^2 \left( \frac{pk}{2N} \right)} \sin \frac{pkn}{N}, \\ \Gamma_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{N-1} c_n \sin \frac{pkn}{N}, \end{cases} \quad (2.50)$$

Используя (2.50) можно записать выражение функции корреляции случайных фазовых сдвигов между соседними элементами цепочки:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{N} \frac{1}{8 \cos^2 q} \sum_{k_1, k_2=1}^{N-1} \langle \Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2} \rangle \frac{\sin \frac{pk_1 i}{N} \sin \frac{pk_2 j}{N}}{\sin \frac{pk_1}{2N} \sin \frac{pk_2}{2N}}. \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2} \rangle &= \frac{2}{N} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \langle c_{n_1}, c_{n_2} \rangle \sin \frac{pk_1 n_1}{N} \sin \frac{pk_2 n_2}{N} = \dots \\ &\dots = \frac{2s_g^2}{N} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} (2d_{n_1, n_2} - d_{n_1+1, n_2} - d_{n_1, n_2+1}) \sin \frac{pk_1 n_1}{N} \sin \frac{pk_2 n_2}{N} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Выражение (2.51) определяет дисперсию фазовых сдвигов  $u_n$ . График зависимости этой дисперсии от номера  $n$  представлен на рис. 2.13. Максимальная дисперсия относительной фазовой ошибки наблюдается для элементов в середине цепочки.



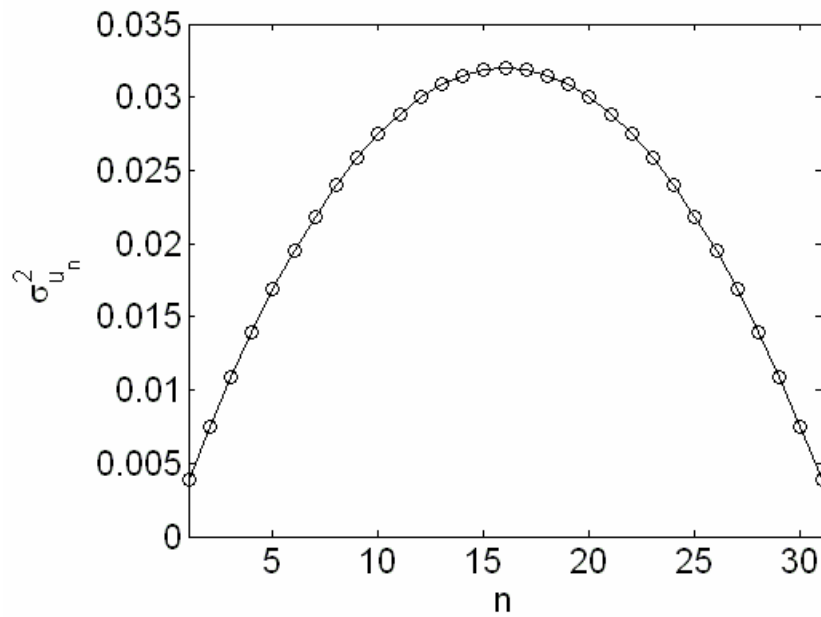


Рис. 2.13. Распределение относительной фазовой ошибки вдоль цепочки.

Рассматривать дисперсию абсолютной фазовой ошибки  $\langle h_n^2 \rangle$  некорректно, потому что не определено среднее значение фазовой ошибки, система (2.12) и соответственно уравнения (2.45) инвариантны относительно сдвига всех фаз на одинаковое значение. Однако можно вычислить следующую величину:  $\langle (h_n - V/N)^2 \rangle$ , график для которой представлен на рис. 2.14.

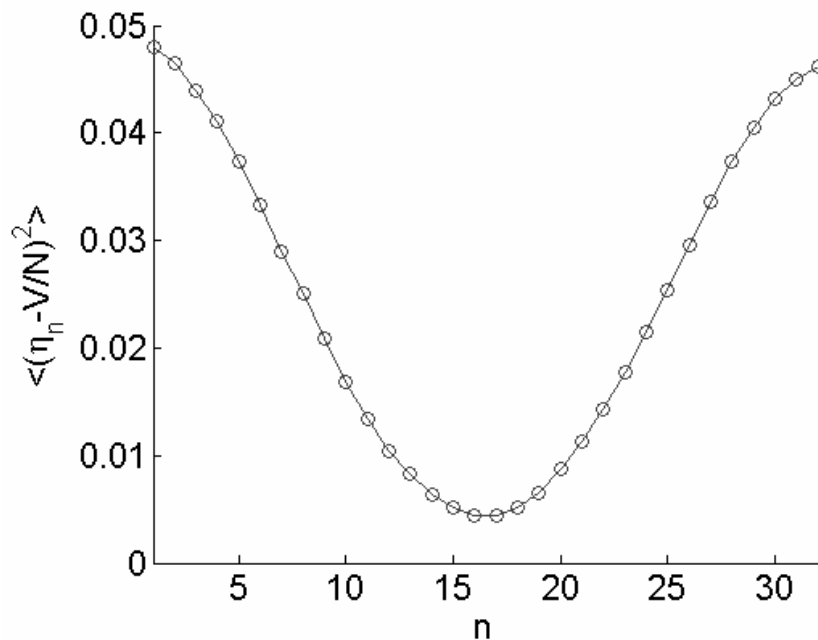


Рис. 2.14. Дисперсия отклонения фазовой ошибки от среднего значения ошибки по цепочке.

Данная величина, в отличие от дисперсии разностной фазовой ошибки, имеет минимум для элементов в середине цепочки. Это говорит о том, что значение фазовой ошибки в центральных элементах в среднем ближе к усредненному по цепочке значению, в сравнении с ошибкой на концах цепочки.

Выражение для параметра порядка в разностных переменных можно переписать следующим образом:

$$\langle r_h^2 \rangle \approx \frac{1}{N^2} \left( N + 2 \sum_{\substack{m=1, \\ n>m}}^N \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=m}^{n-1} \langle u_i, u_j \rangle \right) \right) \quad (2.53)$$

Так как корреляционная функция разностной фазовой ошибки известна (2.51), то можно считать, что мы получили общее выражение параметра порядка через дисперсию ошибок собственных частот генераторов.

Для случаев однонаправленной и симметричной взаимной связи на рис. 14 представлены численно и аналитически полученные зависимости параметра порядка от размера цепочки. Параметр порядка для цепочки с взаимными связями нелинейно зависит от количества элементов и убывает качественно быстрее параметра порядка для цепочки с однонаправленной связью.

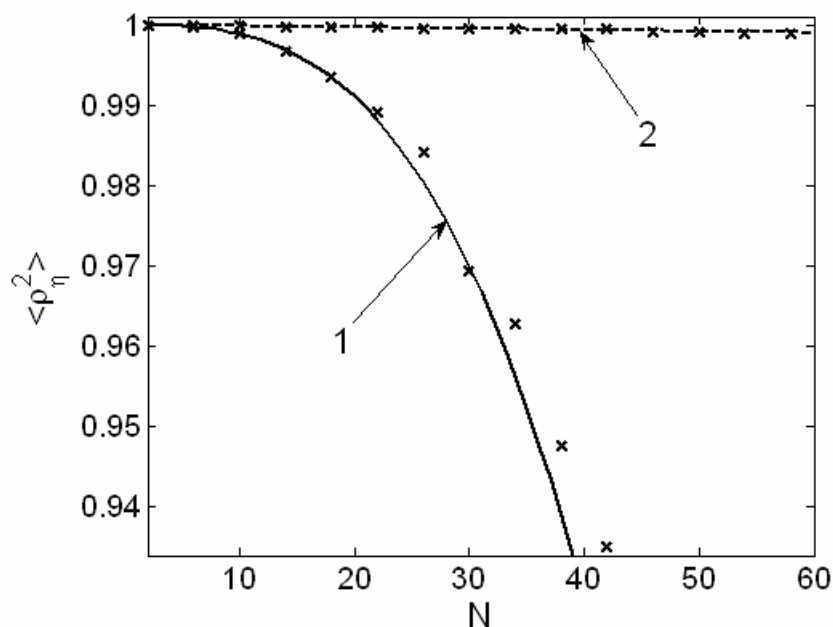


Рис. 2.15. Зависимость характеристики точности фазирования от размера цепочки при случайном разбросе начальных частотных расстройок генераторов с дисперсией  $\sigma_y^2=10^{-3}$ ,  $\gamma=0$  (b), 1 – симметричная взаимная связь, 2 – однонаправленная связь, x – результаты численного счета.

Подводя итог можно отметить, что организация связей между элементами ведет к ухудшению точности фазирования при случайном отклонении управляющих параметров. При этом наличие взаимных связей приводит к нелинейному росту дисперсии фазовой ошибки в отличие от случая однонаправленной связи.

### **Управление нестационарным градиентным распределением фаз.**

До сих пор рассматривался случай установления в цепочке генераторов стационарного градиентного распределения фаз. В реальных приложениях часто используется режим сканирования, когда диаграмма направленности изменяет во времени угол поворота. В задачах радиолокации при слежении за целью необходимо быстро перестраивать поворот диаграммы направленности. В таких приложениях максимальная скорость поворота диаграммы направленности является ключевой характеристикой. Мы уже рассмотрели вопрос, касающийся времени переходного процесса в синхронный режим с градиентным распределением фаз, где было показано, что в ансамблях связанных фазоуправляемых генераторов это время может быть значительно больше, чем в одном генераторе. Таким образом, схемы фазирования, основанные на использовании связей между элементами, обладают большей инерцией в сравнении с традиционными схемами.

Пусть необходимо добиться, чтобы градиентное распределение фаз в цепочке связанных генераторов, описываемых системой (2.14), изменялось по следующему закону:

$$j_n - j_{n-1} = q(t) = q_0 \sin(\overline{w_p t}), \quad n = \overline{2, N}. \quad (2.54)$$

Если в соответствии с законом управления стационарным градиентным распределением фаз в цепочке однонаправленно-связанных генераторов ( $k=0$ ,  $d=1$ ) изменять управляющие параметры следующим образом:

$$g_n(t) = \sin q(t), \quad n = \overline{2, N-1}, \quad (2.55)$$

тогда фазовое распределение может сильно отличаться от желаемого градиентного закона, как это показано на рис. 2.16.

Аналогично для цепочки с симметричными взаимными связями ( $k=d=1$ ) наблюдается сильное отличие получаемого распределения фаз от требуемого (рис. 2.17) при изменении управляющих параметров по следующему закону:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -g_N(t) = \sin q(t) \\ g_n &= 0, \quad n = \overline{2, N-1} \end{aligned} \quad (2.56)$$

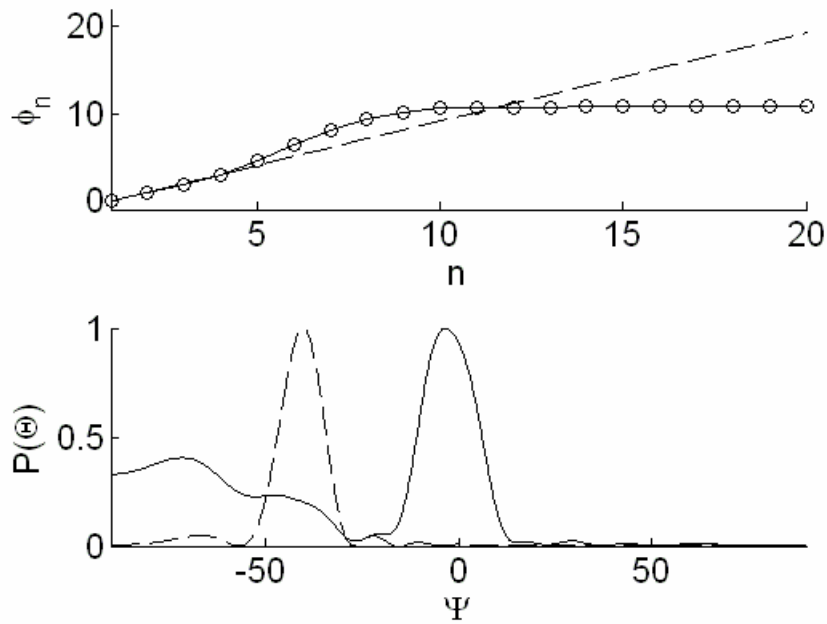


Рис. 2.16. Значения фазовых сдвигов в элементах цепочки с однонаправленными связями и диаграмма направленности в некоторый момент времени при изменении управляющих параметров во времени по закону (2.55),  $w_i=0.04$ ,  $e=10$ . Штриховые линии обозначают желаемое фазовое распределение и диаграмму направленности.

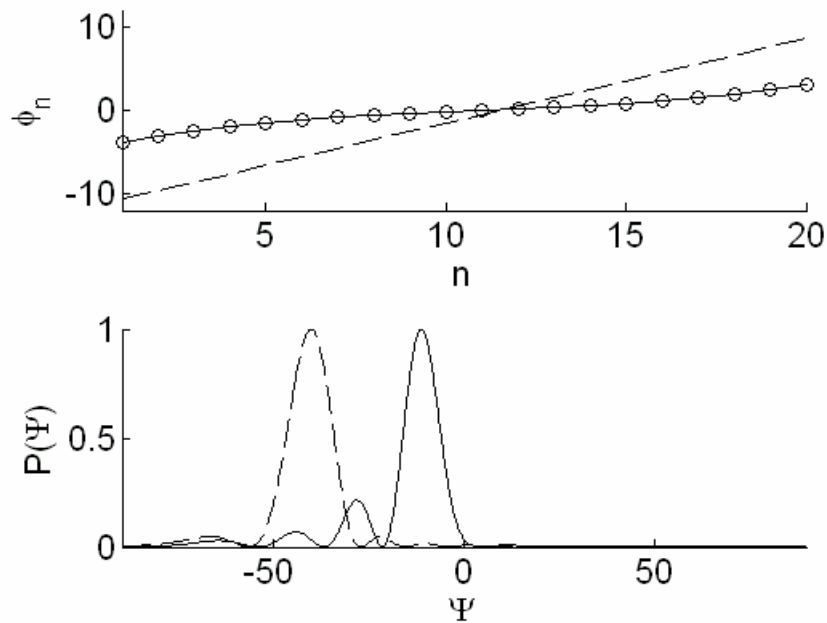


Рис. 2.17. Значения фазовых сдвигов в элементах цепочки с симметричными взаимными связями и диаграмма направленности в некоторый момент времени при изменении управляющих параметров во времени по закону (2.55),  $w_i=0.04$ ,  $e=10$ . Штриховые линии обозначают желаемое фазовое распределение и диаграмму направленности.

Решение данной проблемы возможно, если подобрать специальный закон управления, при котором нестационарное градиентное распределение фаз  $j_n - j_{n-1} = q(t)$  будет точным решением. Для этого требуется достаточно точное модельное описание динамической системы. Рассмотрим еще раз систему (2.12), которая описывает динамику взаимосвязанных генераторов через кольца фазовой автоподстройки с фильтрами, имеющими коэффициент передачи  $K(p)$  вида (2.7):

$$\begin{aligned} p j_n + K(p)[k \sin(j_n - j_{n+1}) + d \sin(j_n - j_{n-1})] &= g_n, \quad n = \overline{1, N}, \\ j_0 &= j_1, \quad j_{N+1} = j_N. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставив решение для градиентного распределения фаз в систему (2.12), можно получить следующие условия на управляющие параметры (здесь в качестве управляющих параметров мы опять рассматриваем частотные расстройки, а не величины связи):

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -kK(p) \sin q(t), \\ g_n(t) &= (d - k)K(p) \sin q(t) + (n-1)q'(t), \quad n = \overline{2, N-1}, \\ g_N(t) &= dK(p) \sin q(t) + (N-1)q'(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Таким образом, если функция, описывающая закон изменения фазовых сдвигов между элементами, является непрерывной и дифференцируемой (максимальный порядок дифференцируемости зависит от порядка используемого фильтра низких частот), то из (2.57) можно найти необходимый закон изменения управляющих параметров  $g_n(t)$ . При этом в общем случае, когда  $K(p)$  соответствует фильтру первого либо более высокого порядка, необходимо решать дифференциальное уравнение для нахождения  $g_n(t)$ . Заметим, что в случае симметричной связи ( $k=d=1$ ) для управления стационарным градиентным распределением фаз необходимо контролировать только собственные частоты генераторов на концах цепочки, в то время как для обеспечения фазового распределения, изменяющегося во времени по заданному закону, необходимо управлять собственными частотами во всех генераторах ансамбля (2.58).

В работе [16] рассмотрена задача об управлении во времени точным градиентным распределением фаз для фазовой модели локально связанных генераторов. Эта модель эквивалентна (2.12), если положить  $K(p)=1$  и  $k=d=1$ . Управляющие параметры в этом случае изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\sin q(t), \\ g_n(t) &= (n-1)q'(t), \quad n = \overline{2, N-1}, \\ g_N(t) &= \sin q(t) + (N-1)q'(t). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Анализ устойчивости распределения  $j_n - j_{n-1} = q(t)$  показал, что оно является устойчивым в интервале фазовых сдвигов  $-p/2 < q(t) < p/2$  (функция  $q(t)$  непрерывная, дифференцируемая). Этот результат легко обобщается на случай несимметричной связи ( $k \neq d$ ,  $k, d > 0$ ), а также можно показать, что он справедлив и в случае однонаправленной связи.

Рассмотрим случай наиболее простого физически реализуемого фильтра, когда  $K(p) = 1/(1+ep)$ . Подставляя такой коэффициент передачи в уравнения (2.12) и учитывая, что теперь  $g_n = g_n(t)$ , получим:

$$e^{j\theta_n} + j\theta_n + k \sin(j_n - j_{n+1}) + d \sin(j_n - j_{n-1}) = g_n^*(t) = e^{j\theta_n}(t) + g_n(t), \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.59)$$

$$j_0 = j_1, \quad j_{N+1} = j_N.$$

Подставляя коэффициент передачи фильтра в уравнения (2.57) получим уравнения для управляющих параметров  $g_n$ :

$$g_1^*(t) = e^{j\theta_1} + g_1 = -k \sin q(t),$$

$$g_n^*(t) = e^{j\theta_n} + g_n = (d - k) \sin q(t) + (n - 1)[e^{j\theta_n}(t) + q^*(t)], \quad n = \overline{2, N - 1}, \quad (2.60)$$

$$g_N^*(t) = e^{j\theta_N} + g_N = d \sin q(t) + (N - 1)[e^{j\theta_N}(t) + q^*(t)].$$

Обсудим устойчивость нестационарного градиентного распределения фаз. Рассмотрим малое возмущение исследуемого решения:  $j_n = n \cdot q(t) + h_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Линеаризуем систему (2.59) в окрестности этого решения:

$$e^{j\theta_n} + j\theta_n + \cos q(t)[-kh_{n+1} + (k + d)h_n - dh_{n-1}] = 0, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.61)$$

$$h_0 = h_1, \quad h_{N+1} = h_N.$$

Система (2.61) представляет собой векторное уравнение Хилла. При периодическом изменении во времени  $q(t)$  в системе (2.61) возможна параметрическая неустойчивость. На рис. 2.18 представлен результат численного расчета зон параметрического резонанса в системе (2.61) в случае однонаправленной связи ( $k=0$ ,  $d=1$ ) для  $q(t) = q_0 \sin(w_p t)$ . Серым цветом отмечена область устойчивости нестационарного градиентного фазового распределения, которая является довольно большой. Хотя для некоторых частот интервал изменения  $q(t)$  может быть меньше, чем  $(-p/2, p/2)$ .

Таким образом, для каждого конкретного закона изменения фазового распределения необходимо делать проверку на устойчивость. Также необходимо знать параметры системы с высокой точностью. К сожалению, на данный момент экспериментальные работы по управлению лучом во времени в схемах фазирования со связями между элементами решетки авторам не известны.

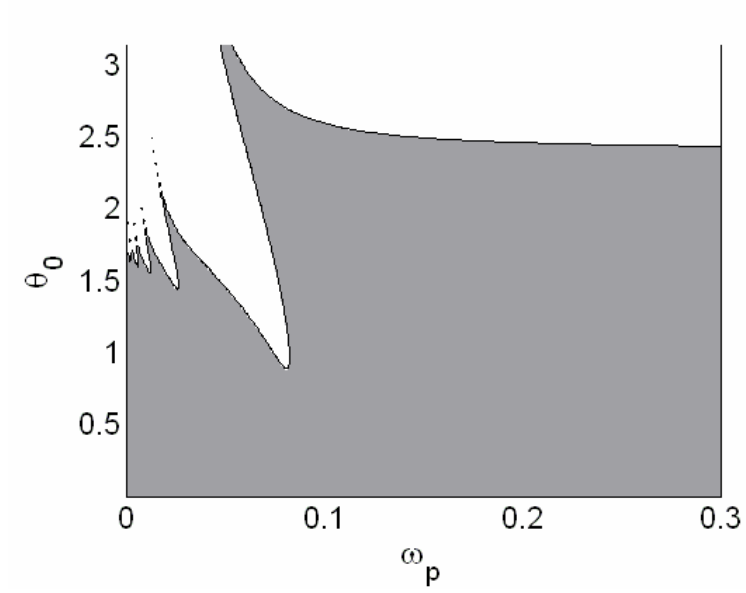


Рис. 2.18. Параметрическая неустойчивость нестационарного градиентного распределения фаз в системе (2.57) (серым цветом отмечена область устойчивости решения),  $\epsilon=100$ .

## ГЕНЕРАЦИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В АНСАМБЛЯХ СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

Известно, что одним из возможных применений хаотических колебаний на практике является использование в качестве несущей для передачи информации [6, 31, 32]. Другое приложение хаотических сигналов связано с их использованием в радиолокации [27 – 30]. Широкий спектр и резко спадающая автокорреляционная функция хаотических сигналов делают их интересными для систем связи. В радиолокации такие характеристики дают потенциальную возможность одновременных измерений скорости и дальности до объекта с высокой разрешающей способностью. В настоящее время проблема прикладного использования динамического хаоса переходит из области научных исследований в область конкретных инженерных разработок. Одной из важных задач в данном направлении остается создание эффективных генераторов хаотических сигналов высокочастотного диапазона с управляемыми характеристиками. Также для практических задач важно, чтобы хаотический сигнал обладал свойством широкополосности, существовал в широкой и однородной области параметров, генерирующей его системы.

В первой части данной главы представлены результаты исследования хаотической динамики в экспериментальной схеме двух каскадно-связанных фазовых. Экспериментальные данные подкреплены результатами теоретического исследования. Демонстрируется процесс возбуждения хаотических колебаний при введении обратной связи между элементами ансамбля. Показано, что такой ансамбль способен генерировать хаотические колебания в широкой области параметров системы. Во второй части представлены спектральные и корреляционные характеристики хаотических колебаний, соответствующие различным динамическим режимам в ансамбле двух каскадно-связанных фазовых систем. Показано, что такой ансамбль способен генерировать широкополосные хаотические колебания с различными спектральными характеристиками. В третьей части главы рассматривается хаотический режим в модели цепочки взаимосвязанных генераторов (рис. 2.6). В предыдущей главе такая цепочка рассматривалась как активная антенная решетка, в которой реализовывалось стационарное градиентное распределение фаз при синхронизации частот генераторов. В данной главе будет показано, что такая система может быть использована для синтеза широкополосных и сверхширокополосных хаотических сигналов с заданной шириной спектра.



## **Исследование хаотической динамики в экспериментальной схеме двух каскадно-связанных фазовых систем.**

В работах [31, 32] было предложено использование ансамблей связанных фазовых систем для передачи информации на основе динамического хаоса, а именно, решение следующих задач: генерация и синхронизация хаотических колебаний, модуляция полезным сигналом и демодуляция. Фазовые системы (системы фазовой автоподстройки – ФАП) нашли широкое применение в современных системах связи [9]. Системы фазовой автоподстройки способны работать как на низких, так и на сверхвысоких частотах, обладают высокой помехоустойчивостью, что делает их так же перспективными для использования в системах связи, основанных на динамическом хаосе. Здесь мы ограничимся исследованием проблемы генерации хаотических колебаний в фазовых системах. Известно, что в фазовой системе со сложным фильтром (например, с фильтром второго порядка) существуют регулярные и хаотические автомодуляционные режимы [34], однако области параметров, внутри которых существуют хаотические режимы, очень малы, что ограничивает использование такой системы в качестве генератора хаоса. В работах [31, 32, 36, 37, 38] было показано, что объединение фазовых систем в малые ансамбли позволяет осуществить генерацию хаотических колебаний в широких и однородных областях параметров. В частности, в работе [31] приведены результаты качественно-численного исследования модели ансамбля из двух каскадно-соединенных фазовых систем, а в работе [38] представлены первые экспериментальные результаты по генерации хаоса в таком ансамбле.

В данной части работы представлены результаты исследования динамики экспериментальной схемы двух каскадно-связанных фазовых систем с фильтрами второго порядка в кольцах управления [38]. Построена математическая модель экспериментальной схемы и проведено численное исследование динамики модели с упором на изучение хаотических режимов. Продемонстрированы различные хаотические режимы, такие как режим генерации квазисинхронных хаотических колебаний и режим хаотических биений, также приведены их спектральные характеристики, полученные в эксперименте.

В качестве фазовой системы в эксперименте используется широко распространенная микросхема ФАП 74НС4046А, предназначенная для синхронизации сигналов вида меандра. Данная микросхема позволяет конструировать кольцо управления ФАП, задавать частоту и полосу удержания подстраиваемых генераторов. Функциональная схема экспериментальной установки изображена на рис. 3.1, [38].

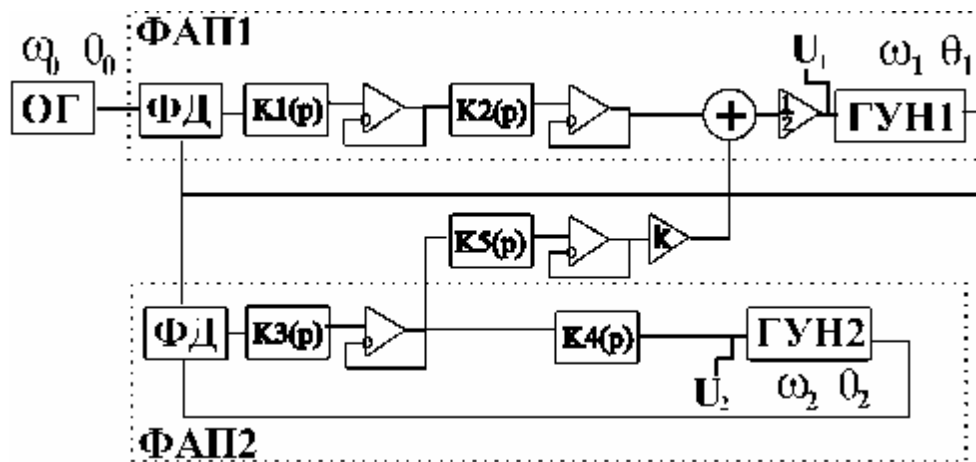


Рис. 3.1. Функциональная схема экспериментальной установки двух каскадно-связанных фазовых систем.

На представленной схеме: **ОГ** – опорный генератор, **ФД** – фазовый дискриминатор, **ГУН1,2** – генераторы разрывных колебаний, управляемые напряжением,  $K_{1,2,3,4,5}(p)$  – коэффициенты передачи низкочастотных фильтров первого порядка ( $p=d/dt$ ),  $k$  – коэффициент связи.

$$K_i = \frac{1}{1 + T_i p}, \quad i = \overline{1,5}. \quad (3.1)$$

Где  $T_i = R_i \cdot C_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) – постоянные времени фильтров,  $R_1 = R_3 = 2.2$  КОм,  $R_4 = R_5 = 5$  КОм,  $R_2 = 0 - 10$  КОм,  $C_1 = C_3 = 6.8$  нФ,  $C_2 = C_4 = C_5 = 33$  нФ,  $T_1 = T_2 = 14.9$  мкс,  $T_4 = T_5 = 165$  мкс,  $T_2 = 0 - 330$  мкс (изменяемый параметр). Частота колебаний в **ГУН1,2** при отсутствии внешнего сигнала и шума на входе:  $f_1=f_2=71$  КГц – центральная частота. В ходе экспериментальных измерений, частоты генераторов **ГУН1,2** не изменялись. Сигнал, поступающий на вход **ФАП** и генерируемый на выходе **ФАП**, представляет собой однополярный меандр с амплитудой 5В. Максимальные частотные расстройки входного сигнала для **ФАП1,2** относительно центральной частоты, при которых генераторы **ГУН1,2** могут быть синхронизованы (полосы удержания  $\Delta F_{1,2}$ ), имеют следующие значения:  $\Delta F_1 = 13.85$  КГц,  $\Delta F_2 = 27.7$  КГц. В ходе экспериментальных измерений варьировались следующие величины: коэффициент обратной связи, направленной от цепи управления **ФАП2** в цепь управления **ФАП1**  $k$  ( $k=0 - 1$ ), частота опорного генератора  $f_0$  и инерционность  $T_2$  второго фильтра в кольце управления **ФАП1**.

В экспериментальной схеме, представленной на рис. 3.1, фазовые системы имеют одинаковую структуру, близкие параметры управляемых генераторов и фильтров.

Отличие заключается в том, что в кольце управления **ФАП1** имеет место аттенуатор, уменьшающий напряжение на входе **ГУН1** в два раза. Вследствие этого полоса удержания первой системы ФАП вдвое меньше, чем для второй системы.

В силу того, что обе фазовые системы (рис. 3.1) имеют одинаковую структуру кольца обратной связи, уравнения, описывающие их индивидуальную динамику должны быть одинаковыми, отличающимися только значениями параметров. Пусть  $q_0$  – полная фаза опорного колебания,  $q_1$  – полная фаза колебания на выходе **ГУН1** (рис. 3.1). Для описания динамики изолированной системы **ФАП1**, когда  $k=0$ , применим модель фазовой системы синхронизации непрерывных, синусоидальных сигналов. В соответствии с [9], уравнение модели в операторной форме имеет следующий вид:

$$\frac{pj}{\Omega_1} + K(p)F(j) = g_1, \quad (3.2)$$

где  $p=d/dt$  – оператор дифференцирования,  $j_1 = q_1 - q_0$ ,  $\Omega_1=2p\Delta F_1$  – полоса удержания фазовой системы,  $K(p) = K_1(p)K_2(p)$  – коэффициент передачи фильтра в кольце управления **ФАП1**, состоящего из двух низкочастотных фильтров первого порядка, соединенных через буферный каскад,  $F(j)$  – нормированная характеристика фазового дискриминатора,  $g_1=(f_1 - f_0)/\Delta F_1$  – относительная частотная расстройка генератора в **ФАП1**.

Фазовый дискриминатор реализует операцию булевой алгебры ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ (XOR). Нормированная модельная характеристика такого дискриминатора имеет следующий вид:

$$F(j) = \begin{cases} \frac{2}{p}(j - p/2), & 0 < j \leq p, \\ \frac{2}{p}(\frac{3p}{2} - j), & p < j \leq 2p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Отметим, что при такой характеристике фазового дискриминатора, в синхронном режиме разность фаз между опорным сигналом и сигналом генератора ФАП составляет  $p/2$ , если начальная частотная расстройка генератора ФАП относительно опорного генератора равна нулю,  $g_1=0$ .

Дифференциальное уравнение, описывающее динамику модели фазовой системы, для безразмерных величин может быть записано так:

$$m\ddot{\theta} + e\dot{\theta} + j\theta + F(j) = g_1, \quad (3.4)$$

где  $t = \Omega_1 t$ ,  $m = e_1 e_2$ ,  $e = e_1 + e_2$ ,  $e_1 = \Omega_1 T_1$ ,  $e_2 = \Omega_1 T_2$ . Данная система обладает трехмерным цилиндрическим фазовым пространством с циклической координатой  $\theta$  периода  $2p$ .

Для проверки применимости описанной выше модели было произведено сравнение бифуркационных кривых, соответствующих бифуркации петли сепаратрис седла, в плоскости параметров  $(e, g_1)$ , которые были получены экспериментально и в результате численного расчета. На рис. 3.2 представлено разбиение плоскости параметров  $(e, g_1)$  на области с качественно различной динамикой, при этом  $e_1=1.3$ , параметр  $e_2$  изменяется в интервале  $0 < e_2 < 28.72$ , соответствующем пределам изменения данного параметра в экспериментальной схеме. На рис. 3.2 кривая 1 соответствует бифуркации петли сепаратрис, рассчитанной численно, кривая 2 является экспериментально полученной бифуркационной кривой (граница области захвата в синхронный режим), линия  $g_1 = 1$  соответствует седло-узловой бифуркации (граница области удержания синхронного режима).

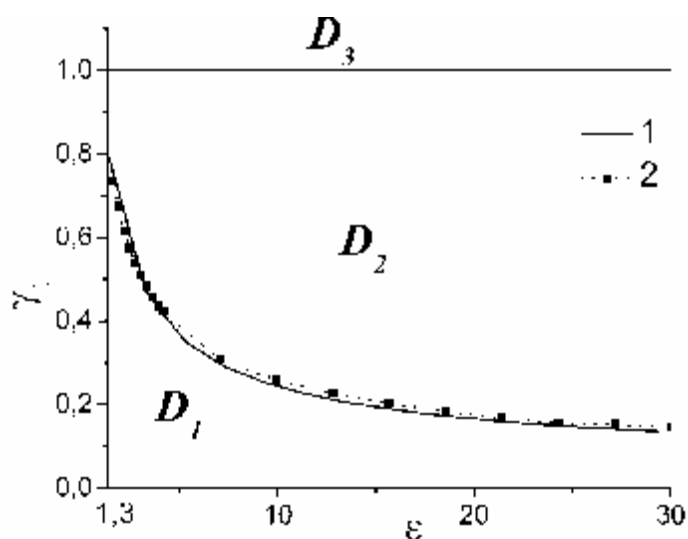


Рис.3.2. Разбиение плоскости параметров  $(e, g_1)$  системы (3.4) на области с качественно различным поведением.

Таким образом, в рассматриваемой области параметров фазовой системы **ФАП** существует три подобласти:  $D_1$  – в фазовом пространстве системы (3.4) существует единственное устойчивое состояние равновесия, соответствующее режиму синхронизации управляемого генератора опорным сигналом;  $D_2$  – существует одно устойчивое состояние равновесия и один устойчивый вращательный предельный цикл, который соответствует режиму биений, когда частота колебаний управляемого генератора не стабилизирована опорным сигналом и разность фаз  $j_1$  не ограничена;  $D_3$  – в фазовом пространстве системы (3.4) существует только устойчивый предельный цикл.

В рассматриваемой области параметров динамические режимы модели (3.4) фазовой системы **ФАП1**, обладающей фильтром второго порядка, ничем не отличаются от режимов фазовой системы с фильтром первого порядка (система (2.4), рис. 2.2). Динамика фазовой системы с фильтром второго порядка и фазовым дискриминатором с синусоидальной характеристикой описана в работах [34, 35], показано, что данная система демонстрирует хаотическую динамику в крайне малых областях в пространстве параметров. Эти области находятся вне пределов изменения параметров фазовых систем в рассматриваемой экспериментальной схеме.

На рис. 3.2 демонстрируется хорошее согласование между бифуркационными кривыми, полученными экспериментально и в численном счете, что позволяет считать рассматриваемую модель непрерывной фазовой системы пригодной для описания динамики экспериментальной схемы.

В силу применимости модели фазовой системы (3.2), модель экспериментальной схемы двух каскадно-связанных фазовых систем, представленной на рис. 3.1, можно описать системой операторных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{p j_1}{\Omega_1} &= g_1 - K_1(p)[K_2(p)F(j_1) + kK_5(p)F(j_2 - j_1)], \\ \frac{p j_2}{\Omega_1} &= g_2 - bK_3(p)K_4(p)F(j_2 - j_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Где  $j_1 = q_1 - q_0$ ,  $j_2 = q_2 - q_0$  ( $q_2$  - полная фаза колебаний на выходе **ГУН2**),  $b = \Delta F_2 / \Delta F_1 = 2$  и  $g_{1,2} = (f_{1,2} - f_0) / \Delta F_1$ . В экспериментальной схеме можно изменять опорную частоту  $f_0$ , частоты управляемых генераторов  $f_1, f_2$  равны и постоянны, таким образом,  $g_1 = g_2 = g$ . Из операторных уравнений (3.5) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} e_1 e_2 e_5 \frac{d^4 j_1}{dt^4} + (e_1 e_2 + e_1 e_5 + e_2 e_5) \frac{d^3 j_1}{dt^3} + (e_1 + e_2 + e_5) \frac{d^2 j_1}{dt^2} + \\ + \frac{d}{dt} (j_1 + e_5 F(j_1) + k e_2 F(j_2 - j_1)) = g_1 - F(j_1) - k F(j_2 - j_1) \\ e_1 e_4 \frac{d^3 j_2}{dt^3} + (e_1 + e_4) \frac{d^2 j_2}{dt^2} + \frac{d j_2}{dt} = g_2 - b F(j_2 - j_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $e_5 = e_4 = T_4 \Omega_1 = 14.36$ .

Система (3.6) обладает сложной нелинейной динамикой. Для классификации различных динамических режимов введем следующие обозначения:  $R_{i,j}$  – регулярные режимы,  $C_{i,j}$  – хаотические режимы, где  $i, j = 0, 1$ . Индекс  $i$  соответствует координате  $\phi_1$ , а

индекс  $j$  соответствует координате  $\phi_2$ . Аналогично [37], индекс принимает значение 1 или 0 в зависимости от того есть или нет вращение по соответствующей циклической координате.

Далее опишем процесс возбуждения хаотических колебаний в модели (3.6). На рис. 3.3а – г представлены проекции аттракторов на плоскости  $(j_1, dj_1/dt)$  и  $(j_2, dj_2/dt)$  для различных величин параметра обратной связи  $k$  и при фиксированных  $g=0.1$ ,  $e_2=14.36$ . Когда обратная связь отсутствует, первая фазовая система находится в режиме синхронизации, а вторая в регулярном квазисинхронном режиме (режим  $R_{0,0}$ , рис. 3.3а). В этом случае частота управляемого генератора во второй системе изменяется периодически относительно некоторой средней, равной частоте опорного сигнала, при этом разность фаз  $j_2$  ограничена. Введение обратной связи приводит к возникновению вынужденных колебаний в первой фазовой системе, которые становятся хаотическими при увеличении параметра  $k$ , переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода (переход в режим  $C_{0,0}$ , рис. 3.3б).

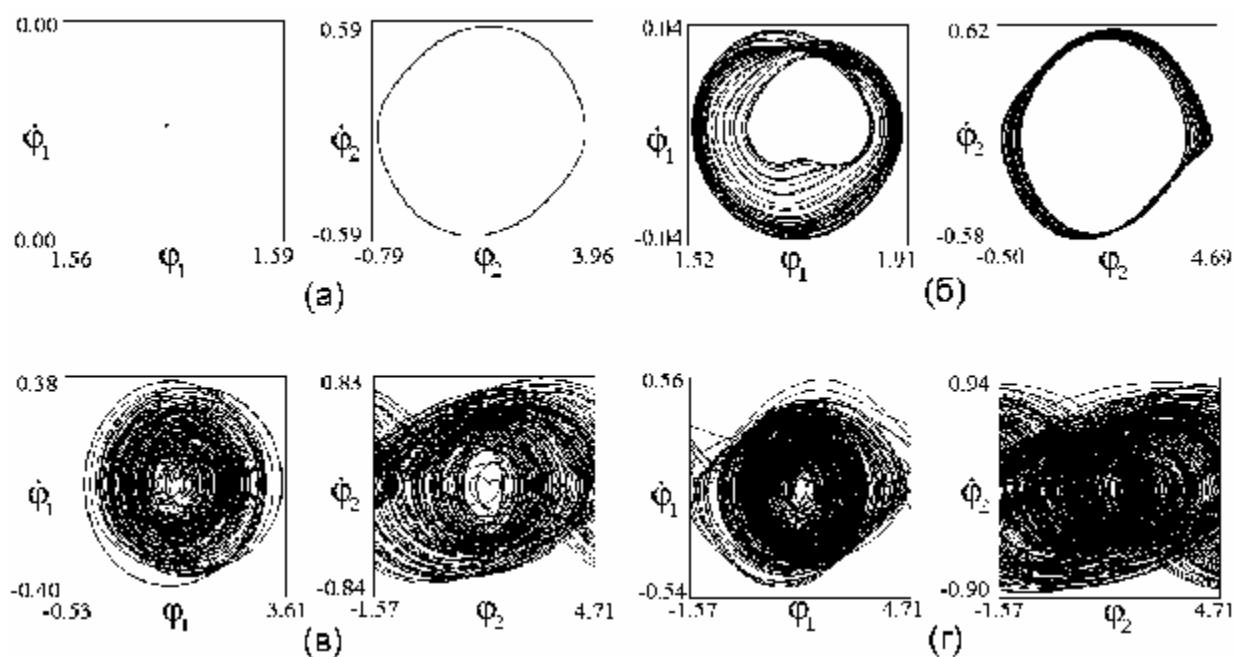


Рис. 3.3. а – г – проекции фазовых портретов системы (3.6) при увеличении параметра  $k$ : а – режим  $R_{0,0}$  ( $k = 0$ ), б – режим  $C_{0,0}$  ( $k = 0.04$ ), в – режим  $C_{0,1}$  ( $k = 0.3$ ), г – режим  $C_{1,1}$  ( $k = 0.6$ )

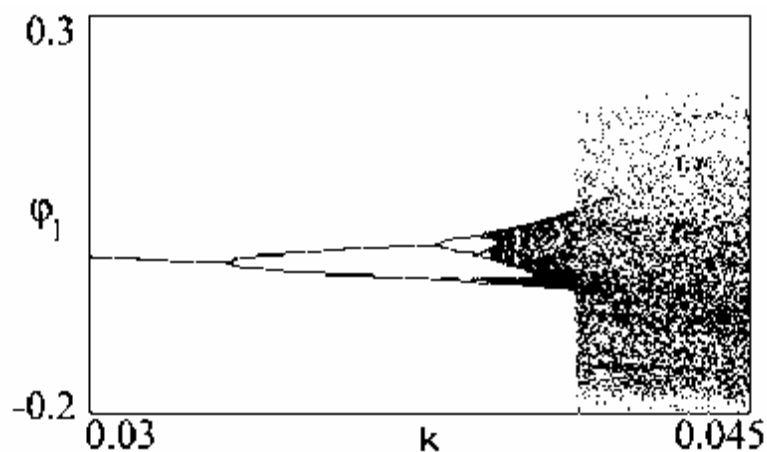


Рис. 3.4. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, демонстрирующая переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и дальнейшее усложнение хаотического аттрактора при увеличении  $k$ .

Каскад бифуркаций удвоения периода продемонстрирован на однопараметрической бифуркационной диаграмме отображения Пуанкаре (рис. 3.3д).

Дальнейшее увеличение параметра обратной связи приводит к усложнению хаотического аттрактора, связанному с вращением по циклическим координатам  $j_{1,2}$  – режимы  $C_{0,1}$ ,  $C_{1,1}$  (рис. 3.3в,г). При значении параметра  $k \approx 0.041$  происходит бифуркация хаотического аттрактора в результате которой  $j_2$  перестает быть ограниченной и режим  $C_{0,0}$  сменяется режимом  $C_{0,1}$ . Этот переход наблюдается на бифуркационной диаграмме рис. 3.4, как видно, при этом размер хаотического аттрактора по координате  $j_1$  значительно увеличивается.

С точки зрения использования в качестве хаотической несущей для передачи информации наиболее интересны квазисинхронные колебания, у которых частота является хаотически модулированной около некоторой средней, стабилизированной относительно частоты опорного сигнала. Такие колебания, в соответствии с [31,32,34], будем называть хаотически модулированными колебаниями. Средняя частота управляемых генераторов будет стабилизирована (равняться частоте опорного сигнала), если соответствующие разности фаз  $j_{1,2}$  ограничены, в противном случае средняя частота генератора ФАП не будет равна частоте опорного сигнала. Если частота колебания на выходе фазовой системы является хаотически модулированной, но не стабилизированной относительно частоты опорного сигнала, то такой режим называется режимом хаотических биений [31,32,34].

На рис. 3.5а представлена карта динамических режимов системы (3.6) в плоскости параметров  $(\varepsilon_2, g)$ , при фиксированном значении параметра  $k = 0.3$ . В численном счете идентификация динамических режимов производилась путем проверки ограниченности циклических координат и вычисления старшего ляпуновского показателя для системы (3.6). В случае если значение старшего ляпуновского показателя превышает положительный порог 0.001, то соответствующий режим считается хаотическим, в противном случае режим считается регулярным.

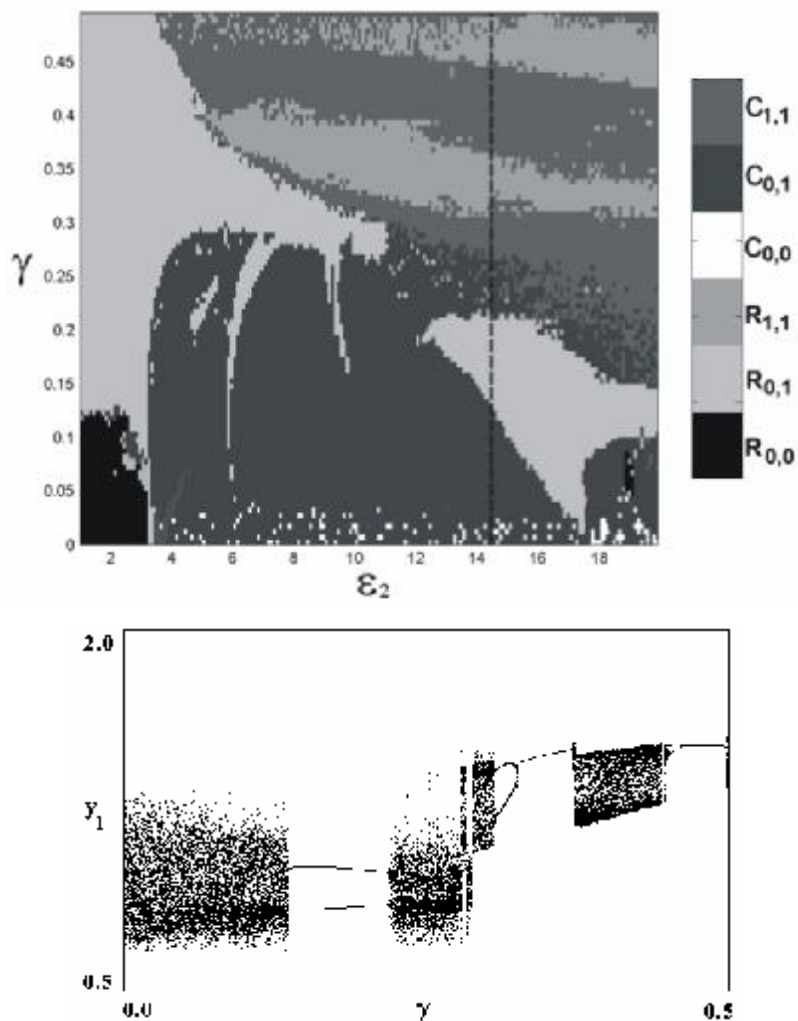


Рис. 3.5. а – карта динамических режимов системы (3.6), б – однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, построенная при изменении параметров вдоль линии отмеченной пунктиром на рисунке (а).

Существованию хаотических колебаний, стабилизированных относительно опорного колебания, на выходе сразу двух, только первой или только второй фазовых систем соответствуют режимы:  $C_{0,0}$ ,  $C_{0,1}$ ,  $C_{1,0}$ . Представим количественную характеристику –



процентное отношение суммарных размеров областей, соответствующих каждому отдельному динамическому режиму, к размеру всей области, представленной на рис. 3.5а:  $R_{0,0} - 2.36\%$ ,  $R_{0,1} - 21.68\%$ ,  $R_{1,1} - 13.62\%$ ,  $C_{0,0} - 0.55\%$ ,  $C_{0,1} - 37.65\%$ ,  $C_{1,1} - 24.14\%$ . Как видно, присутствие одного из интересующих нас режимов, а именно режима  $C_{0,1}$ , на данной карте достаточно существенно.

На рис. 3.5б представлена однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре для параметров, лежащих на пунктирной линии рис. 3.5а. Эта диаграмма иллюстрирует смену динамических режимов при увеличении  $g$ :  $C_{0,1} \rightarrow R_{0,1} \rightarrow C_{0,1} \rightarrow C_{1,1} \rightarrow R_{1,1} \rightarrow C_{1,1} \rightarrow R_{1,1}$ . Рассмотрим первый переход  $C_{0,1} \rightarrow R_{0,1}$ , который является характерным переходом между регулярным режимом и хаосом в окнах стабильности, которыми изрезана большая область с режимом  $C_{0,1}$  (рис. 3.5а). Этот переход осуществляется через перемежаемость первого рода.

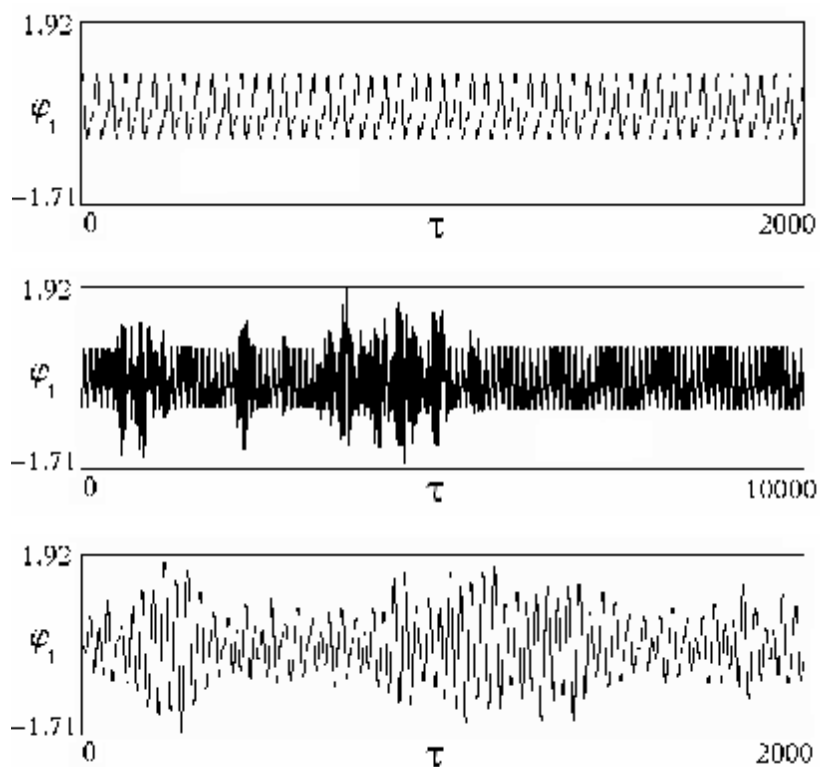


Рис. 3.6. Осциллограммы колебаний фазы на выходе первой системы ФАП, иллюстрирующие переход через перемежаемость при смене режимов  $C_{0,1} \rightarrow R_{0,1}$  на рис. 3.5 б.

Таким образом, численно показано, что математическая модель экспериментальной схемы (рис. 3.1) двух каскадно-связанных фазовых систем демонстрирует различные хаотические режимы в широкой области параметров. Теперь перейдем к рассмотрению результатов эксперимента и сравним их с результатами численного счета.

Для идентификации различных динамических режимов и визуализации фазовых портретов были сконструированы два цифровых фазовых детектора для определения разностей фаз между сигналами на выходах генераторов в системах **ФАП1,2** и опорным сигналом. Таким образом, возможно определение разностей фаз  $q_1 - q_0$  и  $q_2 - q_0$  на интервале от 0 до  $2\pi$ .

На рис. 3.7а – г представлены экспериментально полученные проекции фазовых портретов системы для различных значений коэффициента обратной связи  $k$ , частота опорного колебания  $f_0=69.6$  КГц ( $\gamma \approx 0.1\%$ ),  $R_2 = 5$  Ком ( $e_2 \approx 14.36$ ). На представленных рисунках вдоль вертикальных осей отложены величины напряжений на входах управляемых генераторов  $U_{1,2}$  (рис. 3.1), а вдоль горизонтальных осей отложены значения разностей фаз  $q_1 - q_0$  и  $q_2 - q_0$ . Экспериментальные фазовые портреты получены для параметров, близких по значению к параметрам, для которых были получены фазовые портреты при численном моделировании, представленные на рис. 3.3а – г.

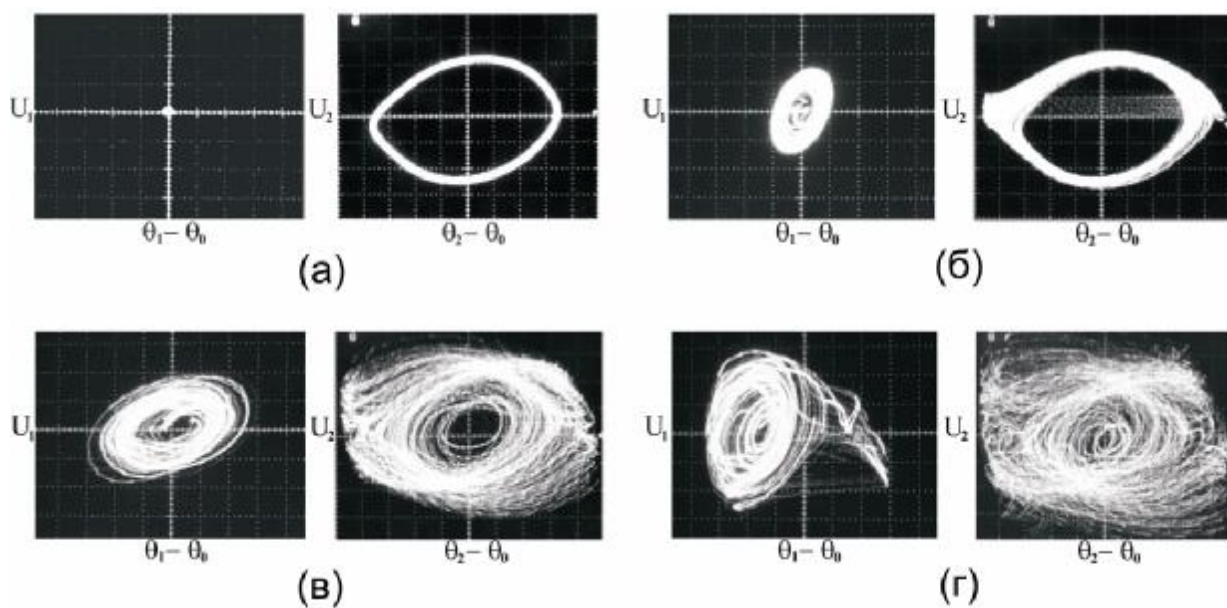


Рис. 3.7. Проекция фазовых портретов при увеличении параметра  $k$ : а – режим  $R_{0,0}$ , б,в – режим  $C_{0,1}$ , г – режим  $C_{1,1}$ .

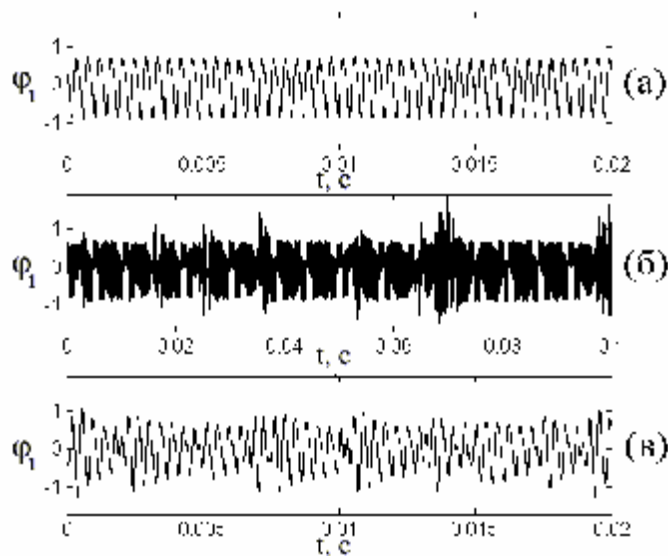


Рис. 3.8. Экспериментально полученные осциллограммы колебаний фазы на выходе первой системы ФАП, иллюстрирующие переход к хаосу через перемежаемость (параметры близки по значению к параметрам, используемых в численном эксперименте (рис. 3.6)).

Когда обратная связь между второй и первой фазовыми системами отсутствует,  $k=0$ , первая система находится в режиме синхронизации, а вторая система находится в режиме генерации квазисинхронных регулярных колебаний ( $R_{0,0}$ , рис. 3.7а). Введение обратной связи приводит к возникновению колебаний в цепи управления первой фазовой системы, которые становятся хаотическими при достаточно малом значении параметра связи  $k \approx 0.04$  (диагностика хаотического режима производится визуально по наблюдению проекций фазовых портретов). Так как переход к хаосу происходит в крайне узкой области изменения параметра  $k$ , то сценарий перехода экспериментально не наблюдается, можно лишь заметить, что данный переход является мягким, то есть хаотический аттрактор возникает в окрестности регулярного предельного движения, теряющего устойчивость. В отличие от каскада бифуркаций удвоения периода, который не виден в эксперименте, хорошо наблюдается переход к хаосу через перемежаемость (рис. 3.8), но уже в другой области параметров. В отличие от численного результата, представленного на рис. 3.3б, в эксперименте при тех же значениях параметров вторая фазовая система находится в режиме хаотических биений (рис. 3.7б). В экспериментальной схеме при наложенных ограничениях на изменение параметров не наблюдался режим  $S_{0,0}$ , по всей видимости, вследствие того, что он присутствует в достаточно малых областях параметров. На рис. 3.7в,г представлены режимы  $S_{0,1}$ , когда генерация хаотически модулированных колебаний происходит в первой фазовой системе, вторая фазовая система находится в режиме

хаотических биений, и режим  $C_{1,1}$ , соответствующий хаотическим биениям на выходе обеих фазовых систем.

В результате экспериментального исследования установлено, что рассматриваемая схема способна генерировать хаотически модулированные колебания на выходе первой фазовой системы в широкой области параметров. Область существования такого режима  $C_{0,1}$  представлена на рис. 3.9. Аналогичная область с режимом  $C_{0,1}$  существует для отрицательных значений  $g$ . Отметим достаточно хорошее согласование между экспериментально измеренной областью  $C_{0,1}$  и областью, полученной при численном расчете (рис. 3.5а).

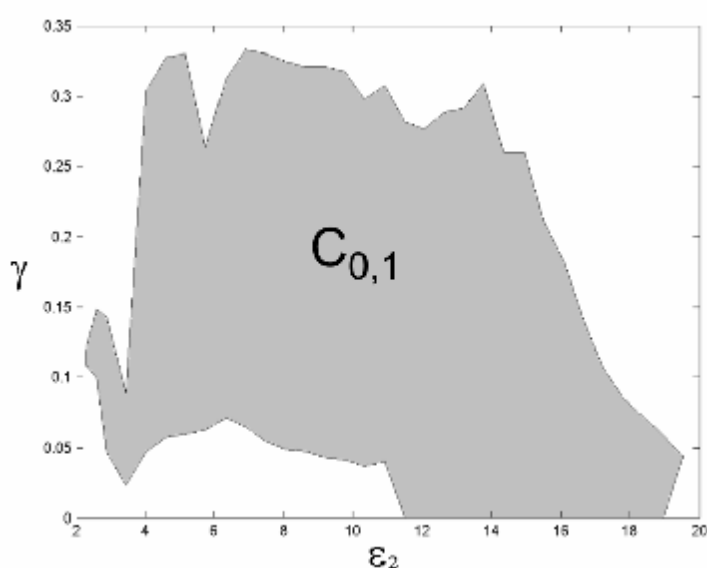


Рис. 3.9. Экспериментально измеренная область с режимом  $C_{0,1}$ .

### **Спектральные свойства хаотических колебаний, генерируемых в ансамбле двух каскадно-связанных фазовых систем.**

На рис. 3.10а представлен экспериментально измеренный спектр мощности хаотически модулированного колебания на выходе первой фазовой системы, когда во всем ансамбле реализуется режим  $C_{0,1}$ . Спектр представлен в окрестности первой гармоники опорного колебания (напомним, что в данной схеме используются генераторы разрывных колебаний, дающие на выходе сигнал вида меандра), равной в данном случае  $f_0=69$  КГц, другие параметры:  $k=0,3$ ,  $R_2=5$  КОм. В силу того, что хаотически модулированные колебания являются квазисинхронными со стабилизированной средней частотой, то спектр таких колебаний имеет ярко выраженный максимум, соответствующий частоте

опорного сигнала. Такая особенность позволяет манипулировать спектром, изменяя частоту опорного сигнала. При этом частотная расстройка должна лежать в пределах области существования режима  $C_{0,1}$  (рис. 3.9). На рис. 3.10б представлен сдвинутый спектр хаотически модулированного сигнала, когда частота опорного сигнала  $f_0=73$  КГц.

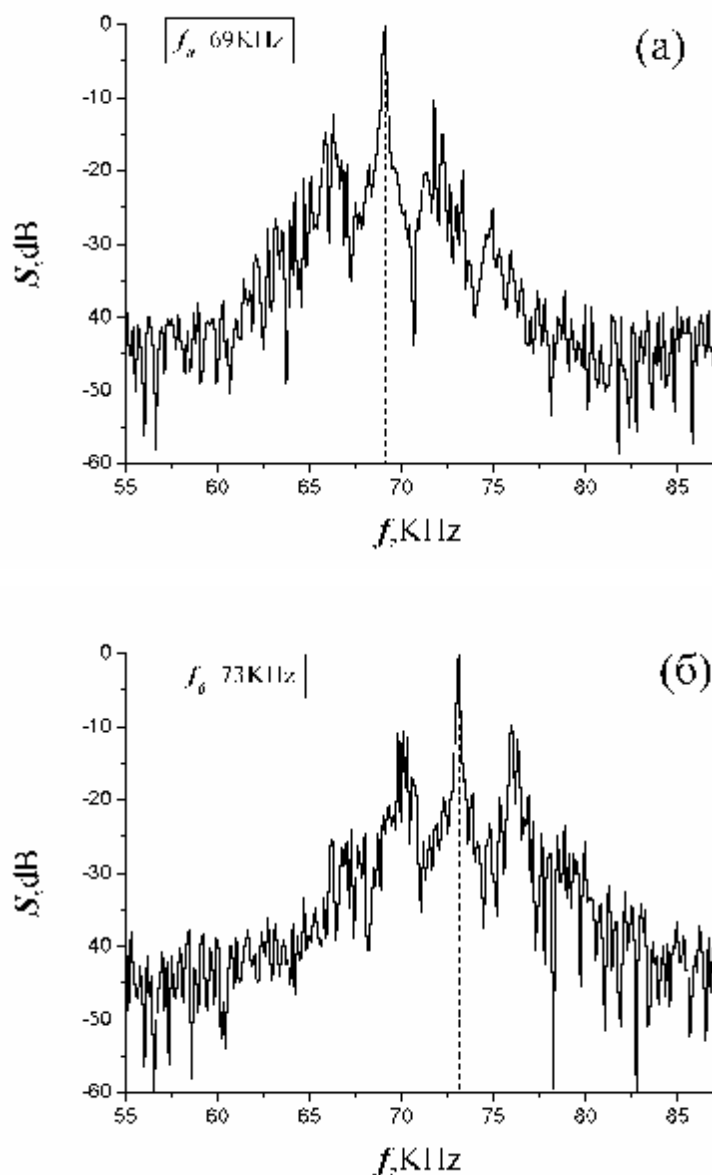


Рис. 3.10. Экспериментально измеренные спектры хаотически модулированных колебаний на выходе первой фазовой  $f_0 = 69$  КГц (а)  $f_0 = 73$  КГц (б).

С точки зрения прикладных задач, одной из принципиально важных характеристик спектра является его ширина, которая для хаотически модулированного колебания может быть оценена как:

$$h = \frac{\Delta f}{f_0} \approx 0.25 \quad (3.7)$$

где  $\Delta f$  – ширина спектра на уровне  $-40$  дБ. Полученная оценка позволяет нам отнести хаотически модулированные сигналы, генерируемые в рассматриваемой схеме, к классу широкополосных сигналов.

На рис. 3.11 представлен спектр хаотических колебаний на выходе первой фазовой системы, соответствующих режиму хаотических биений ( $k=1$ ). В данном случае спектр является более широким и равномерным, отсутствуют яркие пики, что делает режим генерации хаотических биений также интересным как с точки зрения использования в некогерентных системах связи, так и для применения в радиолокации. Для того, чтобы спектр на выходе фазовой системы был таким широким и достаточно равномерным, в проекции хаотического аттрактора на соответствующие переменные должно быть смешанное движение колебательно-вращательного типа (без явного преобладания колебательных или вращательных движений) как на рис. 3.3в,г и рис. 3.7в,г для вторых фазовых систем.

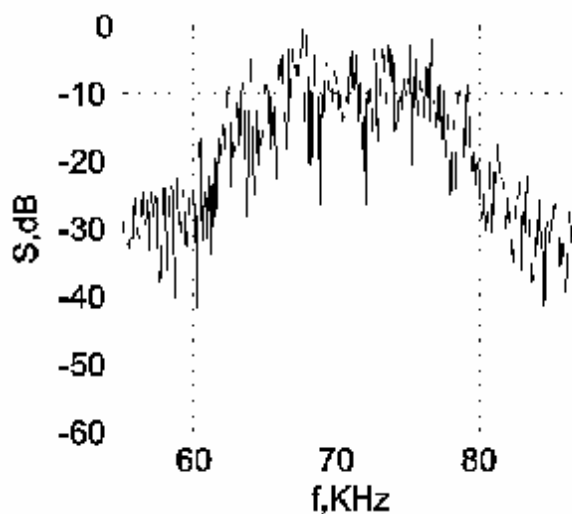


Рис. 3.11. Спектр колебаний на выходе первой фазовой системы в режиме хаотических биений.

Хаотически модулированные колебания и колебания, соответствующие режиму хаотических биений обладают различными свойствами и спектральными характеристиками. С одной стороны, хаотически модулированные колебания имеют преимущество в том, что можно осуществить синхронизацию таких колебаний (это было показано в работах [31, 32]), а значит на основе таких сигналов возможна реализация систем связи с когерентным приемом. В то же время осуществление надежной

синхронизации колебаний, соответствующих режиму хаотических биений, представляется трудной задачей. С другой стороны спектр колебаний в режиме биений (при этом аттрактор колебательно-вращательного типа) является более широкополосным и равномерным. Таким образом, использование того или иного режима зависит от конкретной прикладной задачи.

### **Синтез широкополосных и сверхширокополосных сигналов в цепочке локально-связанных фазоуправляемых генераторов.**

Рассмотрим пример хаотической динамики цепочки генераторов, связанных через кольца фазовой автоподстройки. Такая схема использовалась в предыдущей главе для решения задачи нелинейного фазирования в активных антенных решетках, где изучался режим синхронизации. Для задачи генерации широкополосных сигналов интересен другой режим, в котором в кольцах управления возбуждаются хаотические колебания. Покажем (без детального исследования нелинейной динамики), что с помощью такого ансамбля можно осуществить синтез хаотического сигнала с необходимой шириной спектра.

Рассмотрим модель цепочки связанных фазоуправляемых генераторов (2.12) в случае симметричной взаимной связи ( $k=d=0.5$ ). При этом будем рассматривать фильтр второго порядка с коэффициентом передачи:

$$K(p) = \frac{1}{1 + ep + mp^2}, \quad (3.8)$$

где  $e, m > 0$ . Тогда уравнения модели можно записать в следующем виде:

$$mj_n'' + ej_n' + j_n + \frac{1}{2}[\sin(j_n - j_{n-1}) + \sin(j_n - j_{n+1})] = g_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3.9)$$

$$j_0 = j_1, \quad j_{N+1} = j_N.$$

Предположим, что количество элементов цепочки нечетное и элемент в центре имеет нулевую частотную расстройку  $g_{(N+1)/2} = 0$ . Пусть начальные частоты генераторов имеют линейное градиентное распределение вдоль цепочки:  $g_{n+1} - g_n = g, 1 \leq n \leq N - 1$ . Полоса синхронизации (удержания режима синхронизации) в случае двух связанных генераторов:  $-1 < \gamma < 1$ .

Стоит отметить, что при таком распределении частот в цепочках локально-связанных возможно осуществление режима синхронизации похожего на режим синхронизации мод в лазерах [39]. В таком режиме частоты колебаний на выходе генераторов соответствуют

начальному градиентному распределению, при этом устанавливаются фазовые соотношения между элементами также соответствующие линейному градиентному распределению вдоль цепочки. Тогда суммарный сигнал от всех генераторов представляет собой периодическую последовательность импульсов с периодом следования обратно пропорциональным разнице частот между соседними генераторами. Другой интересный эффект, наблюдаемый в цепочке локально-вязанных генераторов с линейным градиентным распределением начальных частот, это кластерная синхронизация. Подробнее об этом эффекте можно узнать в работе [40].

Известно, что на практике одним из способов получения широкополосных сигналов является использование суммарного сигнала от нескольких независимых генераторов, имеющих разные частоты. Когда в рассматриваемой цепочке связи между генераторами отсутствуют, спектр суммарного сигнала представлен на рис. 3.12 ( $g=0.5$ ).

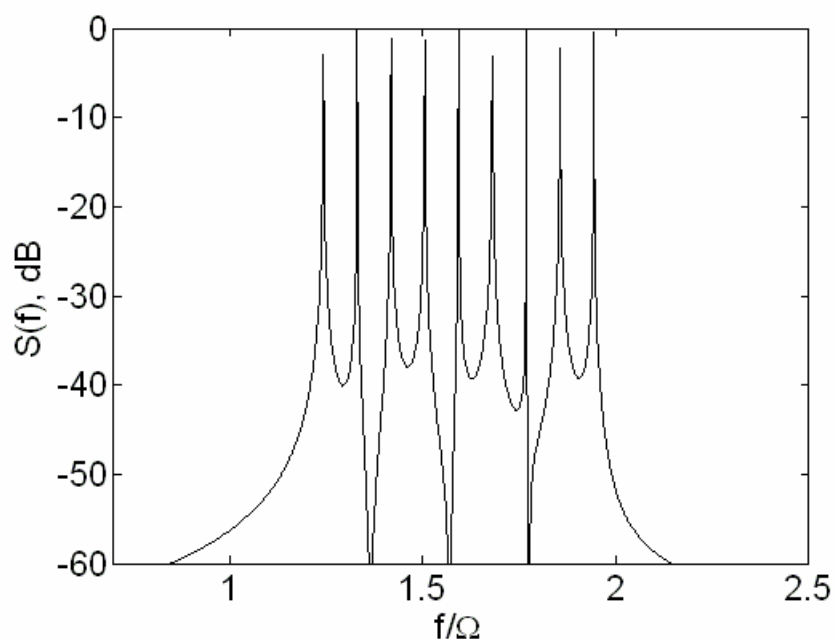


Рис. 3.12. Спектр суммарного сигнала на выходе генераторов с градиентным распределением частот.

Во многих приложениях требуется, чтобы спектр широкополосного сигнала был равномерным, без провалов как на рис. 3.12. Можно добиться равномерного спектра, если включить специальную связь между генераторами. В данном случае режим синхронизации является нежелательным. Для того чтобы синхронизация не наступала, даже в случае, когда начальные частоты всех генераторов попадают в полосу



синхронизации, как раз и используется фильтр второго порядка в кольцах управления. Параметры фильтра выбираются таким образом, чтобы режим синхронизации был неустойчивым (для этого в случае двух связанных генераторов необходимо, чтобы  $m > e/(1 - g^2)^{1/2}$ ). Тогда удастся получить широкий и равномерный спектр (рис. 3.12).

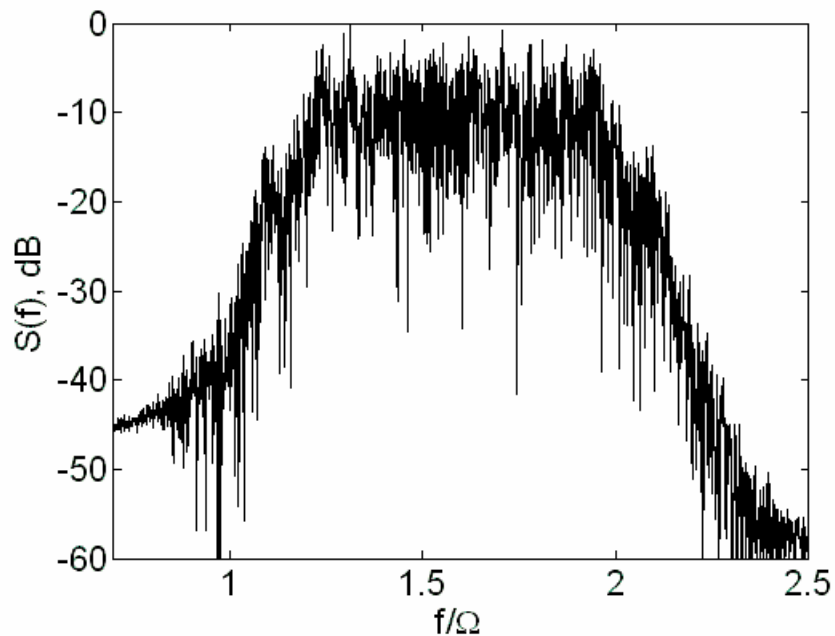


Рис. 3.12. Спектр суммарного сигнала в модели (3.9)  $g = 0.5$ ,  $e = 1$ ,  $m = 5$ .

Таким образом, предложенный метод позволяет с помощью выбора необходимого количества генераторов в цепочке и изменения начальных частот генераторов осуществить синтез высокочастотного либо сверхвысокочастотного сигнала с равномерным спектром требуемой ширины.

**Приложение** Приведем некоторые сведения из теории коллективных систем фазовой синхронизации (СФС). Системы автоматической фазовой синхронизации (СФС) занимают сейчас ведущее место среди систем радиоавтоматики. Большая гибкость СФС, обусловленная наличием петли обратной связи, позволяет использовать их в самых разных устройствах. Практически неограниченная свобода в построении петли обратной связи дает возможность конструировать оптимальные структуры СФС.

В связи с разнообразием условий применения СФС возникает необходимость удовлетворения многочисленным высоким, часто противоречивым, требованиям к их динамическим характеристикам - полосе захвата, помехоустойчивости, быстродействию и т. д. Одним из эффективных путей решения этой проблемы является переход от одноконтурного варианта построения систем к многоконтурным, т.е. переход от одной системы автоматической синхронизации к ансамблю из двух или нескольких взаимосвязанных систем. Такие системы получили в литературе название коллективных систем синхронизации.

Одной из таких задач, например, является задача создания синхронных сетей передачи данных или цифровых сетей связи. Здесь для некоторого количества пространственно разнесенных генераторов, находящихся в узлах сети, требуется обеспечить взаимную синхронизацию. Известны различные способы обеспечения надежной синхронизации: с использованием общего задающего синхронизатора, с использованием направленной или взаимной синхронизации элементов сети.

В качестве другого примера можно привести задачу об управлении элементами фазированных антенных решеток. Здесь для ансамбля генераторов требуется обеспечить не только синхронность работы, но и управление фазовыми сдвигами. Межканальные связи могут либо формироваться целенаправленно, например с помощью сравнения фаз сигналов в соседних каналах, либо осуществляться через общее поле излучения. Заметим, что аналогичным образом может осуществляться фазировка элементов в фазированных лазерных решетках.

Остановимся еще на задаче синхронизации нескольких электрических генераторов переменного тока, работающих на общую нагрузку, т. е. на задаче о синхронизации в энергосетях. Это пример из другой области - электротехники, однако он вполне уместен здесь, поскольку динамика синхронного электрогенератора упрощенно может описываться теми же уравнениями маятникового типа, что и динамика СФС. Взаимодействие электрогенераторов позволяет достичь необходимой стабильности частоты в энергосети. Интересно отметить, что именно энергосети весьма эффективно

продемонстрировали возможность существования в сетях синхронизации, наряду с режимом синхронизации, еще и сложных, вероятно хаотических режимов: в ноябре 1966 г. на восточном побережье США и Канады внезапное падение нагрузки привело к непредсказуемому изменению состояния всей сети -генераторы стали неуправляемо выпадать из фазового синхронизма друг с другом, вызвав тем самым потерю устойчивости во всей сети.

Приведенные примеры далеко не исчерпывают перечень тех практических задач, которые приводят к изучению сетей синхронизации, однако уже этих примеров достаточно, чтобы убедиться насколько важна и своевременна сейчас постановка вопроса об изучении нелинейной динамики связанных коллективных систем синхронизации - сетей автоматической синхронизации.

Общей теории динамического поведения нелинейных сетей синхронизации к настоящему времени не существует. Остаются неясными даже вопросы о принципиальной возможности существования режима глобальной синхронизации в сети. Существенная нелинейность парциальных систем синхронизации, из которых состоит сеть, нелинейность связей между ними и разнообразие вариантов соединения парциальных систем в сеть не оставляют надежды разобраться в динамике всей сети в целом лишь суммируя знания о динамике парциальных систем, хотя, заметим, что и задача об изучении динамики отдельных парциальных систем синхронизации сама по себе трудна и решена далеко не полностью. Задача о динамике сети в принципе должна решаться как пространственно-временная задача.

Вопросы, на которые должна ответить теория динамического поведения сетей синхронизации в первую очередь касаются:

- существования стационарного режима глобальной синхронизации
- характеристик стационарного режима синхронизации (распределение в сети остаточных ошибок по фазе, частоте);
- характера и длительности переходных процессов к стационарному режиму синхронизации;
- изучения условий вхождения в режим синхронизации и условий его нарушения (во времени и пространстве);
- характеристик асинхронных режимов, в том числе хаотических.

Кроме этого, спектр вопросов естественно расширить в сторону изучения воздействия различных помех на сеть, в том числе специфических для сети пространственных помех

типа локальных аварий, оптимизации параметров сети и, наконец, синтеза оптимальной структуры.

Далее остановимся только на первых двух задачах – установлении режима синхронизации в сети и распределении стационарных фаз.

Сделаем пояснения относительно применяемых терминов «синхронизация» и «асинхронизация». В силу того, что каждый элемент сети является автогенератором, частота которого управляется некоторым опорным генератором (сигналом) с помощью специальной цепи управления, т. е. цепи автоподстройки, естественно понимать, как это принято в теории систем автоматической синхронизации, под режимом синхронизации для каждого автогенератора (элемента сети) режим совпадения его частоты с частотой соответствующего опорного сигнала (при постоянной разности фаз). Если частоты не совпадают, то имеет место асинхронный режим. Рассматривая теперь всю сеть целом, будем считать, что если все элементы сети находятся в режиме синхронизации по отношению к опорным сигналам, то в сети имеет место глобальная синхронизация (или режим синхронизации в целом). Ясно, что для сети синхронизация может рассматриваться и в ином смысле - не каждого элемента по отношению к опорному сигналу, а каждого элемента сети по отношению к соседним элементам сети, т.е. взаимная синхронизация. Конечно, наличие синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам иногда может автоматически означать и наличие взаимной синхронизации элементов сети, например, если опорный сигнал для всех элементов сети одинаков. Однако, если опорные сигналы разные, то при наличии синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам взаимной синхронизации элементов сети не будет. Естественно, мыслима и обратная ситуация, когда каждый из элементов сети работает в асинхронном режиме по отношению к своему опорному сигналу, и, следовательно, режима синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам нет, однако при этом может иметь место взаимная синхронизация элементов сети.

Для определенности во всех случаях, когда это специально не оговаривается, термин синхронизация в сети будем понимать как синхронизацию по отношению к опорным сигналам.

Первый вопрос, который необходимо решить на пути построения теории динамического поведения сетей синхронизации, - выбор математической модели. С одной стороны, математическая модель должна учитывать специфику решаемой задачи и содержание вопросов, на которые надо получить ответ, с другой стороны, она должна быть сориентирована на тот арсенал средств и методов, который может быть использован

при ее изучении. Совершенно ясно, что исследование динамики коллективных систем синхронизации в большинстве случаев обязательно сведется к исследованию некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений высокого порядка. Перспективы решения такого сорта задач еще недавно были весьма неутешительными. И лишь появление сейчас суперкомпьютеров и, связанной с этим реальной возможности проведения сложных вычислительных экспериментов, позволяет сделать достаточно ощутимые шаги в решении поставленной задачи.

Однако даже с учетом возможностей современной вычислительной техники создание теории динамического поведения нелокальных нелинейных сетей произвольной конфигурации вряд ли реально. Естественно поэтому вначале ограничиться вариантами правильных конфигураций сети. С учетом этих соображений в качестве основной, базовой модели сети синхронизации примем решеточную модель. Решеточная модель сети интересна для исследования не только как идеализированный вариант произвольной сети, но и представляет самостоятельный интерес в ряде приложений, таких, например, как фазированные антенные решетки. Заметим, что решеточная модель явилась весьма продуктивной в различных физических задачах, например в физике твердого тела.

Рассмотрим решеточную модель сети синхронизации размером  $N \times M$  элементов. В узлах решетки расположены элементы сети - парциальные СФС, связанные между собой некоторыми связями. Для простоты примем, что связи - локальные. Запишем систему уравнений, описывающую динамику решеточной сети фазовой синхронизации, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{Pj_{n,m}}{\Omega_{n,m}} + K_{n,m}(p)F_{n,m}(j_{n,m}) - g_{n,m} = \\ d_{n-1,m}K_{n,m;n-1,m}(p)F_{n-1,m}(j_{n-1,m}; j_{n,m}) - \\ - d_{n,m-1}K_{n,m;n,m-1}(p)F_{n,m-1}(j_{n,m-1}; j_{n,m}) - \\ - ж_{n+1,m}K_{n,m;n+1,m}(p)F_{n+1,m}(j_{n+1,m}; j_{n,m}) - \\ - ж_{n,m+1}K_{n,m;n,m+1}(p)F_{n,m+1}(j_{n,m+1}; j_{n,m}); \quad n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (1п)$$

Здесь в правой части уравнения (1п) даны члены, учитывающие влияние на элемент  $(n, m)$  соседних элементов  $(n-1, m)$ ,  $(n, m-1)$ ,  $(n, m)$ ,  $(n+1, m)$ ,  $(n, m+1)$  соответственно.

Принятая структура модели (1п) аналогична сеточным моделям сплошных сред и решеточным моделям, принятым сейчас в задачах турбулентности, спиновых стекол,

клеточных автоматов. В этом смысле она обладает той общностью, которая позволяет отнести ее, вообще говоря, к дискретным моделям неравновесных диссипативных сред. С этой точки зрения ее исследование представляет интерес для понимания сложных явлений в сплошных неравновесных средах, таких, например, как турбулентность и формообразование

Вместе с тем эта модель полностью отражает специфику задач теории фазовой синхронизации. Она отражена в конкретной модели одного элемента сети - парциальной СФС (левая часть уравнения (1п) учитывает разные инерционности  $K_{n,m}(P)$  нелинейности  $F_{n,m}$  и т. д.) и в конкретном виде связей между элементами сети (правая часть уравнения учитывает коэффициенты связей  $d_{a,b}, ж_{a,b}$ , инерционности связей  $K_{a,b}(P)$ , нелинейности связей  $F_{a,b}$ ).

В качестве общего предположения будем считать справедливым предположение об однородности решетки. Обратимся прежде всего к рассмотрению наиболее простого случая - одномерной решетки, т. е. цепочки систем синхронизации. Естественно вначале рассмотреть вырожденный случай: однородную однонаправленную одномерную цепочку нелинейных СФС, т.е. связи между отдельными СФС будем считать однонаправленными.

Рассмотрим многоканальную систему, содержащую цепочку парциальных СФС, соединенных параллельно так, что для управления генератором  $\Gamma_n$  в  $n$ -й парциальной СФС  $CFC_n$  используется не только сигнал с выхода дискриминатора  $\Phi D_n$ , но и сигнал с выхода  $\Phi D_{n-1}$  предыдущей СФС  $CFC_{n-1}$ , т. е. связи парциальных СФС являются невзаимными, однонаправленными, и цепочка обладает свойствами цепочки потокового типа.

Математической моделью такой потоковой цепочки СФС является система операторных уравнений:

$$\frac{Pj_n}{\Omega_n} + K_n(p)F_n(j_n) + d_{n,n-1}K_{n,n-1}(p)F_{n-1}(j_{n-1}) = g_n; \quad n = \overline{1, N} \quad (2п)$$

Для упрощения анализа будем считать цепочку однородной, т. е. для любого  $n$  выполняется

$$j_{c_n} \equiv j_c, \quad d_{n,n-1} \equiv d, \quad F_n(j) \equiv F(j), \quad K_n(P) = K_{n,n-1}(P) \equiv K(P), \quad g_n \equiv g, \quad \Omega_n \equiv \Omega$$

Тогда (2.п) принимает вид

$$\frac{Pj_n}{\Omega} + K(p)F(j) = g + d K_{n,n-1}(p)F(j_{n-1}); \quad n = \overline{1, N} \quad (3п)$$

Рассмотрим наиболее простую ситуацию - наличие идеализированных фильтров  $K(p) = 1$  - в цепях управления и в каналах связи. Для определенности пусть  $F(j) = \sin j$ , хотя результаты дальнейшего анализа легко переносятся на другие виды типовых нелинейностей  $F(j)$ .

Переходя в уравнении (3п) к безразмерному времени  $t = t \Omega$ , имеем:

$$\frac{dj_n}{dt} + \sin j_n = g - d \sin j_{n-1}; \quad n = \overline{1, N} \quad (4п)$$

где естественно рассматривать граничное условие  $j_0(t) = 0$ . Параметр  $g$  достаточно рассмотреть неотрицательным.

Что касается параметра  $d$ , то имеют смысл как положительные, так и отрицательные коэффициенты связи.

Система (4п) является развивающейся не только во времени, но и в пространстве (с изменением  $n$ ). Поэтому нас будут интересовать в основном стационарные режимы, устанавливающиеся в различных парциальных  $C\Phi C_n$ , и в первую очередь, режим синхронизации. Поскольку связи между точечными элементами цепочки однонаправленные, модель (4п) можно отнести к классу развивающихся "вниз по потоку", следовательно, изучение ее пространственных бифуркаций можно вести на основании сведений о динамике отдельных парциальных  $C\Phi C_n$ .

При отсутствии связей ( $d = 0$ ) динамика каждой парциальной  $C\Phi C_n$  предельно проста и описывается уравнением

$$\frac{dj}{dt} + \sin j = g \quad (5п)$$

На рис. (1п) представлены разбиение пространства параметров (здесь оно вырожденное, одномерное) уравнения (5п) на две области ( $0 \leq g < 1$ ,  $g > 1$ ) и соответствующие фазовые портреты. Уравнение (5п) рассматривается на фазовой окружности. Для  $g < 1$  имеем два состояния равновесия: устойчивое с координатой  $j^s = \arcsin g$  и неустойчивое  $j^u = \pi - \arcsin g$ . При  $g = 1$  имеет место бифуркация слияния состояний равновесия в точке с координатой  $j = \pi/2$ . В области  $g > 1$  состояний равновесия нет.

Таким образом, в отсутствие связей при  $g < 1$  во всей цепочке СФС устанавливается пространственно однородный режим синхронизации, при котором в каждой  $C\Phi C_n$  генератор синхронизован опорным сигналом, а разность фаз постоянна и

равна  $j_n^s = \arcsin g$ . Аналогичным образом при  $g > 1$  во всей цепочке устанавливается пространственно однородный асинхронный вращательный режим, при котором координаты  $j_n(t)$  неограниченно растут.

Здесь и далее режим синхронизации в сети - это стационарный режим, при котором в каждой парциальной  $C\Phi C_n$  устанавливается постоянная остаточная разность фаз  $j_n^s$  причем, если синхронизация наступает во всех без исключения элементах, то будем называть его режимом глобальной синхронизации цепочки, а если только в части элементов - то режимом частичной синхронизации. Будем называть асинхронным установившийся режим, при котором разность фаз  $j_n(t)$  изменяется во времени, причем если  $j_n(t)$  нарастает (более чем на  $2p$ ), то режим будет асинхронным вращательным, если  $j_n(t)$  изменяется около некоторого среднего значения  $\bar{j}_n$  то асинхронным колебательным, если имеют место как участки колебаний, так и вращений - асинхронным смешанным. Надо отметить, что, вообще говоря, асинхронные колебательный и вращательный режимы могут иметь характер как регулярных движений, так и хаотических.

Пусть вначале  $g < 1$ . В этом случае изменение режимов «вниз по потоку» происходит следующим образом. В первом элементе устанавливается режим синхронизации со значением  $j_1^s = \arcsin g$ , а во втором элементе – стационарный режим, при котором  $\sin j_2 = g_2$ , где  $g_2 \equiv g - d \sin j_1^s$ . Если  $|g_2| < 1$ , то этот стационарный режим является режимом синхронизации для которого  $j_2^s = \arcsin g_2$ . Несмотря на положительность параметра начальной расстройки, величина  $j_2^s$  может быть как положительной - при слабой связи ( $d < 1$ ), так и отрицательной - при сильной связи ( $d > 1$ ).

Иная картина, если  $|g_2| > 1$ . В этом случае во втором элементе устанавливается асинхронный режим с неограниченно нарастающей фазовой переменной  $j_2(t)$ . Вследствие этого в третьем элементе и во всех последующих также будут устанавливаться асинхронные режимы с различными законами изменения  $j_n(t)$ . Смена с ростом  $n$  установившегося режима синхронизации для элемента  $n = 1$  на асинхронный при  $n \geq 2$  означает, что здесь имеет место пространственная бифуркация потери синхронизации



В режиме синхронизации установившиеся значения фазовых ошибок определяются соотношением  $j_n^s = \arcsin g_n$ . На рис. 2п, 3п даны графики зависимостей  $j_n^s$  от  $n$  для разных  $g, d$  (точки для разных  $n$  соединены прямыми).

При  $g < 1, d < 1$  все элементы! цепочки синхронизируются. Изменение установившихся значения  $j_n^s$  с ростом пространственной координаты имеет характер устойчивого процесса (см. рис. 2п), стремящегося к некоторому значению  $\bar{j}^s = \arcsin g/(1+d)$ . Это значение соответствует устойчивой при  $d < 1$  неподвижной точке отображения:  $g - \sin j_n - d \sin j_{n-1} = 0$ . Для иллюстрации на рис. 4п приведена диаграмма Ламерея, соответствующая этому отображению при  $0 < d < 1$ . Таким образом, при  $d < 1$  можно считать с некоторой точностью, что в цепочке СФС, начиная с некоторого номера  $n$ , устанавливается пространственно квазиоднородный режим синхронизации.

При  $g < 1, d > 1$  синхронизируются только элементы цепочки с номерами  $1 \leq n \leq n^*$ . При этом изменение  $j_n^s$  с ростом  $n$  имеет характер неустойчивого процесса (см. рис. 3п). Для элементов с номерами  $n > n^*$  в цепочке устанавливаются асинхронные режимы вращательного, колебательного или смешанного типов.

Рассмотрим поведение цепочки СФС в предположении взаимности связей. Для случая анизотропных цепочек, т.е. случая значительно отличающихся по величине коэффициентов связи между элементами цепочки (в направлении увеличения номеров элементов и в противоположном направлении), изучение поведения цепочки естественно основывать на результатах, полученных для цепочки СФС с однонаправленными связями. По-видимому, в значительно меньшей степени это относится к изотропным цепочкам, т.е. цепочкам с одинаковыми коэффициентами связи в том и другом направлениях. Математическую модель однородной цепочки СФС с взаимными связями, можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dj_n}{dt} + \sin j_n = g - d \sin j_{n-1} - ж \sin j_{n+1}, \quad n = \overline{1, N} \quad (6п)$$

с граничными условиями  $j_0(t) = j_{N+1}(t) \equiv 0$ . Здесь параметры  $d$  и  $ж$  - коэффициенты связи парциальной СФС <sub>$n$</sub> , СФС <sub>$n-1$</sub>  и СФС <sub>$n+1$</sub>  соответственно.. Фильтры в цепях управления СФС <sub>$n$</sub>  - идеализированные,  $K(p) = 1$ .



На рис. (4п) даны полученные исходя из (11п), (13п) при  $N = 70$  графики зависимостей установившихся значений  $j_n^s$  от  $n$ . для анизотропной цепочки  $d \neq ж$ .

На рис. (5п) даны соответствующие графики для изотропной цепочки  $ж = d$ . Дискретные значения  $j_n^s$  для разных  $n$  соединены отрезками прямых. Из анализа графиков следует, что в достаточно широком диапазоне изменения параметров распределение  $j_n^s$  в цепочке имеет характер пространственно затухающего процесса (от начала и конца цепочки к центральной части). Затухание происходит к значению  $\bar{j}^s = \arcsin \frac{g}{1+d+ж}$ , определяемому, из общего уравнения для состояний равновесия

$$\sin j_n^s = g - d \sin j_{n-1}^s - ж \sin j_{n+1}^s, \quad n = \overline{1, N}$$

при условии  $j_{n-1}^s = j_n^s = j_{n+1}^s \equiv \bar{j}^s$ . Таким образом, при соответствующем выборе параметров можно обеспечить во всей центральной части цепочки установление режима синхронизации с почти одинаковой остаточной разностью фаз  $j_n^s \approx \bar{j}^s$

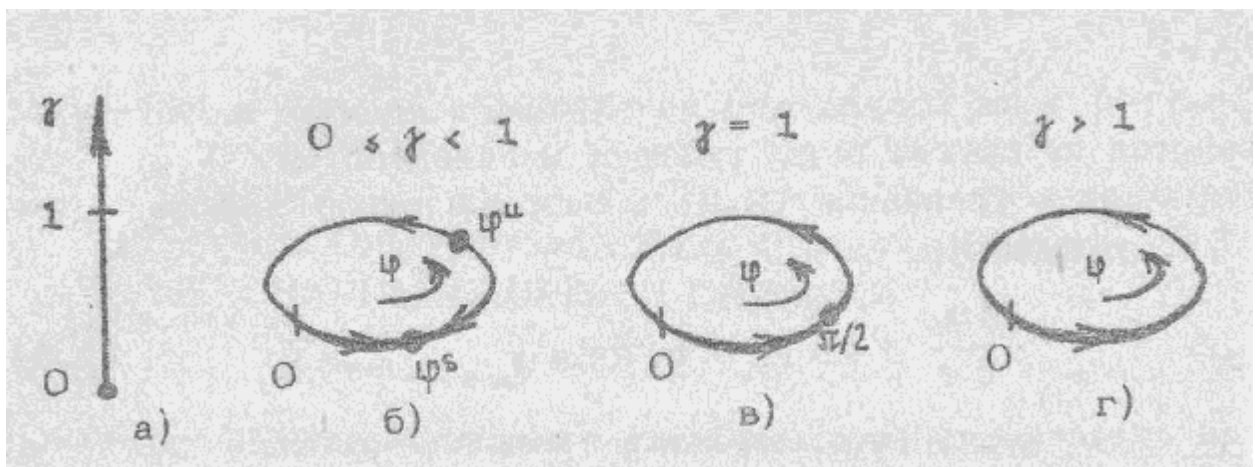


Рис.1п

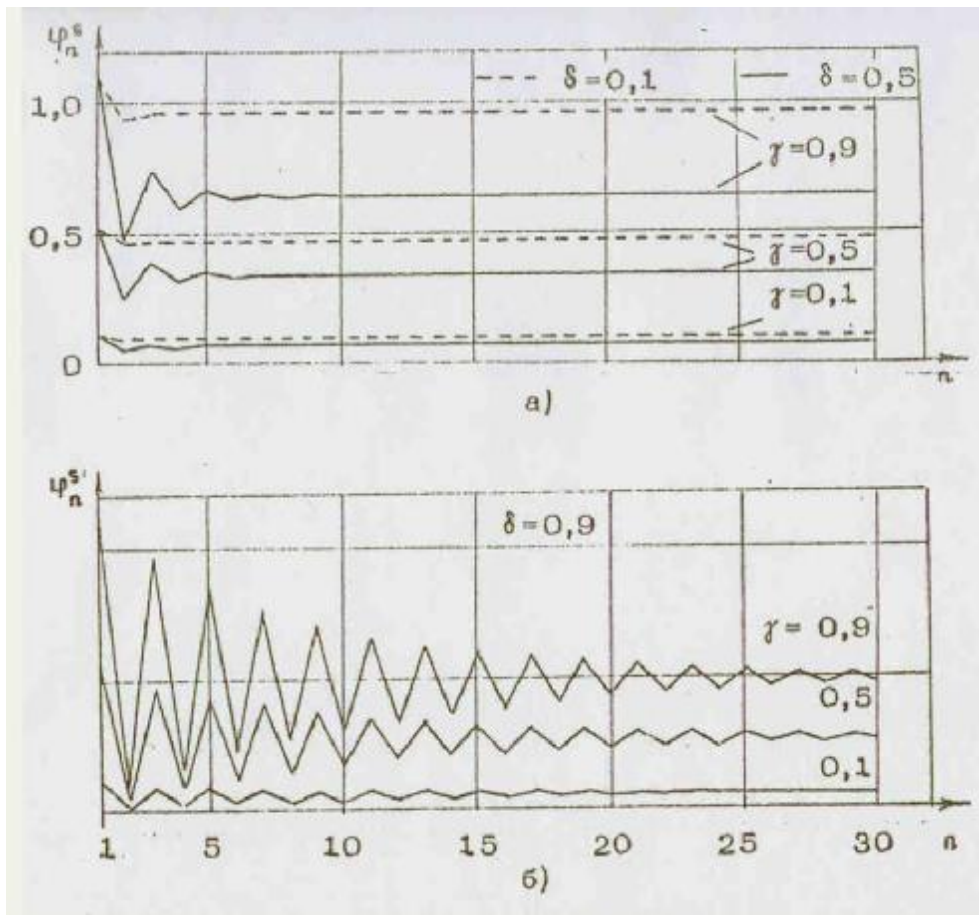


Рис.2п

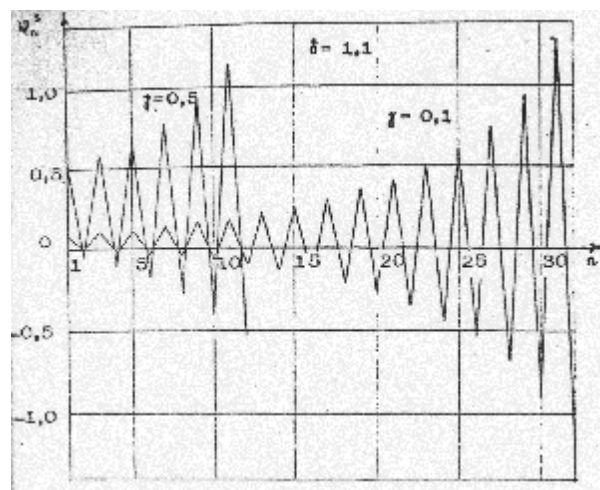


Рис.3П

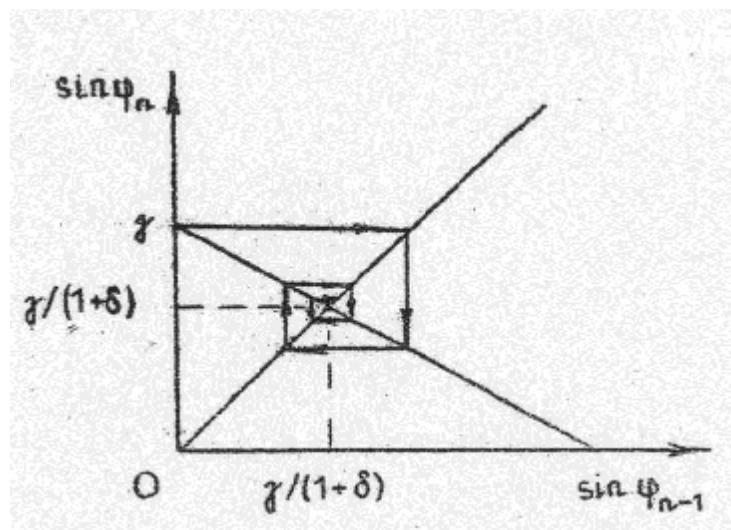


Рис.4п

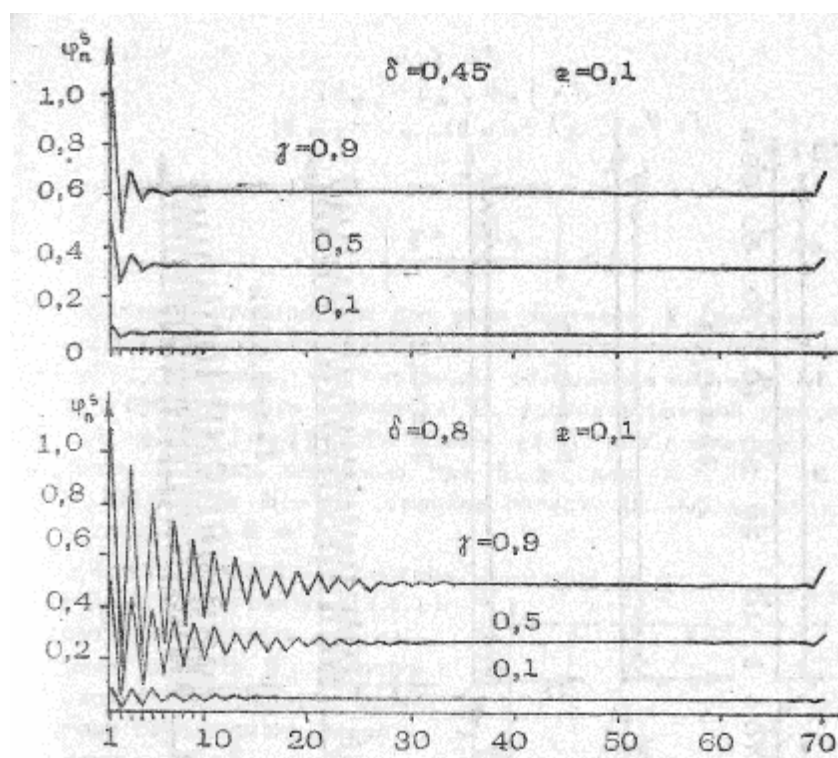


Рис.5П

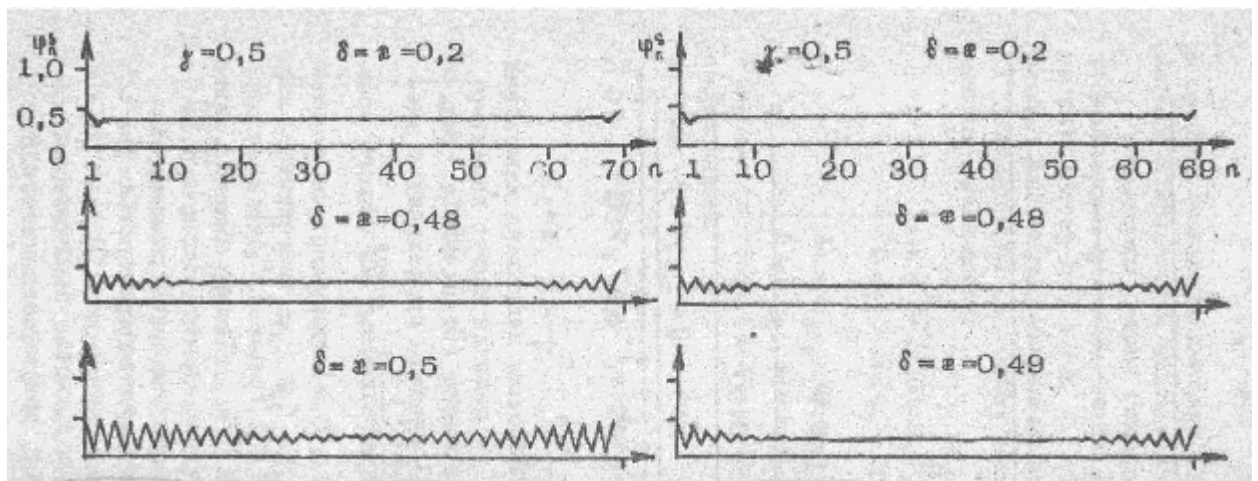


Рис.6П

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *J. Anderegg, S.J. Brosnan, M.E. Weber, H. Komine, and M.G. Wickham*, "8-watt coherently-phased 4-element fiber array", Proceedings of SPIE, Volume 4974, Advances in Fiber Lasers, L.N. Durvasula, Editor, July 2003, p. 1-6.
- [2]. *Бутусов М.М., Галкин С.Л., Орбинский С.П., Пал Б.П.* Волоконная оптика и приборостроение. –Л.: Машиностроение, 1987, 328 с.
- [3] *Окоси Т., Окамото К., Оцу М.* и др. Волоконно-оптические датчики. –Л.: Энергоматиздат, 1990, 256 с.
- [4]. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.*// Радиотехника и электроника. 1993. Т. 37. № 4. С. 732.
- [5] Автоматическая подстройка фазового набег в усилителях./ Ред. М.В. Капранова. –М.: Советское радио, 1972.
- [6] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. –М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002, 252 с.
- [7] *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations Waves and Turbulence./ Y. Kuramoto. –Berlin: Springer, 1984.
- [8] *Mishagin K.G. and Shalfeev V.D* // Proceedings of SPIE Int. Symposium on Optics & Photonics, 31 July-4 August 2005, San-Diego, USA. V. 5892. P. 477–485.
- [9] Системы фазовой синхронизации / Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982.
- [10] *York R. A., Itoh T.* Injection- and Phase-Locking Techniques for Beam Control// IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1998. V. 46. N. 11. P. 1920–1929
- [11] *Chang K., York R.A., Hall P.S., and Itoh T.* Active integrated antennas // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 2002. V. 50. N. 3. P. 937–944.
- [12] *Meadows B. K., et. al.* Nonlinear Antenna Technology // Proc. of the IEEE. 2002. V. 90. N. 5. P. 882–897.
- [13] *Stephan K.D.* Inter-injection-locked oscillators for power combining and phased arrays // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 1986. V. MTT-34. P. 1017–1025.
- [14] *Stephan K.D. and Morgan W.A.* Analysis of inter-injection-locked oscillators for integrated phased arrays // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1987. V. AP-35. P. 771–781.

- [15] *Liao P. and York R. A.* // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1993. V. 31. N. 10. P. 1810–1815.
- [16] *Heath T., Wiesenfeld K., York R. A.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. N. 11. P. 2619–2627
- [17] *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / Под ред. А.В. Гапонова, М.И. Рабиновича; Горький, 1989.
- [18] *Martinez R.D., Compton R.C.* // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. 1994. V. 4. N. 6. P. 166–168
- [19] *Buckwalter J.F., Heath T.H., York R.A.* Synchronization Design of a Coupled Phase-Locked Loop // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 2003. V. 51. N. 3. P. 952–960.
- [20] *MacCarini P.F., Buckwalter J., and York R.A.* Coupled Phase-Locked Loop Arrays for Beam Steering // IEEE MTT-S Digest. 2003. P. 1689–1692.
- [21] *Мишагин К. Г., Шалфеев В.Д.* Управление градиентными фазовыми распределениями в модели активной антенной решетки с локальными связями между элементами, Письма в ЖТФ, 2006. Т. 32. В. 23, С. 32. / Mishagin K. G. and Shalfeev V.D. Controlling Gradient Phase Distributions in a Model of Active Antenna Array with Locally Coupled Elements // Technical Physics Letters. 2006. V. 32. N. 23. P. 1014–1016.
- [22] *Шахтарин Б.И.* Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием – М.: Машиностроение, 1991. – 192.
- [23] *Жодзишский М.И., Сила-Новицкий С.Ю., Прасолов В.А. и др.* Цифровые системы фазовой синхронизации / Под ред. Жодзишского М.И. – М.: Сов. Радио, 1980. – 208 с.
- [24] *Alexanian A., Chang H.-C. and York R.A.* Enhanced Scanning Range of Coupled Oscillator Arrays Utilizing Frequency Multipliers // IEEE Ant. Propagat. Soc. Int. Symp. 1995. V. 2. N. 2. P. 1308–1310.
- [25] *Hwang J.-H. and Myung N.-H.* A new beam-scanning technique by controlling the coupling angle in a coupled oscillator array // IEEE Microwav Guided Wave Lett. 1998. V. 8, P. 191–193.
- [26] *Heath T.* Beam Steering of Nonlinear Oscillator Arrays Through Manipulation of Coupling Phases // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 2004. V. 52. N. 7. P. 1833–1842.
- [27] *J.N. Blakely and N.J. Corron*, Chaos 14, 1035 (2004)
- [28] *T.L. Carrol*, Chaos 15, 013109 (2005)
- [29] *L. Fortuna, M. Frasca, A. Rizzo*, IEEE Trans. on Instr. and Meas., V. 52, N. 6, 2003, P. 1809



- [30] *Fan-Yu Lin and Jia-Ming Liu*, IEEE J. of Quantum Electronics, Vol. 40, No. 6, 2004, p. 815.
- [31] *Korzinova M.V., Matrosov V.V., and Shalfeev V.D.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. V. 9. N. 5. P. 963.
- [32] *Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В.* // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44
- [34] *Матросов В.В.* // Письма в ЖТФ, 1996, Т. 22(23), С. 4.
- [35] *Матросов В.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 4. С. 357.
- [36] *Shalfeev V.D. and Matrosov V.V.* // Chaos in Circuits and Systems / Ed. by G.Chen and T.Ueta. World Scientific Publishing Company. Singapore. 2002. P. 111.
- [37] *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 6. С. 637.
- [#ChDomain] *Матросов В.В., Шалфеев В.Д., Касаткин Д.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49 № 5. С. 448.
- [38] *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев В.В., Шохнин В.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31(24). С. 31.
- [39] *R.A. York and R.C. Compton* Mode-Locked Oscillator Arrays // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. 1991. V. 1. N. 8. P. 215.
- [40] *G.V. Osipov and M.M. Sushchik* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7198.