

Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
«Физические основы информационно-телекоммуникационных систем»

Шалашов А. Г.
Господчиков Е. Д.

**«ИМПЕДАНСНЫЙ» МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ**
(Электронное методическое пособие)

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебная дисциплина: «Электродинамика»

Направление: «010700 Физика»

Нижний Новгород
2010

**«ИМПЕДАНСНЫЙ» МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ
(ЭЛЕКТРОННОЕ МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ)**

А. Г. Шалашов, Е. Д. Господчиков

В методическом пособии изложена удобная и физически прозрачная формулировка метода инвариантного погружения для решения задач распространения электромагнитных волн в сложных средах с анизотропным и гиротропным диэлектрическим или магнитным откликом. Пособие предназначено для проведения факультативных занятий по курсам «Электродинамика» и «Физика плазмы», читаемых на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета.

Может быть использовано студентами и аспирантами при изучении вопросов распространения электромагнитных волн в сложных средах.

Рецензент к.ф.-м.н. А. А. Балакин

**“IMPEDANCE” TECHNIQUE FOR MODELING OF ELECTROMAGNETIC WAVE
PROPAGATION IN ANISOTROPIC AND GYROTROPIC MEDIA**

A.G. Shalashov, E. D. Gospodchikov

Содержание

| | |
|---|-----------|
| 1. Введение | 1 |
| 2. Переход от граничной волновой задачи к эволюционной задаче | 9 |
| <i>2.1. Граничная задача для уравнений встречных волн</i> | 9 |
| <i>2.2. Импедансный метод для уравнений встречных волн</i> | 12 |
| <i>2.3. Альтернативный способ вывода импедансных уравнений</i> | 14 |
| 3. Импедансный метод для уравнений Максвелла в средах без пространственной дисперсии | 16 |
| <i>3.1. Вывод уравнений для тангенциальных полей</i> | 16 |
| <i>3.2. Разложение поля по локальным волноводным модам</i> | 20 |
| <i>3.3. Разложение поля по модам на границах</i> | 23 |
| <i>3.4. Разложение поля по вакуумным модам</i> | 25 |
| <i>3.5. Резюме</i> | 28 |
| 4. Общие свойства импедансных уравнений | 29 |
| <i>4.1. Связь представлений через локальные волноводные и граничные вакуумные моды</i> | 29 |
| <i>4.2. Отражение от полупространства, заполненного однородной средой</i> | 30 |
| <i>4.3. Отражение от слоя, заполненного однородной средой</i> | 31 |
| <i>4.4. Формальное общее решение для оператора отражения</i> | 32 |
| <i>4.5. Решение в виде разложения в ряд по степеням отражения</i> | 33 |
| 5. О законе сохранения энергии в импедансном методе | 35 |
| 6. Заключение | 37 |
| Литература | 39 |

1. Введение

В данной методической работе изложен достаточно простой общий способ решения задач распространения и линейной трансформации электромагнитных волн в сложных средах с анизотропным и гиротропным диэлектрическим или магнитным откликом¹. В качестве примера таких сред можно указать магнитоактивную плазму [1-4], оптически активные кристаллы [5] (в том числе магнитоупорядоченные кристаллы [6, 7] и жидкие кристаллы [8-10]), магнитные полупроводники [7, 11], искусственные метаматериалы [12], намагниченный вакуум [13, 14] и др. Основная задача, которую мы будем рассматривать, заключается в восстановлении электромагнитного поля внутри неоднородного слоя линейной среды с плоской границей при падении внешнего монохроматического излучения из вакуума или полупространства, заполненного однородной средой. К этой задаче примыкает и проблема определения полей во внешней среде – в отраженной от слоя волне и прошедшей волне за слоем.

Чтобы проиллюстрировать идею предлагаемого метода, рассмотрим простейший и хорошо известный случай плоской электромагнитной волны, падающей на неоднородный слой изотропной среды. Допустим, что среда характеризуется диэлектрической $\varepsilon(z)$ и магнитной $\mu(z)$ проницаемостями, зависящими только от одной пространственной координаты z , слой занимает область $z \in [a, b]$. Требуется найти распределение поля внутри и вне слоя. Распространение монохроматической электромагнитной волны с $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto \exp(i\omega t)$ в такой среде описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik_0 \mu(z) \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = ik_0 \varepsilon(z) \mathbf{E},$$

где $k_0 = \omega/c$ – вакуумное значение волнового вектора. Для простоты будем искать решение уравнений Максвелла в виде плоских волн, распространяющихся вдоль координаты z :

$$\mathbf{E} = E_x(z) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{H} = H_y(z) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_y.$$

Уравнения Максвелла сводятся к

$$\partial_z E_x = -ik_0 \mu H_y, \quad \partial_z H_y = -ik_0 \varepsilon E_x. \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\partial_z = \partial/\partial z$ обозначает производную по координате z . Вне слоя справедливы вакуумные решения для полей:

¹ Описываемый метод был разработан в работе авторов [59]. Более развернуто результаты данного методического пособия раздела изложены в обзорной статье А. Г. Шалашова и Е. Д. Господчикова «Импедансный метод решения задач распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах» журнале «Успехи физических наук» за 2011 год.

$$E_x = E^+ \exp(-ik_0 z) + E^- \exp(+ik_0 z),$$

$$H_y = E^+ \exp(-ik_0 z) - E^- \exp(+ik_0 z),$$

где E^+ и E^- равны амплитудам встречных волн, распространяющихся вдоль и против оси z . В силу непрерывности тангенциальных компонент полей, вакуумные решения определяют граничные условия для уравнений Максвелла внутри слоя. Обычно перед слоем задается амплитуда падающей волны $E^+(a) = E^{\text{inc}}$, а за слоем ставится условие отсутствия волны, распространяющейся назад, $E^-(b) = 0$. В результате мы приходим к следующим граничным условиям:

$$E_x(a) + H_y(a) = E^{\text{inc}}, \quad E_x(b) - H_y(b) = 0. \quad (1.2)$$

При прямом подходе обычно находится семейство решений уравнений Максвелла, удовлетворяющее одному из граничных условий и зависящее от одной неопределенной константы; затем эта константа подбирается так, чтобы удовлетворить второму граничному условию [15, 16]. Однако возможен другой подход, основанный на уравнении для волнового импеданса. В нашем примере импеданс плоской волны определяется как отношение ортогональных полей:

$$\xi(z) = E_x(z) / H_y(z).$$

Нетрудно убедиться, что $\xi = \pm 1$ соответствует бегущим вдоль и против оси z волнам. Подставив $E_x = \xi H_y$ в уравнения Максвелла (1.1) нетрудно получить замкнутое уравнение для волнового импеданса [17]:

$$\partial_z \xi = -ik_0 (\mu - \varepsilon \xi^2). \quad (1.3)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка уже не содержит компонент волновых полей, поэтому его решение однозначно определяется *одним* начальным условием. В качестве начального условия удобно принять условие отсутствия обратной волны на задней границе слоя $\xi(b) = 1$ – это условие эквивалентно второму из граничных условий (1.2). Подставив известный импеданс $\xi(z)$ в уравнения Максвелла, получаем уравнение первого порядка для волнового поля с начальным условием на передней границе слоя, например,

$$\partial_z E_x = -ik_0 \mu \xi^{-1} E_x, \quad E_x(a) = E^{\text{inc}} / [1 + \xi^{-1}(a)].$$

Таким образом, исходная краевая задача (1.1), (1.2) разбилась на две эволюционные задачи, которые можно решать последовательно. Математически приведенная выше процедура эквивалентна известному способу понижения порядка линейного однородного дифференциально уравнения второго порядка путем перехода к логарифмической

производной [18]. Действительно, после исключения одной из компонент поля уравнения Максвелла (1.1) приводят к одномерному уравнению Гельмгольца для оставшейся компоненты поля, например

$$\partial_z^2 E_x + k_0^2 \varepsilon \mu E_x = 0.$$

Путем замены переменной $V = (\partial_z E_x) / E_x$ это уравнение сводится к комплексному уравнению Риккати

$$\partial_z V + V^2 + k_0^2 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что данное уравнение полностью эквивалентно уравнению для волнового импеданса $\xi = -ik_0 \mu / V$.

В большинстве случаев вместо волнового импеданса удобнее ввести «локальный» коэффициент отражения, связывающий прямую и обратную волну в заданной точке z внутри исходного слоя

$$R(z) \equiv \frac{E^- \exp(+ik_0 z)}{E^+ \exp(-ik_0 z)} = \frac{\xi(z) - 1}{\xi(z) + 1}.$$

Уравнение для волнового импеданса (1.3) можно переписать как уравнение для коэффициента отражения,

$$\partial_z R = -\frac{ik_0}{2} (\mu (1 - R)^2 - \varepsilon (1 + R)^2), \quad (1.4)$$

с начальным условием $R(b) = 0$. В силу непрерывности тангенциальных компонент полей величину $R(z)$ можно трактовать также и как коэффициент, определяющий амплитуду волны, отраженной от «укороченного» слоя $[z, b]$ в вакуум. Введенный таким образом коэффициент отражения, зависящий от координаты, в дальнейшем мы также будем иногда называть «импедансным» оператором. По сравнению с (1.3) уравнение (1.4) проще и естественнее обобщается на случай более сложных сред. Кроме того, в отличие от истинного волнового импеданса ξ или логарифмической производной поля V , импедансный оператор R оказывается ограниченным в устойчивых средах, что в сложных случаях существенно упрощает численный анализ. Приведенный простейший пример показывает, что волновой импеданс характеризует локальную связь между встречными волнами, распространяющимися в неоднородной среде. Возможность определения этой связи путем решения *замкнутого* эволюционного уравнения позволяет свести исходную краевую волновую задачу к задаче эволюционного типа.

В настоящей работе приводится обобщение указанного метода на случай анизотропных и гиротропных сред с тензорным диэлектрическим и магнитным откликом. Особенностью таких сред является возможность распространения нескольких нормальных

волн с разными поляризациями. В однородной или плавно неоднородной среде нормальные волны не взаимодействуют, однако в общем случае приближение геометрической оптики в пространственно неоднородной среде может нарушаться, в результате чего между нормальными волнами появляется связь. В этом случае распределение электромагнитного поля описывается векторным волновым уравнением, соответственно вместо скалярного волнового импеданса возникает матричный оператор. Для этого оператора можно построить эволюционное уравнение, аналогичное уравнению (1.4), полученному для изотропной плоскострой среды. Это уравнение может быть получено и в случае трехмерно неоднородной (не плоскострой) среды, однако в этом случае «импеданс» является интегральным линейным оператором, что эквивалентно матрице с бесконечной размерностью. В случае же плоскострой анизотропной и гиротропной среды без пространственной дисперсии предложенный подход позволяет свести волновое уравнение к системе конечного числа нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент матрицы «волнового импеданса», допускающих простую формулировку граничных условий. Интегрирование этих уравнений позволяет находить коэффициенты отражения, поглощения и прохождения плоской монохроматической волны, падающей из вакуума на плоскострой среду, а затем по распределению волнового импеданса внутри среды восстанавливать распределение волнового поля для произвольной зависимости компонент тензора диэлектрической или магнитной проницаемости от координат.

Даже в матричной формулировке рассматриваемый подход является частной формой более общего метода, известного по терминологии, принятой в математической литературе, как метод инвариантного погружения (*invariant embedding*). Идея метода инвариантного погружения была первоначально предложена в работах В. А. Амбарцумяна [19, 20] и Чандрасекара [21] для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В настоящее время метод достаточно широко используется как математиками, так и физиками для сведения краевых задач к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобным для решения [22-28]. Достаточно полное представление о методе можно получить по монографии В. И. Кляцкина [27] и приведенным там источникам. Отметим, что этот метод давно и успешно применяется для решения задач радиозондирования ионосферы, требующих достаточно сложных вычислений электромагнитных полей, коэффициентов отражения и прохождения волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Первые попытки прямого интегрирования волновых уравнений в ионосфере [29-32] выявили основные вычислительные проблемы, связанные с большими размерами ионосферных слоев в длинах зондирующих волн и с наличием областей непроникновения волн, приводящих к развитию численных неустойчивостей. Чтобы обойти указанные трудности развивались различные

варианты метода погружения (хотя сам термин «метод погружения» не принят в ионосферной литературе). При этом использовались уравнения для волнового адмиттанса [33-35], логарифмической производной поля [36, 37], коэффициентов отражения от укороченного слоя [38-42]. В частности, для гиротропной плазмы было получено обобщающее (1.4) матричное дифференциальное уравнение для матрицы коэффициентов отражения от укороченного слоя [40, 41]. В квантовой механике метод инвариантного погружения наиболее известен как метод фазовых функций [43-46]. Аналогично волновому уравнению линейные уравнения Шредингера и Дирака могут быть сведены к нелинейному уравнению типа Риккати. Физическое содержание такого подхода состоит в том, что удовлетворяющая уравнению Риккати функция (фазовая функция) имеет в каждой точке смысл сдвига (по сравнению со случаем свободного движения) фазы волновой функции при рассеянии на обрезанном в этой точке потенциале. Таким образом, становится возможным непосредственное, без нахождения волновой функции, определение фазы рассеяния, что оказывается очень полезным для широкого круга приложений. В последнее время метод активно развивается в применительно к задачам взаимодействия квантовых частиц с поверхностью вещества [46-49], определения спектров многоэлектронных систем [50] и др. Использование упрощенной импедансной модели для решения одномерных квантомеханических задач рассматривались в методической заметке [51].

Отметим основные преимущества импедансного метода по сравнению с «прямым» решением граничной волновой задачи. Во-первых, при построении аналитической теории метод инвариантного погружения позволяет обойти проблему отсутствия «динамической причинности» в исходной задаче (например, отраженная назад волна зависит от тех неоднородностей, которые еще не пройдены прямой волной). Решения же эволюционных уравнений определяются лишь предыдущими по пространству значениями параметров и не зависят от последующих. Это свойство позволило, в частности, завершить формулировку статистической теории распространения волн в случайно неоднородных средах и обосновать «феноменологические» уравнения переноса излучения [28]. Во-вторых, метод инвариантного погружения позволяет избежать хорошо известной проблемы нераспространяющихся мод, возникающей при численном решении задач с линейным взаимодействием волн [29, 52]. Для таких задач характерны области непропускания с экспоненциальной зависимостью поля от координат. При прямом численном интегрировании из шумов неизбежно возбуждаются экспоненциально нарастающие решения, которые в случае достаточно протяженной области непропускания подавляют все остальные физические эффекты. С математической точки зрения это пример «жесткой» системы. Аналогичные проблемы возникают и при моделировании распространения волн в окрестности резонансов среды из-за наличия сильно

поглощающих мод. После переформулировки таких проблем к уравнениям метода инвариантного погружения экспоненциально растущие решения пропадают, то есть задача перестает быть жесткой (в устойчивых средах). Таким образом, вычислительные методы, основанные на импедансной технике, могут составить конкуренцию методу конечных элементов [53-55] или FDTD методу [56], обычно применяемых для моделирования волновых процессов в «жестких» средах. И, наконец, вследствие сохранения полной энергии в устойчивых средах импедансный оператор всегда ограничен, что позволяет эффективно рассчитывать разнообразные «резонансы» среды, в окрестности которых волновые поля либо неограниченны, либо могут принимать очень большие значения.

В указанных выше работах метод инвариантного погружения применялся, в основном, к скалярному волновому уравнению. Обобщение метода на случай векторного волнового уравнения в анизотропной гиротропной среде идеологически совершенно прозрачно, однако на практике сталкивается техническими трудностями из-за слишком громоздких выкладок. Поэтому, например, в ионосферных задачах распространение связанных волн в плоскостной плазме рассматривалось, как правило, лишь вдоль градиента неоднородности [38-41]. При попытке получить более общие импедансные уравнения в магнитоактивной плазме были допущены математические ошибки [57, 58], исправленные лишь в более поздней работе [59]. На наш взгляд, можно выделить две основные причины указанных трудностей. С одной стороны, классическое определение метода инвариантного погружения, используемое, например, в монографии В. И. Кляцкина, несмотря на математическую изящность, все же остается довольно формальным и трудным для человека с «физическим» стилем мышления. С другой стороны, физики при получении уравнений импедансного метода часто с самого начала привязываются к геометрическим модам среды (в каждой пространственной точке находится набор мод однородной среды). В сложных средах, например, в гиротропной плазме, это сопряжено довольно трудоемкими вычислениями. Между тем, для импедансного подхода, выделение геометрических мод среды не является обязательным, часто задача может быть существенно упрощена переходом к простому вакуумному набору мод [41, 59]. Основной задачей настоящей работы является представление «физически» понятного способа вывода импедансного метода, не зависящего от выбора модового представления электромагнитного поля [59, 60]. При этом эволюционные уравнения метода инвариантного погружения рассматриваются как уравнения для оператора отражения (от укороченного слоя), связывающего встречные волны, распространяющиеся вдоль некоторого выделенного направления в среде. В рамках этого подхода формальное обобщение на случай векторной волновой задачи, в том числе, и в

трехмерно неоднородных средах, тривиально, хотя, конечно, тоже может приводить к громоздким выкладкам в конкретных задачах.

2. Переход от граничной волновой задачи к эволюционной задаче

2.1. Граничная задача для уравнений встречных волн

В этом разделе мы изложим общую идею метода, не привязываясь к задаче распространения электромагнитных волн в сложных средах. Рассмотрим пространственно неоднородную линейную и стационарную среду, в которой может распространяться некоторое волновое поле $\mathcal{E}(t, \mathbf{r})$. Поле будем считать монохроматическим, $\mathcal{E} \sim \exp(i\omega t)$. Допустим, что задача позволяет выделить в среде направление z так, что исходное поле можно искать в виде суперпозиции двух встречных волн, распространяющиеся вдоль (\mathcal{E}^+) и против (\mathcal{E}^-) оси z :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^- .$$

Конкретные способы разбиения поля на встречные волны мы будем обсуждать в следующем разделе на примере уравнений Максвелла. В данном разделе для нас будет достаточно постулировать, что такое разбиение существует и, поскольку среда линейная, распространение исходного волнового поля полностью определяется двумя уравнениями вида

$$\begin{cases} \partial_z \mathcal{E}^+ = \hat{t}^+ \mathcal{E}^+ + \hat{r}^- \mathcal{E}^- \\ -\partial_z \mathcal{E}^- = \hat{t}^- \mathcal{E}^- + \hat{r}^+ \mathcal{E}^+ \end{cases} . \quad (2.1)$$

Эта система описывает распространение взаимодействующих встречных волн. Рассмотрим, например, первое уравнение. Здесь \hat{t}^+ – оператор эволюции «прямой» волны при условии отсутствия «обратной» волны ($\partial_z \mathcal{E}^+ = \hat{t}^+ \mathcal{E}^+$), а \hat{r}^- – оператор рассеяния «обратной» волны в «прямую». Аналогично можно проанализировать и второе уравнение. Знак минус перед производной во втором уравнении возникает из-за того, что волна распространяется против оси z .

Отметим, что \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- здесь могут быть векторами произвольной (но одинаковой) размерности. Например, ниже будет показано, что для электромагнитного поля в среде без пространственной дисперсии эта размерность равна двум. Соответственно, коэффициенты \hat{t}^\pm и \hat{r}^\pm уравнений встречных волн в общем случае представляют собой линейные операторы, локальные по координате z . В простейшем случае плоскостройной среды (пространственная неоднородность среды зависит только от z) эти операторы вырождаются просто в умножение на матрицы соответствующей размерности, зависящие от z и от

поперечного по отношению к направлению неоднородности волнового числа \mathbf{k}_\perp , которой в такой геометрии сохраняется. При наличии поперечной неоднородности эти операторы можно представить в виде интегральной свертки либо по поперечным координатам, либо по поперечным волновым числам, например:

$$\begin{aligned}\widehat{t}^+ \mathcal{E}^+(\mathbf{r}_\perp, z) &= \int \widehat{t}^+(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{r}'_\perp, z) d^2 \mathbf{r}'_\perp, \\ \widehat{t}^+ \mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \widehat{t}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2 \mathbf{k}'_\perp,\end{aligned}\tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \mathcal{E}^+(\mathbf{r}_\perp, z) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2 \mathbf{r}_\perp, \\ \widehat{t}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) &= \int \widehat{t}^+(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, z) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - i\mathbf{k}'_\perp \mathbf{r}'_\perp) d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp.\end{aligned}\tag{2.3}$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать в фурье-представлении по поперечным координатам, поскольку, как будет показано в следующем разделе, оно позволяет естественным образом отсортировать волны, распространяющиеся в противоположных направлениях относительно оси z .

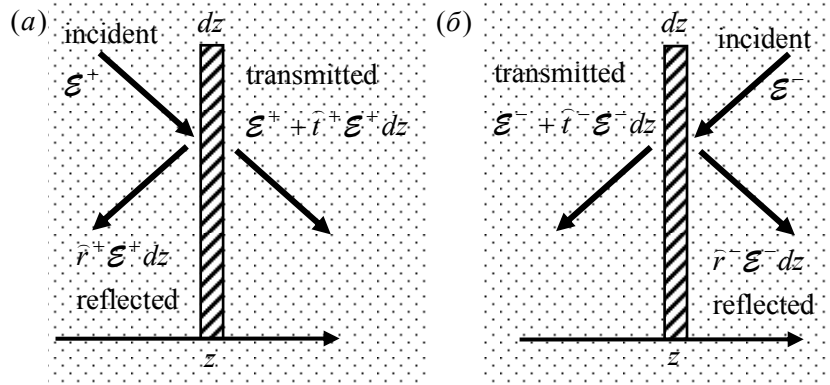


Рис. 1. К пояснению физического смысла дифференциальных операторов отражения и прохождения.

Для широкого класса задач уравнения встречных волн могут быть получены из естественных физических соображений. В случае неограниченных (не волноводных) сред для этого достаточно, чтобы в *однородной* среде решения уравнений (2.1) соответствовали плоским волнам с определенным направлением распространения. Пусть мы знаем, как происходит взаимодействие поля с бесконечно тонким слоем $[z, z + dz]$ рассматриваемой среды, вырезанным поперек оси z и окруженным однородной средой (вакуумом). А именно, как показано на рис. 1, волна $\mathcal{E}^+(z)$, падающая на слой из $-\infty$, однозначно определяет поле $\mathcal{E}^+(z + dz)$ в прошедшей волне за слоем и поле $\mathcal{E}^-(z)$ в отраженной волне перед слоем,

$$\mathcal{E}^+(z+dz) = [\hat{I} + \hat{t}^+(z) dz] \mathcal{E}^+(z), \quad \mathcal{E}^-(z) = \hat{r}^+(z) dz \mathcal{E}^+(z), \quad (2.4)$$

Здесь $\hat{I} + \hat{t}^+(z) dz$ и $\hat{r}^+(z) dz$ – линейные операторы, являющиеся обобщением коэффициентов прохождения и отражения поля от бесконечно тонкого слоя, \hat{I} – единичный (тождественный) оператор. Аналогично можно определить и операторы прохождения и отражения для поля $\mathcal{E}^-(z)$, падающего на слой из $+\infty$,

$$\mathcal{E}^-(z-dz) = [\hat{I} + \hat{t}^-(z) dz] \mathcal{E}^-(z), \quad \mathcal{E}^+(z) = \hat{r}^-(z) dz \mathcal{E}^-(z). \quad (2.5)$$

Заметим, что в общем случае падение волн «слева» и «справа» не эквивалентно. Поэтому нам пришлось ввести две пары операторов прохождения и отражения, различающихся индексом \pm , отвечающим за направление распространения волны. Комбинируя соотношения (2.4) и (2.5) нетрудно получить уравнения для амплитуд встречных волн в форме (2.1). Таким образом, данные уравнения имеют прозрачный физический смысл – амплитуда каждой из волн \mathcal{E}^\mp изменяется из-за «неидеального» прохождения через среду, $\pm \hat{t}^\pm \mathcal{E}^\pm$, и из-за отражения встречной волны, $\mp \hat{r}^\mp \mathcal{E}^\mp$. Эти процессы обуславливают изменение поляризации волнового поля в процессе распространения в неоднородной среде, в том числе и связанное с линейной конверсией нормальных мод среды, а также поглощение поля в диссипативной среде.

Для определения волнового поля уравнения встречных волн необходимо дополнить граничными условиями. Рассмотрим задачу о падении волны на слой среды, лежащий в интервале $z \in [a, b]$, со стороны $z \rightarrow -\infty$. В этом случае в плоскости $z = a$ перед слоем необходимо задать амплитуду падающей волны \mathcal{E}^+ , а в плоскости $z = b$ за слоем – условие отсутствия отраженной волны \mathcal{E}^- . В результате мы приходим к следующим граничным условиям:

$$\mathcal{E}^+(a) = \mathcal{E}^{\text{inc}}, \quad \mathcal{E}^-(b) = 0, \quad (2.6)$$

где \mathcal{E}^{inc} обозначает распределение поля падающей волны на поверхности слоя. Таким образом, мы пришли к задаче, в которой начальные амплитуды связанных встречных волн задаются на разных концах исследуемой области. Как уже отмечалось во введении, непосредственное решение такой задачи может представлять определенные трудности как при теоретическом анализе, так и при численном моделировании.

2.2. Импедансный метод для уравнений встречных волн

Существует простой способ, позволяющий свести рассматриваемую краевую задачу к эволюционной задаче с начальными условиями. Давайте формально определим «импедансный» оператор, связывающий амплитуды встречных волн в заданном сечении z :

$$\mathcal{E}^-(z) = \widehat{R}(z) \mathcal{E}^+(z). \quad (2.7)$$

Этот оператор можно рассматривать как оператор отражения от усеченного слоя $[z, b]$, связывающий падающую со стороны малых z и отраженную волны при условии, что пространство вне слоя заполнено однородной средой. Например, $\widehat{R}(a)$ определяет оператор отражения от исходного $[a, b]$. Оператор $\widehat{R}(z)$ линеен, поскольку исходная система уравнений для встречных волн линейна. Поэтому данный оператор также имеет структуру типа (2.2). Подставив (2.7) в уравнения (2.1) и (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \partial_z \mathcal{E}^+ &= (\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) \mathcal{E}^+, & \mathcal{E}^+(a) &= \mathcal{E}^{\text{inc}}, \\ \partial_z (\widehat{R} \mathcal{E}^+) &= -(\widehat{t}^- \widehat{R} + \widehat{r}^+) \mathcal{E}^+, & \widehat{R}(b) \mathcal{E}^+(b) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Второе уравнение можно преобразовать к виду

$$\partial_z (\widehat{R} \mathcal{E}^+) = (\partial_z \widehat{R}) \mathcal{E}^+ + \widehat{R} \partial_z \mathcal{E}^+ = (\partial_z \widehat{R} + \widehat{R} \widehat{t}^+ + \widehat{R} \widehat{r}^- \widehat{R}) \mathcal{E}^+ = -(\widehat{t}^- \widehat{R} + \widehat{r}^+) \mathcal{E}^+,$$

исключив производную $\partial_z \mathcal{E}^+$. В каждой точке это соотношение должно выполняться при любом \mathcal{E}^+ , поэтому его можно переписать как *операторное* уравнение для \widehat{R} :

$$-\partial_z \widehat{R} = \widehat{R} \widehat{r}^- \widehat{R} + \widehat{R} \widehat{t}^+ + \widehat{t}^- \widehat{R} + \widehat{r}^+, \quad \widehat{R}(b) = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение, являющееся обобщением скалярного уравнения (1.4) на случай векторной и неодномерной задачи, уже не содержит амплитуд встречных волн. Данное уравнение приводит к новой эволюционной задаче, которая может оказаться удобнее исходной краевой задачи.

Сформулируем основной алгоритм импедансного метода. Изменение оператора $\widehat{R}(z)$ вдоль координаты z описывается уравнением первого порядка, поэтому начальное условие в (2.9) однозначно определяет решение. Далее, найденное решение для оператора отражения можно подставить в уравнение (2.8) и получить вторую эволюционную задачу, определяющую распределение бегущей волны $\mathcal{E}^+(z)$ для заданной структуры падающего излучения. Заметим, что этим двум эволюционным задачам соответствует разное направление интегрирования – «справа налево», т.е. от b к a , для $\widehat{R}(z)$ и «слева направо» для $\mathcal{E}^+(z)$; решение второй эволюционной задачи возможно только после решения первой. Наконец, после определения $\widehat{R}(z)$ и $\mathcal{E}^+(z)$ с помощью соотношения (2.7) можно восстановить распределение поля обратной волны $\mathcal{E}^-(z)$. Таким образом, мы полностью определяем волновое поле во всей исследуемой области.

За переход от граничной задачи к эволюционной приходится расплачиваться. Во-первых, для $\widehat{R}(z)$ получается нелинейное уравнение вместо исходной системы линейных

уравнений. Во-вторых, это уравнение операторное. Последнее обстоятельство не очень обременительно для плоскостойкой среды, в которой все коэффициенты в уравнении (2.9) являются матрицами, следовательно, оператор $\widehat{R}(z)$ также представляется в виде числовой матрицы с элементами, зависящими от z , а уравнения (2.8) и (2.9) сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в общем случае мы вынуждены иметь дело с операторами вида (2.2), которые приводят к интегро-дифференциальными уравнениями. Приведем их для ясности в явном виде (в Фурье-представлении):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^-(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \widehat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}'_\perp, \\
-\partial_z \widehat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) &= \iint \widehat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \widehat{r}^-(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'''_\perp, z) \widehat{R}(\mathbf{k}'''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}''_\perp d^2\mathbf{k}'''_\perp + \\
&\quad + \iint [\widehat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \widehat{t}^+(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) + \widehat{t}^-(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \widehat{R}(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z)] d^2\mathbf{k}''_\perp + \widehat{r}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z), \\
\partial_z \mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) &= \iint [\widehat{r}^-(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \widehat{R}(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}''_\perp + \widehat{t}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z)] \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}'_\perp.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3. Альтернативный способ вывода импедансных уравнений

Для того, чтобы пояснить физический смысл сделанных преобразований, рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть имеется слой среды $z \in [a, b]$, на который падает излучение, распространяющееся вдоль z со стороны $-\infty$. Разобьем слой на два соприкасающихся слоя $[a, c]$ и $[c, b]$. Задача – найти операторы отражения \widehat{R}^+ и прохождения \widehat{T}^+ для исходного слоя $[a, b]$, если известны все характеристики отражения и прохождения излучения для слоев $[a, c]$ и $[c, b]$ по отдельности.

Введем обозначения. Пусть изолированный слой $[a, c]$ характеризуется операторами отражения \widehat{R}_1^+ , \widehat{R}_1^- и прохождения \widehat{T}_1^+ , \widehat{T}_1^- для волн, падающих вдоль и против оси z . Изолированный второй слой характеризуется операторами \widehat{R}_2^+ , \widehat{R}_2^- , \widehat{T}_2^+ и \widehat{T}_2^- . Два слоя вместе представляют собой своеобразный интерферометр Фабри-Перо, в котором возможна многолучевая интерференция. Суммируя вклады всех интерферирующих лучей можно найти прошедшее $\mathcal{E}^{\text{pass}}$ и отраженное $\mathcal{E}^{\text{refl}}$ излучение для комбинированного слоя $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\text{pass}} &\equiv \widehat{T}^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} = \widehat{T}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \widehat{T}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \widehat{T}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \dots, \\
\mathcal{E}^{\text{refl}} &\equiv \widehat{R}^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} = \widehat{R}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \widehat{T}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \widehat{T}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \widehat{T}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+ \widehat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \dots,
\end{aligned}$$

В правых частях можно выделить операторные геометрические прогрессии вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+)^k = (\widehat{I} - \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+)^{-1},$$

операция $(\dots)^{-1}$ здесь обозначает взятие обратного оператора. Учитывая это свойство, нетрудно получить искомые выражения для операторов отражения и прохождения исходного слоя:

$$\widehat{R}^+ = \widehat{R}_1^+ + \widehat{T}_1^- \widehat{R}_2^+ (\widehat{I} - \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+)^{-1} \widehat{T}_1^+, \quad \widehat{T}^+ = \widehat{T}_2^+ (\widehat{I} - \widehat{R}_1^- \widehat{R}_2^+)^{-1} \widehat{T}_1^+. \quad (2.11)$$

Покажем, что эти операторные соотношения приводят к уравнениям (2.8), (2.9) импедансного метода. Допустим, что один из рассматриваемых слоев бесконечно тонкий, например,

$$[a, c] = [z - dz, z], \quad [c, b] = [z, b].$$

Тогда, в соответствии с введенными выше определениями,

$$\begin{aligned} \widehat{R}_1^\pm &= \widehat{r}^\pm dz, & \widehat{T}_1^\pm &= \widehat{I} + \widehat{t}^\pm dz, \\ \widehat{R}_2^+ &= \widehat{R}(z), & \widehat{T}_2^+ &= \widehat{T}(z), \\ \widehat{R}^+ &= \widehat{R}(z - dz), & \widehat{T}^+ &= \widehat{T}(z - dz). \end{aligned}$$

Во второй строке по аналогии с ранее введенным оператором отражения $\widehat{R}(z)$ мы определили оператор прохождения $\widehat{T}(z)$ волны через усеченный слой $[z, b]$. Подставим приведенные операторы в соотношения (2.11):

$$\begin{aligned} \widehat{R}(z - dz) &= \widehat{r}^+ dz + (\widehat{I} + \widehat{t}^- dz) \widehat{R}(z) (\widehat{I} - \widehat{r}^- \widehat{R}(z) dz)^{-1} (\widehat{I} + \widehat{t}^+ dz), \\ \widehat{T}(z - dz) &= \widehat{T}(z) (\widehat{I} - \widehat{r}^- \widehat{R}(z) dz)^{-1} (\widehat{I} + \widehat{t}^+ dz). \end{aligned}$$

Раскладывая эти соотношения в ряд Тейлора по dz , получаем выражения для изменения операторов отражения и прохождения в первом порядке

$$-d\widehat{R} = (\widehat{R} \widehat{r}^- \widehat{R} + \widehat{R} \widehat{t}^+ + \widehat{t}^- \widehat{R} + \widehat{r}^+) dz, \quad -d\widehat{T} = \widehat{T} (\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) dz. \quad (2.12)$$

Первое уравнение в точности соответствует уравнению (2.9). Как и следовало ожидать, наше основное эволюционное уравнение описывает изменение оператора отражения при добавлении бесконечно тонкого слоя со стороны падающего излучения. Учитывая тождество

$$d(\widehat{T}\widehat{T}^{-1}) = d\widehat{T} \cdot \widehat{T}^{-1} + \widehat{T} \cdot d\widehat{T}^{-1} = 0,$$

второе уравнение можно переписать в виде

$$d\widehat{T}^{-1} = (\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) \widehat{T}^{-1} dz,$$

эквивалентном уравнению для бегущей волны (2.8). Это совпадение является следствием сохранения величины $\widehat{T}(z)\mathcal{E}^+(z)$, которая по определению оператора $\widehat{T}(z)$ определяет прошедшее поле на задней границе слоя. Таким образом, рассматривая задачу о добавлении бесконечно тонкого слоя к неоднородному слою, мы снова приходим к уравнениям (2.8) и (2.9). Этот альтернативный способ менее изящен в математическом отношении, зато, на наш взгляд, более естественен с точки зрения физика.

Подчеркнем еще раз, что описанный способ решения граничной волновой задачи достаточно универсален. В частности, несмотря на то, что при выводе импедансных уравнений было выделено некоторое «основное» направление распространения волн вдоль оси z , методика не ограничивается плоскостойкими средами (хотя в плоскостойких средах уравнения упрощаются). Для применения импедансного метода в каждой конкретной задаче достаточно определить операторы отражения и прохождения для дифференциально тонкого слоя среды. В следующем разделе мы покажем, как это можно сделать в случае электромагнитных волн, распространяющихся в среде с анизотропным и гиротропным диэлектрическим и магнитным откликом.

3. Импедансный метод для уравнений Максвелла в средах без пространственной дисперсии

В данном разделе мы рассмотрим способы приведения уравнений Максвелла к эквивалентным уравнениям для встречных волн (2.1), т.е. к виду, адаптированному для применения импедансной техники. Заметим сразу, что решение этой задачи не единственно, поскольку у нас существует некоторая свобода в выборе поля \mathcal{E} , описывающего электромагнитные волны. С физической точки зрения, вывод уравнений встречных волн сводится к определению операторов отражения \hat{r}^\pm и прохождения \hat{t}^\pm монохроматических электромагнитных волн, взаимодействующих бесконечно тонким слоем заданной среды. Конечно, в каждой конкретной задаче возможен непосредственный расчет этих операторов, основанный на сшивке решений уравнений Максвелла. Примеры такого расчета для изотропных сред можно найти в большинстве учебников по электродинамике, например, в [15-17]. Однако в сколь либо сложной анизотропной или гиротропной среде этот путь приводит к очень громоздким выкладкам. Мы рассмотрим более изящный и при этом достаточно компактный общий способ получения уравнений встречных волн, основанный на формальных преобразованиях уравнений Максвелла.

3.1. Вывод уравнений для тангенциальных полей

Рассмотрим среду с анизотропным и гиротропным диэлектрическим и магнитным откликом, заданным материальными уравнениями вида $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$. Здесь \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} – комплексные векторы электромагнитного поля, пропорциональные $\exp(i\omega t)$; $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды, зависящие от частоты ω и

трех пространственных координат. Пространственную дисперсию мы не учитываем¹, поэтому в правых частях материальных уравнений стоят локальные операторы – умножение вектора поля на матрицу, в развернутом виде эти соотношения следует понимать как

$$D_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) E_\beta(\mathbf{r}), \quad B_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) H_\beta(\mathbf{r}),$$

где индексы α и β , пробегающие значения x , y и z , обозначают проекции на соответствующие декартовы координатные оси.

Распространение монохроматических электромагнитных волн в указанной среде описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = ik_0 \mathbf{D}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} \partial_z E_x &= -ik_0 B_y + \partial_x E_z, & \partial_z E_y &= ik_0 B_x + \partial_y E_z, \\ \partial_z H_x &= ik_0 D_y + \partial_x H_z, & \partial_z H_y &= -ik_0 D_x + \partial_y H_z, \\ ik_0 B_z &= \partial_y E_x - \partial_x E_y, & ik_0 D_z &= \partial_x H_y - \partial_y H_x. \end{aligned}$$

Напомним, что $k_0 = \omega/c$ соответствует модулю волнового вектора для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме. В соответствии с общей идеологией импедансного метода выделим направление вдоль оси z , относительно которого будут определены приходящие и уходящие волны, необходимые для определения граничных условий. Уравнения Максвелла не содержат производных продольных компонент полей вдоль этого направления, что позволяет выразить продольные поля через поперечные поля и их производные – из двух последних уравнений получаем

$$\begin{aligned} E_z &= -\varepsilon_{zz}^{-1}(\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \hat{n}_x H_y - \hat{n}_y H_x), \\ H_z &= -\mu_{zz}^{-1}(\mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y - \hat{n}_x E_y + \hat{n}_y E_x), \end{aligned}$$

где $\hat{n}_x = -ik_0^{-1} \partial / \partial x$, $\hat{n}_y = -ik_0^{-1} \partial / \partial y$. Подставляя продольные поля в оставшиеся четыре уравнения Максвелла, получаем замкнутое дифференциальное уравнение для эволюции поперечных полей. В матричной форме это уравнение принимает следующий вид:

$$\partial_z \Psi = ik_0 \hat{M} \Psi, \quad \Psi = [E_x, E_y, H_x, H_y]. \quad (3.1)$$

¹ Обобщение предложенной методики для учета пространственной дисперсии не представляет принципиальных трудностей, однако сильно зависит от конкретной модели дисперсии. Примеры применения импедансной техники для моделирования волновых процессов в горячей магнитоактивной плазме с сильной пространственной дисперсией можно найти в [59, 60].

Здесь Ψ – вектор, состоящий из компонент поперечных полей, а матричный оператор \widehat{M} есть

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} \widehat{n}_x \varepsilon'_{zx} + \mu'_{yz} \widehat{n}_y & \widehat{n}_x \varepsilon'_{zy} - \mu'_{yz} \widehat{n}_x & -\widehat{n}_x \varepsilon_{zz}^{-1} \widehat{n}_y - \mu''_{yx} & \widehat{n}_x \varepsilon_{zz}^{-1} \widehat{n}_x - \mu''_{yy} \\ \widehat{n}_y \varepsilon'_{zx} - \mu'_{xz} \widehat{n}_y & \widehat{n}_y \varepsilon'_{zy} + \mu'_{xz} \widehat{n}_x & -\widehat{n}_y \varepsilon_{zz}^{-1} \widehat{n}_y + \mu''_{xx} & \widehat{n}_y \varepsilon_{zz}^{-1} \widehat{n}_x + \mu''_{xy} \\ \varepsilon''_{yx} + \widehat{n}_x \mu_{zz}^{-1} \widehat{n}_y & \varepsilon''_{yy} - \widehat{n}_x \mu_{zz}^{-1} \widehat{n}_x & \varepsilon'_{yz} \widehat{n}_y + \widehat{n}_x \mu'_{zx} & -\varepsilon'_{yz} \widehat{n}_x + \widehat{n}_x \mu'_{zy} \\ -\varepsilon''_{xx} + \widehat{n}_y \mu_{zz}^{-1} \widehat{n}_y & -\varepsilon''_{xy} - \widehat{n}_y \mu_{zz}^{-1} \widehat{n}_x & -\varepsilon'_{xz} \widehat{n}_y + \widehat{n}_y \mu'_{zx} & \varepsilon'_{xz} \widehat{n}_x + \widehat{n}_y \mu'_{zy} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon_{zz}^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon''_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha z} \varepsilon_{zz}^{-1} \varepsilon_{z\beta}$, $\mu'_{\alpha\beta} = \mu_{zz}^{-1} \mu_{\alpha\beta}$, $\mu''_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha z} \mu_{zz}^{-1} \mu_{z\beta}$ – новые функции, зависящие от трех пространственных координат. Заметим, что \widehat{M} является дифференциальным оператором второго порядка по поперечным координатам.

Приведенные выше соотношения были получены в \mathbf{r} -пространстве. Сделав преобразование Фурье по поперечным координатам, аналогичное (2.3), нетрудно перейти в \mathbf{k} -пространство. Найдем, для примера, первый диагональный элемент этого оператора:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) &= -ik_0^{-1} \int [\delta'(x-x') \varepsilon'_{zx}(\mathbf{r}'_\perp) + \delta'(y-y') \mu'_{yz}(\mathbf{r}'_\perp)] e^{i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \mathbf{k}'_\perp \mathbf{r}'_\perp)} d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp = \\ &= (k_x / k_0) \int \varepsilon_{zz}^{-1}(\mathbf{r}_\perp) \varepsilon_{zx}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \mathbf{r}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp + (k'_y / k_0) \int \mu_{zz}^{-1}(\mathbf{r}_\perp) \mu_{yz}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \mathbf{r}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp. \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае мы приходим интегро-дифференциальному эволюционному уравнению для тангенциальных компонент полей

$$\partial_z \Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = ik_0 \int \widehat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \Psi(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2 \mathbf{k}'_\perp.$$

Свертка по \mathbf{k}'_\perp отражает тот факт, что в поперечно-неоднородной среде фурье-гармоники не являются независимыми. В простейшем (но важном для приложений) случае плоскостной среды, неоднородной только вдоль оси z , каждая фурье-гармоника распространяется независимо с постоянными поперечным волновым вектором \mathbf{k}_\perp . Формально это выражается в том, что волновой оператор \widehat{M} вырождается в умножение на числовую матрицу, зависящую от \mathbf{k}_\perp и z . Эта матрица задается формулой (3.2), в которой под \widehat{n}_x и \widehat{n}_y следует понимать соответствующие проекции сохраняющегося вектора \mathbf{k}_\perp / k_0 .

Уравнение (3.1) можно привести к эквивалентному виду, описывающему взаимодействие встречных волн. Допустим, что мы знаем представление исходного волнового поля Ψ через встречные волны \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- , которое можно представить в виде

$$\Psi = \widehat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Здесь \widehat{U} – линейный оператор, определяющий преобразование «новых» полей к «старым»; \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- – два векторных поля, которые однозначно характеризуют распределение исходного волнового поля и соответствуют волнам, распространяющимся вдоль и навстречу

оси z ; объект в квадратных скобках представляет собой вектор, составленный из компонент сначала поля \mathcal{E}^+ , затем поля \mathcal{E}^- . Оператор \hat{U} может зависеть от продольной координаты, но только локальным образом (то есть, он не содержит производных по z). После подстановки (3.3) в (3.1) получим, что новые поля должны удовлетворять уравнению

$$\partial_z \left(\hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right) = ik_0 \hat{M} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\partial_z \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} = \hat{D} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где

$$\hat{D} = ik_0 \hat{U}^{-1} \hat{M} \hat{U} - \hat{U}^{-1} \partial_z \hat{U}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что уравнение (3.4) в точности эквивалентно уравнениям для встречных волн (2.1) с коэффициентами \hat{t}^\pm и \hat{r}^\pm , заданными соотношениями

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} +\hat{t}^+ & +\hat{r}^- \\ -\hat{r}^+ & -\hat{t}^- \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Таким образом, соотношение (3.5) определяет относительно простой общий способ вычисления операторов отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя, полностью определяющих уравнения встречных волн для среды с заданными распределениями $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r})$. Для этого необходимо сначала найти операторную матрицу \hat{D} , а затем разбить ее на четыре квадранта одинакового размера и сопоставить каждый квадрант одному из четырех операторов отражения и прохождения по формуле (3.6). Например, в плоскостройной среде оператор \hat{D} представляет собой матрицу 4×4 , в этом случае

$$\hat{t}^+ = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{t}^- = -\begin{bmatrix} D_{33} & D_{34} \\ D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{r}^+ = -\begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} \\ D_{41} & D_{42} \end{bmatrix}, \quad \hat{r}^- = \begin{bmatrix} D_{13} & D_{14} \\ D_{23} & D_{24} \end{bmatrix}.$$

Поставленная в начале раздела задача формально решена.

Для применения импедансного метода к уравнениям Максвелла с граничными условиями (2.6) нам осталось только определить конкретный способ представления исходного волнового поля Ψ через встречные волны. Ниже рассмотрены два различных подхода для построения такого представления.

3.2. Разложение поля по локальным волновым модам

Для того, чтобы определить направление распространения волны, рассмотрим уравнение (3.1) в приближении геометрической оптики. То есть, пренебрежем зависимостью волнового оператора от продольной координаты и предположим, что

$$\Psi = \tilde{\Psi}(z) \exp(-i \int k_z(z) dz),$$

где $\tilde{\Psi}$ – медленная функция координаты z , зависящая также от поперечных координат в \mathbf{r} - или \mathbf{k} -пространстве. Тогда исходное уравнение сводится к уравнению

$$-ik_z(z) \tilde{\Psi}(z) = ik_0 \tilde{M}(z) \tilde{\Psi}(z).$$

(3.7)

Продольная координата z входит в эти уравнения как параметр. В каждом сечении z данные уравнения следует рассматривать как уравнения для собственных волноводных мод в локально однородной вдоль координаты z среде. Теория таких уравнений развита, например, в [17, 61-63]. В большинстве физических задач можно допустить, что уравнения определяют дискретный спектр собственных мод $\tilde{\Psi}_i$, образующих полный базис в пространстве векторов Ψ в каждом сечении по продольной координате (более подробно этот вопрос обсуждается в Приложении 1).

Разобьем множество собственных мод на две группы в соответствии с направлением распространения вдоль оси z . К первой группе отнесем моды, распространяющиеся или экспоненциально спадающие («скинируемые») в положительном направлении оси z , ко второй группе отнесем моды, распространяющиеся или экспоненциально спадающие в противоположном направлении. Введем обозначения $\tilde{\Psi}_i^+$ и $k_{z,i}^+$ для мод первой группы и соответствующих собственных значений, $\tilde{\Psi}_i^-$ и $k_{z,i}^-$ для мод и собственных значений второй группы. В общем случае классификация мод по направлению распространения должна проводиться в соответствии с направлением вектора групповой скорости, которое может не совпадать с направлением волнового вектора в анизотропных или гиротропных диспергирующих средах. Часто этим отклонением можно пренебречь и провести классификацию, основываясь на анализе направления волнового вектора. В этом случае, модам $\tilde{\Psi}_i^+$ отвечают волновые векторы с $\text{Re} k_z^+ > 0$ (распространение вдоль оси z) и с $\text{Re} k_z^+ = 0, \text{Im} k_z^+ < 0$ (экспоненциальный спад в положительном направлении оси z), модам $\tilde{\Psi}_i^-$ отвечают волновые векторы с $\text{Re} k_z^- < 0$ (распространение навстречу оси z) и с $\text{Re} k_z^- = 0, \text{Im} k_z^- > 0$ (экспоненциальный спад в отрицательном направлении оси z). Очевидно, что таким образом мы переберем все моды. За исключением специальных случаев,

каждой моде, распространяющейся в заданном направлении, соответствует мода, распространяющаяся навстречу.

Поскольку совокупность собственных мод образует полный базис, в каждом сечении по продольной координате решение уравнения (3.1) можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \sum_i \mathcal{E}_i^+(z) \tilde{\Psi}_i^+(\mathbf{r}_\perp, z) + \sum_i \mathcal{E}_i^-(z) \tilde{\Psi}_i^-(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (3.8a)$$

или

$$\Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = \sum_i \mathcal{E}_i^+(z) \tilde{\Psi}_i^+(\mathbf{k}_\perp, z) + \sum_i \mathcal{E}_i^-(z) \tilde{\Psi}_i^-(\mathbf{k}_\perp, z), \quad (3.8b)$$

где \mathcal{E}_i^+ и \mathcal{E}_i^- – новые переменные, однозначно характеризующие распределение поля и соответствующие волнам с определенным направлением распространения. Проведенная процедура является наиболее прямолинейным способом разбиения исходного волнового поля на волны, распространяющимся вдоль и навстречу оси z . Приведем обозначения в соответствие с формулой (3.3) – переменные \mathcal{E}_i^+ и \mathcal{E}_i^- будем рассматривать как элементы векторов \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- соответственно, а векторы $\tilde{\Psi}_i^+$ и $\tilde{\Psi}_i^-$ – как столбцы матрицы \hat{U} :

$$\mathcal{E}^+ = [\mathcal{E}_1^+, \mathcal{E}_2^+, \dots], \quad \mathcal{E}^- = [\mathcal{E}_1^-, \mathcal{E}_2^-, \dots], \quad \hat{U} = [\tilde{\Psi}_1^+, \tilde{\Psi}_2^+, \dots, \tilde{\Psi}_1^-, \tilde{\Psi}_2^-, \dots].$$

Теперь, используя соотношения (3.5) и (3.6), можно найти оператор \hat{D} и получить уравнения импедансного метода.

Поскольку встречные волны \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- составлены из амплитуд нормальных мод, являющихся собственными векторами волнового оператора \hat{M} , уравнение для встречных волн и импедансные уравнения, представляют собой систему в общем случае бесконечного числа связанных *обыкновенных* дифференциальных уравнений, уже не содержащих нелокальных операторов – интегральных сверток или дифференцирования по поперечным координатам. Действительно, в представлении нормальных волн первое слагаемое в (3.5) является диагональной матрицей, составленной из собственных значений волнового оператора:

$$\hat{D} = \left[\begin{array}{c|c} -i\hat{k}_z^+ & 0 \\ \hline 0 & -i\hat{k}_z^- \end{array} \right] - \hat{U}^{-1} \partial_z \hat{U}, \quad \hat{k}_z^\pm = \text{diag}(k_{z,1}^\pm, k_{z,2}^\pm, \dots). \quad (3.9)$$

Видно, что оператор \hat{D} представляет собой *числовую* матрицу. То же относится и к операторам (матрицами) отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя, \hat{t}^\pm и \hat{r}^\pm . Напомним физический смысл элементов матрицы рассеяния:

$$r_{ij}^+ - \text{коэффициент отражения моды } \tilde{\Psi}_i^+ \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^-,$$

$$r_{ij}^- - \text{коэффициент отражения моды } \tilde{\Psi}_i^- \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^+,$$

t_{ij}^+ – коэффициент прохождения моды $\tilde{\Psi}_i^+$ в моду $\tilde{\Psi}_j^+$,

t_{ij}^- – коэффициент прохождения моды $\tilde{\Psi}_i^-$ в моду $\tilde{\Psi}_j^-$.

Внедиагональные члены в матрицах прохождения определяют связь мод с разными индексами i и j , (кроссполяризацию мод). Заметим, что отражение и кроссполяризация собственных мод возможны только в неоднородной по z среде. Этот очевидный с физической точки зрения факт легко установить и из формулы (3.9). Действительно, первое слагаемое в указанной формуле отвечает за геометрооптическое распространение, описываемое матрицами $\hat{t}^\pm = \mp i k_z^\pm$, $\hat{r}^\pm = 0$. Все поправки, связанные с отклонением от геометрической оптики, учитываются вторым слагаемым, возникающим вследствие изменения поляризации локальных собственных мод среды в пространстве. Эти поправки как раз и сводятся к отражению и линейному взаимодействию мод.

Найденным матрицам \hat{t}^\pm и \hat{r}^\pm можно сопоставить уравнения (2.8) и (2.9) и применить импедансный метод, описанный в предыдущем разделе, для восстановления электромагнитных полей. При этом оператор \hat{R} оказывается квадратной числовой матрицей, составленной из коэффициентов отражения i -той моды в j -тую моду. Заметим, что, несмотря на то, что для разложения волнового поля используются моды, полученные в *приближении* геометрической оптики, импедансный метод дает *строгое* решение исходной волновой проблемы до тех пор, пока для полей \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- строго выполняются граничные условия (2.6). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы рассматриваемая область была погружена в однородную среду – тогда на границах области геометрооптическое приближение становится строгим.

Рассмотрим более подробно случай плоскостойкой среды, изменяющейся только вдоль продольного направления. В этом случае решение волнового уравнения можно искать в виде $\tilde{\Psi} \sim \exp(-ik_\perp \mathbf{r}_\perp)$, где \mathbf{k}_\perp играет роль сохраняющегося параметра. Уравнение (3.7) при этом вырождается в линейное *алгебраическое* уравнение для собственных мод локально однородной среды. Числовая матрица \hat{M} в этом случае имеет размерность 4×4 . Поэтому, за исключением специальных вырожденных случаев, существует четыре собственных вектора, которые отвечают двум модам, распространяющимся навстречу друг другу. Таким образом, встречные волны \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- задаются двухкомпонентными векторами, составленными из комплексных амплитуд нормальных мод, отвечающих определенному направлению распространения, операторы \hat{U} и \hat{D} представляются числовыми 4×4 -матрицами, а операторы отражения и прохождения \hat{t}^\pm , \hat{r}^\pm и \hat{R} представляются числовыми 2×2 -матрицами. Первое уравнение импедансного метода (2.9) вырождается в систему из четырех

нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а уравнение (2.8) – в систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если среда неоднородна вдоль некоторого поперечного направления, то вместо сохраняющегося вдоль этого направления волнового вектора возникает бесконечный набор дискретных мод, отвечающих «квантованию» вдоль заданного направления. Наоборот, если задача однородна вдоль некоторого поперечного направления, то вместо соответствующего дискретного индекса появляется сохраняющееся продольное волновое число. Это соответствует двумерно неоднородной задаче. Таким образом, в плоскостной среде мы имеем $\tilde{\Psi}_i^\pm(k_x, k_y)$, двумерно неоднородной среде – $\tilde{\Psi}_{ij}^\pm(k_x)$, в трехмерно неоднородной среде – $\tilde{\Psi}_{ijk}^\pm$. Здесь k_x и k_y обозначают сохраняющиеся поперечные волновые векторы, индекс i принимает всего два значения, индексы j и k пробегает бесконечное число дискретных значений. Таким образом, в поперечно-неоднородной задаче представление исходного поля через локальные волноводные моды автоматически навязывает «спектральный» способ решения исходной нелокальной (интегральной или дифференциальной) задачи. В результате получаются импедансные уравнения в виде системы бесконечного числа связанных обыкновенных дифференциальных уравнений (хотя, конечно, в практических расчетах всегда можно ограничиться конечным числом мод).

3.3. Разложение поля по модам на границах

Рассмотренное представление встречных волн через амплитуды локальных нормальных мод не единственно. Для практических расчетов может оказаться удобным более простое представление встречных волн через амплитуды «граничных» мод, структура которых не меняется вдоль координаты z . Чтобы перейти к этому представлению заметим, что для применения импедансного метода необходимо, чтобы поля \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- соответствовали волнам с определенным направлением распространения *только на границах рассматриваемого слоя*, где это необходимо для задания граничных условий. Во всех остальных точках достаточно, чтобы эти поля однозначно характеризовали распределение исходного волнового поля, при этом они могут не соответствовать волнам с определенным направлением распространения. С этой точки зрения поля \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- можно рассматривать как формальную замену переменных в уравнениях Максвелла, выбранную так, чтобы граничные условия записывались наиболее просто.

Предположим, что на границах слоя поперечная неоднородность исчезает. Это естественное и не слишком ограничивающее физическое допущение, поскольку мы всегда можем доопределить неоднородный слой на границах так, чтобы оно выполнялось. Тогда

волновое поле может быть разложено по собственным модам однородной задачи на границах слоя

$$\Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = \sum_{i=1,2} \mathcal{E}_{0i}^+(\mathbf{k}_\perp, z) \tilde{\Psi}_{0i}^+(\mathbf{k}_\perp) + \sum_{i=1,2} \mathcal{E}_{0i}^-(\mathbf{k}_\perp, z) \tilde{\Psi}_{0i}^-(\mathbf{k}_\perp).$$

В качестве базиса в этом разложении можно использовать собственные моды $\tilde{\Psi}_{0i}^+$, определенные на границе слоя $z = a$, и собственные моды $\tilde{\Psi}_{0i}^-$, определенные на другой границе $z = b$:

$$\begin{aligned} -ik_z(\mathbf{k}_\perp) \tilde{\Psi}_0^+(\mathbf{k}_\perp) &= ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, a) \tilde{\Psi}_0^+(\mathbf{k}_\perp), & \text{Re } k_z > 0 \text{ или } \text{Re } k_z = 0, \text{Im } k_z < 0 \\ -ik_z(\mathbf{k}_\perp) \tilde{\Psi}_0^-(\mathbf{k}_\perp) &= ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, b) \tilde{\Psi}_0^-(\mathbf{k}_\perp), & \text{Re } k_z < 0 \text{ или } \text{Re } k_z = 0, \text{Im } k_z > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эти моды не зависят от продольной координаты, имеют более простую структуру по сравнению с волноводными модами, получаются в результате решения алгебраической задачи и их число конечно (и равно четырем за исключением вырожденных случаев). Данные моды определяют матрицу перехода

$$\hat{U}_0 = [\tilde{\Psi}_{01}^+, \tilde{\Psi}_{02}^+, \tilde{\Psi}_{01}^-, \tilde{\Psi}_{02}^-]$$

от полей \mathcal{E}_0^+ и \mathcal{E}_0^- к исходному волновому полю по формуле, аналогичной (3.3). Поля \mathcal{E}_0^+ и \mathcal{E}_0^- введены так, что они удовлетворяют граничным условиям (2.6), поэтому к этим полям можно применять импедансную технику. То, что поля \mathcal{E}_0^+ и \mathcal{E}_0^- не соответствуют встречным волнами *внутри слоя*, не является существенным ограничением, при необходимости локальные моды можно восстановить (см. раздел 4.1). Поскольку матрица \hat{U}_0 не зависит от продольной координаты, выражение (3.5) упрощается:

$$\hat{D} = ik_0 \hat{U}_0^{-1} \hat{M} \hat{U}_0. \quad (3.11)$$

При этом сама матрица \hat{D} и, следовательно, импедансные уравнения выглядят намного проще, чем в представлении локальных волноводных мод, поскольку моды на границе, как правило, имеют существенно более простую структуру.

Еще одним достоинством данного метода является то обстоятельство, что в поперечно-неоднородной задаче встречные волны $\mathcal{E}_0^+(\mathbf{k}_\perp, z)$, $\mathcal{E}_0^-(\mathbf{k}_\perp, z)$ и матрица перехода $\hat{U}_0(\mathbf{k}_\perp)$ определяются точно так же, как и в плоскостой среде – встречные волны задаются двумерными векторами, а матрица перехода имеет конечную размерность 4×4 . Отличие от одномерного случая проявляется лишь в структуре оператора \hat{D} , определяемого формулой (3.11). В одномерном случае это нелокальный оператор, поскольку исходный оператор \hat{M} нелокальный. В явном виде действие оператора на произвольную функцию $\phi(\mathbf{k}_\perp)$ можно представить как

$$\widehat{D}\phi(\mathbf{k}_\perp) = ik_0 \int \widehat{U}_0^{-1}(\mathbf{k}_\perp) \widehat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \widehat{U}_0(\mathbf{k}'_\perp) \phi(\mathbf{k}'_\perp) d^2\mathbf{k}'_\perp.$$

Нелокальность отражает отсутствие сохранения поперечного волнового вектора в неоднородной среде. Разбивая в соответствии с формулой (3.6) этот матричный оператор на четыре матрицы 2×2 , находим уравнение для встречных волн и импедансные уравнения в фурье-представлении. Эти уравнения получаются в форме интегро-дифференциальных соотношений для векторов и матриц с конечной размерностью (2 и 2×2 соответственно). В плоскострой среде уравнения вырождаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.4. Разложение поля по вакуумным модам

Рассмотрим предложенный выше метод в наиболее естественной постановке, когда оба конца слоя граничат с вакуумом. Для наглядности рассмотрим сначала случай плоскострой геометрии. Допустим, что плоская электромагнитная волна $\propto \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ падает на слой из вакуума под углом \mathcal{G} к нормали. Для упрощения выкладок поперечные координаты x и y ориентируем таким образом, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости xz , то есть

$$k_x = k_0 \sin \mathcal{G}, \quad k_y = 0, \quad k_z = k_0 \cos \mathcal{G}.$$

Напомним, что k_x и k_y сохраняются в процессе распространения волны, поскольку задача однородна в плоскости xy . В результате в вакууме волновой оператор \widehat{M} переходит в

$$\widehat{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\cos^2 \mathcal{G} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \mathcal{G} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которому соответствует простая матрица собственных мод:

$$\widehat{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cos \mathcal{G} & 0 & -\cos \mathcal{G} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \mathcal{G} & 0 & \cos \mathcal{G} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

$\widetilde{\Psi}_{01}^+ \quad \widetilde{\Psi}_{02}^+ \quad \widetilde{\Psi}_{01}^- \quad \widetilde{\Psi}_{02}^-$

В силу непрерывности тангенциальных электромагнитных полей, образующих вектор Ψ , эти же собственные моды можно использовать для разложения полей на встречные волны на границах слоя. Применяя преобразования (3.11), находим матрицу \widehat{D} , затем разбиваем ее на

четыре части согласно формуле (3.6). В результате получаем четыре искоемых оператора отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя:

$$\begin{aligned}\widehat{r}^+ &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta - M_{22} + M_{33}, & -M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta - M_{24} - M_{31} \\ M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta - M_{13} - M_{42}, & -M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta + M_{11} - M_{44} \end{bmatrix}, \\ \widehat{r}^- &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta + M_{22} - M_{33}, & -M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta + M_{24} + M_{31} \\ M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta + M_{13} + M_{42}, & -M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta - M_{11} + M_{44} \end{bmatrix}, \\ \widehat{t}^+ &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} -M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta + M_{22} + M_{33}, & M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta + M_{24} - M_{31} \\ -M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta - M_{13} + M_{42}, & M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta + M_{11} + M_{44} \end{bmatrix}, \\ \widehat{t}^- &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} -M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta - M_{22} - M_{33}, & M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta - M_{24} + M_{31} \\ -M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta + M_{13} - M_{42}, & M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta - M_{11} - M_{44} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Эти выражения можно представить в более компактном виде как

$$\begin{aligned}\widehat{r}^\pm &= \widehat{\mu}_1 \cos \vartheta + \widehat{\mu}_2 \sec \vartheta \mp \widehat{\mu}_3 \pm \widehat{\mu}_4, \\ \widehat{t}^\pm &= -\widehat{\mu}_1 \cos \vartheta + \widehat{\mu}_2 \sec \vartheta \pm \widehat{\mu}_3 \pm \widehat{\mu}_4,\end{aligned}\tag{3.13}$$

где

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{23} & -M_{21} \\ M_{43} & -M_{41} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} -M_{32} & -M_{34} \\ M_{12} & M_{14} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mu}_3 = \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{22} & M_{24} \\ M_{42} & M_{44} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mu}_4 = \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{33} & -M_{31} \\ -M_{13} & M_{11} \end{bmatrix}.\tag{3.14}$$

Здесь M_{ij} обозначает элементы матрицы (3.2), в которой $n_x = \sin \vartheta$, $n_y = 0$. В рассматриваемом случае $M_{21} = M_{43} = 0$, однако эти слагаемые оставлены для симметрии и для обобщения на случай трехмерно неоднородной среды. Заметим, что при $\widehat{\mu}_3 = \widehat{\mu}_4$ матрицы отражения не зависят от направления распространения волны (от индекса \pm), при $\widehat{\mu}_3 = -\widehat{\mu}_4$ матрица прохождения не зависят от направления распространения волны. Интересно, что при выполнении этих условий автоматически обеспечивается равенство коэффициентов отражения и прохождения в кросс-поляризации, поскольку в плоскостной геометрии матрица $\widehat{\mu}_1$ диагональна.

Предложенное представление поля в виде суперпозиции вакуумных мод имеет ясный физический смысл. Для плоских волн в вакууме $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$. Отсюда нетрудно убедиться, что собственные моды $\widetilde{\Psi}_{01}^\pm$, заданные первым и третьим столбцами матрицы (3.12), соответствуют вакуумным плоским волнам с единичной амплитудой, в которых вектор электрического поля не имеет составляющей вдоль нормали к границе слоя. Такие волны обычно называют ТЕ (поперечно-электрически) поляризованными по отношению к плоской границе слоя. Собственные моды $\widetilde{\Psi}_{02}^\pm$, заданные вторым и четвертым столбцами матрицы (3.12), соответствуют ТМ (поперечно-магнитно) поляризованным вакуумным плоским

волнам с единичной амплитудой. Такому набору собственных мод соответствуют матрицы отражения, состоящие из коэффициентов отражения по амплитуде для ТЕ и ТМ волн и определяющие, например,

r_{11}^+ – отражение ТЕ волны, падающей из $-\infty$, в ТЕ волну,

r_{11}^- – отражение ТЕ волны, падающей из $+\infty$, в ТЕ волну,

r_{22}^+ – отражение ТМ волны, падающей из $-\infty$, в ТМ волну,

r_{12}^+ – отражение ТМ волны, падающей из $-\infty$, в ТЕ волну,

r_{21}^+ – отражение ТЕ волны, падающей из $-\infty$, в ТМ волну,

и так далее. Аналогично интерпретируются компоненты матриц прохождения \hat{t}^\pm . Как видно, рассматриваемое представление приводит к классической постановке задачи об отражении и прохождении волны через слой, в которой излучение вне слоя разбивается на ТЕ и ТМ поляризованные волны. Заметим, что недиагональные элементы операторов отражения и прохождения определяют кросс-поляризацию ТЕ и ТМ волн, которую можно рассматривать как линейное взаимодействие этих волн, возникающее при падении на анизотропную и/или гиротропную среду.

В заключение рассмотрим поперечно-неодномерную среду. В плоскостной структуре существовал произвол в выборе направления осей x и y , поэтому вакуумные собственные моды были определены выше для случая, когда вектор \mathbf{k}_\perp направлен вдоль оси x . В неодномерной задаче такая свобода отсутствует, поэтому нам необходимо обобщить выражения для ТЕ и ТМ мод на случай произвольной ориентации волнового вектора

$$k_x = k_0 \cos \varphi \sin \vartheta, \quad k_y = k_0 \sin \varphi \sin \vartheta, \quad k_z = k_0 \cos \vartheta.$$

Нетрудно убедиться, что такое обобщение достигается простым поворотом поперечных координат на угол φ . Матрица вакуумных мод может быть получена как

$$\hat{U}_0(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \hat{T}_\varphi(0) & 0 \\ 0 & \hat{T}_\varphi \end{bmatrix} \cdot \hat{U}_0(0, \vartheta), \quad \hat{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

где $\hat{U}_0(0, \vartheta)$ определена формулой (3.12), а \hat{T}_φ – матрица поворота в плоскости xu на угол φ .

После несложной алгебры ядро интегрального оператора \hat{D} можно представить в виде

$$\hat{D}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) = \hat{U}_0^{-1}(0, \vartheta) \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{-\varphi} & 0 \\ 0 & \hat{T}_{-\varphi} \end{bmatrix} \cdot ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{\varphi'} & 0 \\ 0 & \hat{T}_{\varphi'} \end{bmatrix} \cdot \hat{U}_0(0, \vartheta').$$

Здесь φ', ϑ' соответствуют вектору \mathbf{k}'_\perp . Отсюда находим операторы отражения и прохождения, определяющие коэффициенты в нелокальных уравнениях импедансного метода (2.10):

$$\begin{aligned}\widehat{r}^{\pm}(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}'_{\perp}, z) &= \widehat{T}_{-\varphi} \cdot (\widehat{\mu}_1 \cos \mathcal{G}' + \widehat{\mu}_2 \sec \mathcal{G}' \mp \widehat{\mu}_3 \pm \widehat{\mu}_4) \cdot \widehat{T}_{\varphi}, \\ \widehat{t}^{\pm}(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}'_{\perp}, z) &= \widehat{T}_{-\varphi} \cdot (-\widehat{\mu}_1 \cos \mathcal{G}' + \widehat{\mu}_2 \sec \mathcal{G}' \pm \widehat{\mu}_3 \pm \widehat{\mu}_4) \cdot \widehat{T}_{\varphi},\end{aligned}$$

где $\widehat{\mu}_j = \widehat{\mu}_j(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}'_{\perp}, z)$ – ядра интегральных матричных операторов, определенных соотношениями (3.14).

3.5. Резюме

Итак, мы рассмотрели два способа разложения поля – через локальные волноводные и граничные вакуумные моды. В одномерной плоскострой задаче представления поля через локальные и вакуумные моды приводят к похожим импедансным уравнениям, различающиеся только коэффициентами. Представление через локальные моды более физическое, поскольку оно в явном виде содержит разделение эффектов геометрической оптики и эффектов рассеяния и кроссполяризации волн вследствие неоднородности среды. Однако это представление часто приводит к очень громоздким выражениям из-за сложной поляризации нормальных мод и необходимости дифференцировать вектора поляризации. Для аналитических выкладок более удобен второй подход, позволяющий избежать вычисления нормальных мод среды. Однако при использовании разложения по вакуумным модам возникают дополнительные трудности при интерпретации решений, которые, как правило, требуется «перевести» в термины мод среды. С точки зрения численного решения импедансных уравнений обе задачи технически эквивалентны, усложнение импедансных уравнений, связанное с переходом к модам среды, не является принципиальным при численном интегрировании. Поэтому вопрос выбора конкретного представления здесь не очень важен.

В неодномерном случае ситуация меняется – два представления поля приводят к разной структуре импедансных уравнений. Разложения поля через локальные волноводные моды автоматически навязывает спектральный подход, основанный на разложении решений по собственным функциям нелокального волнового оператора и сведению задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты разложения. В неодномерной задаче второй способ, использующий граничные вакуумные моды, представляется более гибким, поскольку он приводит к интегро-дифференциальным уравнениям. Мы сами можем выбрать способ решения получившейся нелокальной задачи, например, использовать вариационный метод [64], метод последовательных приближений, оптимизированные схемы численного решения интегро-дифференциальных задач [65] и т.д. В том числе, можно использовать и спектральный метод, основанный на разложении

решений по собственным функциям оператора (3.11) – в этом случае получается бесконечная система уравнений на коэффициенты разложения, аналогичная уравнениям первого метода.

4. Общие свойства импедансных уравнений

В данном разделе мы рассмотрим некоторые общие свойства решений волнового уравнения, следующие из импедансного метода для произвольной анизотропной и гиротропной среды. Помимо общезначимого интереса, эти свойства оказываются полезными для проверки численных алгоритмов решения импедансных уравнений.

4.1. Связь представлений через локальные волноводные и граничные вакуумные моды

В предыдущем разделе уравнения Максвелла были сведены к двум эквивалентным формулировкам – задаче о взаимодействии полей \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- , определяющих разложение исходного поля по поляризациям локальных ВКБ мод, и задаче о взаимодействии полей \mathcal{E}_0^+ и \mathcal{E}_0^- , определяющих разложение исходного поля по поляризациям вакуумных ТЕ и ТМ мод. Эти две задачи связаны соотношением

$$\Psi = \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} = \hat{U}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \mathcal{E}_0^- \end{bmatrix}.$$

Это соотношение позволяет ввести матрицу перехода \hat{G} от одного представления к другому, играющую важную роль в теории;

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \mathcal{E}_0^- \end{bmatrix} = \hat{G} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \hat{U}_0^{-1} \hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

В частности, зная матрицу отражения \hat{R} для локальных мод среды, можно найти матрицу отражения \hat{R}_0 для вакуумных ТЕ и ТМ мод по формуле

$$\hat{R}_0 = (\hat{g}_{21} + \hat{g}_{22} \hat{R})(\hat{g}_{11} + \hat{g}_{12} \hat{R})^{-1}, \quad (4.2)$$

которая следует из соотношения

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+ \end{bmatrix} = \hat{G} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \hat{R} \mathcal{E}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{g}_{11} + \hat{g}_{12} \hat{R}) \mathcal{E}^+ \\ (\hat{g}_{21} + \hat{g}_{22} \hat{R}) \mathcal{E}^+ \end{bmatrix}.$$

где \hat{g}_{ij} обозначает один из четырех квадрантов матрицы \hat{G} . Вычисление матриц \hat{g}_{ij} в определенном смысле эквивалентно вычислению матриц отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя в представлении полей \mathcal{E}_0^+ и \mathcal{E}_0^- , поскольку из соотношений (3.9) и (3.11) следует их простая связь

$$\begin{bmatrix} +\hat{t}^+ & +\hat{r}^- \\ -\hat{r}^+ & -\hat{t}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ik_z^+ & 0 \\ 0 & -ik_z^- \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Это соотношение отражает факт, что $\hat{G}^{-1}\hat{D}\hat{G} = ik_0\hat{U}^{-1}\hat{M}\hat{U}$ есть диагональная матрица.

4.2. Отражение от полупространства, заполненного однородной средой

Достаточно часто требуется найти матрицу отражения от полубесконечного пространства, заполненного однородной вдоль координаты z средой. Для определенности будем считать, что матрица отражения сформулирована для вакуумных ТЕ и ТМ мод. Нетрудно убедиться, что эта матрица должна удовлетворять квадратному матричному уравнению

$$\hat{R}_0 \hat{r}^- \hat{R}_0 + \hat{R}_0 \hat{t}^+ + \hat{t}^- \hat{R}_0 + \hat{r}^+ = 0. \quad (4.4)$$

следующего из импедансного уравнения (2.9) при $\partial_z \hat{R} = 0$. Действительно, если перед полупространством добавить слой из той же среды, то ничего не поменяется – именно это свойство матрицы отражения и выражает приведенное уравнение. Коэффициенты в этом уравнении представляют собой операторные матрицы 2×2 , вычисленные по формулам (3.6), (3.11). Если среда также однородна и в поперечном направлении, то эти коэффициенты – числовые матрицы.

Решение рассматриваемого матричного уравнения определяется соотношением (4.2), в правую часть которого подставлено $\hat{R} = 0$:

$$\hat{R}_0 = \hat{g}_{21} \hat{g}_{11}^{-1}. \quad (4.5)$$

Это решение может быть построено из физических соображений. Условие $\hat{R} = 0$ означает, что в представлении локальных нормальных мод отражение внутри однородной среды отсутствует, поскольку со стороны среды нет приходящей к границе полупространства волны. Тангенциальные поля на границе полупространства непрерывны, поэтому они должны быть связаны соотношением (4.1), из которого следует применимость формулы (4.2) для пересчета матрицы отражения в представление вакуумных мод. Заметим, что матрицу отражения в виде (4.5) можно получить сразу из (4.1), если в левую часть подставить вакуумные поля \mathcal{E}_0^+ и $\mathcal{E}_0^- = \hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+$, в правую часть – поля в среде, выраженные через амплитуды нормальных волн в среде \mathcal{E}^+ и $\mathcal{E}^- = 0$, и исключить \mathcal{E}^+ .

Нетрудно убедиться, что выражение (4.5) действительно удовлетворяет исходному уравнению (4.4). Для этого заметим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют матричному соотношению (4.3). Исключая \hat{k}_z^+ из этого соотношения, получаем

$\hat{t}^+ \hat{g}_{11} + \hat{r}^- \hat{g}_{21} = -\hat{g}_{11} \hat{g}_{21}^{-1} (\hat{t}^- \hat{g}_{21} + \hat{r}^+ \hat{g}_{11})$. Умножая это равенство на $\hat{g}_{21} \hat{g}_{11}^{-1}$ слева и на \hat{g}_{11}^{-1} справа, приходим в точности к уравнению (4.4) для $\hat{R}_0 = \hat{g}_{21} \hat{g}_{11}^{-1}$.

Интересно, что решение (4.5) позволяет получить условия, при которых при определенной поляризации падающего излучения отражение отсутствует, $\hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+ = 0$. В изотропных средах это явление известно как эффект Брюстера [16]. Необходимым и достаточным условием существования безотражательной поляризации падающего излучения является вырожденность матрицы отражения, $\det \hat{R}_0 = 0$. Очевидно, что это возможно, если одновременно $\det \hat{g}_{21} = 0$ и $\det \hat{g}_{11} \neq 0$. Эти два условия определяют угол Брюстера в произвольной анизотропной и гиротропной среде.

Приведенный способ определения матрицы отражения от однородного вдоль продольной координаты полупространства основан на вычислении собственных мод среды, необходимых для определения матрицы \hat{U} , что не всегда удобно. В случае полностью однородной среды (и в продольном, и в поперечном направлениях) можно избежать разложения по собственным модам среды, если воспользоваться общим методом аналитического решения квадратного матричного уравнения, предложенного в работе Гельфанда [66]. Однако в этом случае возникает проблема выбора «физического» решения среди паразитных решений (в невырожденном случае уравнение (4.4) может иметь от одного до шести различных решений).

4.3. Отражение от слоя, заполненного однородной средой

Аналогичный подход можно применить для построения аналитического решения для матрицы отражения слоя конечной толщины, заполненного однородной вдоль координаты z средой. Здесь удобнее работать в представлении локальных поляризаций среды, поскольку в этом представлении отражение внутри слоя отсутствует, а коэффициенты прохождения определяются диагональными матрицами \hat{k}_z^\pm , смотри формулу (3.9). В итоге, в однородной среде импедансное уравнение (2.9) вырождается в линейное уравнение

$$\partial_z \hat{R} = \hat{R} i \hat{k}_z^+ - i \hat{k}_z^- \hat{R},$$

которое имеет очевидное решение

$$\hat{R}(z) = \hat{Q}^-(z) \hat{R}(b) \hat{Q}^+(z), \quad \hat{Q}^\pm(z) = \exp[\pm i \hat{k}_z^\pm (z - b)]. \quad (4.6)$$

Здесь экспоненты от диагональных матриц также являются диагональными матрицами. Начальное значение $\hat{R}(b)$ определяется из физического условия, заключающегося в том, что за слоем отраженная волна отсутствует. Фактически это означает, что матрица отражения, определяемая соотношением (4.2) на границе слоя обращается в нуль, что возможно при

$\widehat{R}(b) = -\widehat{g}_{22}^{-1}\widehat{g}_{21}$. Действительно, в силу непрерывности тангенциальные поля на границе слоя должны быть связаны соотношением (4.1), в котором слева стоят вакуумные поля \mathcal{E}_0^+ и $\mathcal{E}_0^- = 0$, а справа – поля в среде \mathcal{E}^+ и $\mathcal{E}^- = \widehat{R}(b)\mathcal{E}^+$, откуда следует приведенное начальное значение для матрицы отражения. Применяя преобразование (4.2) к найденной матрице отражения $\widehat{R}(z)$ в представлении локальных мод, найдем матрицу отражения в представлении вакуумных волн:

$$\widehat{R}_0(z) = [\widehat{g}_{21} - \widehat{g}_{22}\widehat{Q}^-(z)\widehat{g}_{22}^{-1}\widehat{g}_{21}\widehat{Q}^+(z)][\widehat{g}_{11} - \widehat{g}_{12}\widehat{Q}^-(z)\widehat{g}_{22}^{-1}\widehat{g}_{21}\widehat{Q}^+(z)]^{-1}. \quad (4.7)$$

Это обобщение известного соотношения для резонатора Фабри-Перо на случай произвольной анизотропной и гиротропной среды. При $b \rightarrow +\infty$ и при наличии бесконечно малой диссипации эта формула переходит в соотношение (4.5) для матрицы отражения от полупространства.

4.4. Формальное общее решение для оператора отражения

Нелинейное уравнение (2.9), определяющее оператор $\widehat{R}(z)$, относится к классу уравнений типа Риккати [67]. Общее решение таких уравнений может быть найдено, если известно любое частное решение $\widehat{R}_1(z)$. Это остается верным и в нашем случае, несмотря на наличие некоммутативных операторов в уравнении. Будем искать решение в виде

$$\widehat{R} = \widehat{R}_\nabla + \widehat{R}_1. \quad (4.8)$$

Если \widehat{R}_1 является решением (2.9), то \widehat{R}_∇ удовлетворяет уравнению

$$-\partial_z \widehat{R}_\nabla = \widehat{R}_\nabla \widehat{r}^- \widehat{R}_\nabla + \widehat{R}_\nabla \widehat{t}_\nabla^+ + \widehat{t}_\nabla^- \widehat{R}_\nabla,$$

где $\widehat{t}_\nabla^+ = \widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}_1$, $\widehat{t}_\nabla^- = \widehat{t}^- + \widehat{R}_1 \widehat{r}^-$. Это уравнение того же типа, что и исходное, но без свободного члена \widehat{r}^+ . Прямой подстановкой можно убедиться, что это уравнение имеет общее решение

$$\widehat{R}_\nabla(z) = \widehat{Q}^- \left[\widehat{R}_\nabla^{-1}(b) + \int_b^z \widehat{Q}^- \widehat{r}^- \widehat{Q}^+ dz' \right]^{-1} \widehat{Q}^+, \quad \widehat{Q}^\pm = \exp \left(- \int_b^z \widehat{t}_\nabla^\pm dz' \right). \quad (4.9)$$

Вычисление операторных экспонент эквивалентно решению линейных дифференциальных задач $-\partial_z \widehat{Q}^\pm = \widehat{t}_\nabla^\pm \widehat{Q}^\pm$ с «единичными» начальными условиями $\widehat{Q}^\pm(b) = \widehat{I}$.

Для кусочно-однородной среды данное решение переходит в решения, полученные ранее из физических соображений. Проще всего в этом убедиться в представлении локальных мод среды, в котором $\widehat{r}^\pm = 0$ и $\widehat{t}_\nabla^\pm = \widehat{t}^\pm = \text{const}$, поэтому формула для \widehat{R}_∇ в точности переходит в выражение (4.6). Несколько труднее это показать в представлении

вакуумных мод. Для этого в качестве частного решения можно взять однородное распределение (4.5), удовлетворяющее *стационарному* импедансному уравнению, и выбрать $\widehat{R}_V^{-1}(b) = -\widehat{g}_{11}\widehat{g}_{21}^{-1}$. Тогда, проделав некоторые алгебраические преобразования с использованием соотношений (4.3), мы опять приходим к уравнению (4.7).

В неоднородном случае общее решение может оказаться полезным, если мы знаем какое-либо частное решение импедансного уравнения. Тогда с помощью формул (4.8) и (4.9) можно «поправить» это решение, построив физическое решение, отвечающее любому заданному наперед граничному условию. Например, если выбрать $\widehat{R}_V(b) = -\widehat{R}_1(b)$, то для \widehat{R} будет выполняться граничное условие, требуемое для применения импедансного метода, $\widehat{R}(b) = 0$. В качестве еще одной иллюстрации приведем следующую задачу. Допустим нам известно решение импедансного уравнения для некоторого слоя $[a, b]$, окруженного вакуумом. Обозначим его $\widehat{R}_1(z)$. Требуется найти решение для того же слоя, если в области $z > b$ вакуум заменить некоторой подложкой – полупространством с известным оператором отражения \widehat{R}_0 , который может быть найден, например, методом, изложенным в пункте 4.2. Решение для слоя с подложкой будет определяться формулами (4.8) и (4.9), если выбрать $\widehat{R}_V(b) = \widehat{R}_0$.

4.5. Решение в виде разложения в ряд по степеням отражения

Нередко в приложениях отраженная обратная волна мала по сравнению с прямой волной. При этом при вычислении распространения прямой волны в нулевом приближении можно пренебречь отраженной волной, а затем развить теорию возмущений по степеням дифференциальных операторов отражения \widehat{r}^\pm . Для этого уравнения встречных волн (2.1) граничным условиям (2.6) можно представить в интегральном виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^+ &= \int_a^z \exp\left(\int_{z'}^z \widehat{t}^+(z'') dz''\right) \cdot \widehat{r}^-(z') \mathcal{E}^-(z') dz' + \exp\left(\int_a^z \widehat{t}^+ dz'\right) \cdot \mathcal{E}^{\text{inc}}, \\ \mathcal{E}^- &= \int_z^b \exp\left(\int_z^{z'} \widehat{t}^-(z'') dz''\right) \cdot \widehat{r}^+(z') \mathcal{E}^+(z') dz'.\end{aligned}$$

По аналогии с теорией рассеяния решение этих уравнений можно построить методом итераций в виде ряда $\mathcal{E}^\pm = \sum \mathcal{E}_n^\pm$, где

$$\mathcal{E}_0^+ = \exp\left(\int_a^z \widehat{t}^+ dz'\right) \cdot \mathcal{E}^{\text{inc}}, \quad \mathcal{E}_0^- = 0,$$

а каждый последующий член ряда получается из предыдущего преобразованием

$$\mathcal{E}_{n+1}^+ = \int_a^z \exp\left(\int_{z'}^z \hat{t}^+ dz''\right) \cdot \hat{r}^- \mathcal{E}_n^- dz', \quad \mathcal{E}_{n+1}^- = \int_z^b \exp\left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz''\right) \cdot \hat{r}^+ \mathcal{E}_n^+ dz'.$$

С физической точки зрения эта процедура означает разложение по кратности взаимного рассеяния встречных волн – каждое слагаемое $\mathcal{E}_n^\pm \sim O[(\hat{r}^\pm)^n]$ определяет вклад n -кратного рассеяния в уравнениях (2.1).

Если нас интересует поглощение и линейное взаимодействие волн, распространяющихся только в положительном направлении оси z , можно ограничиться нулевым приближением \mathcal{E}_0^+ для прямых волн. Соответствующая обратная волна \mathcal{E}_1^- появится лишь в первом порядке; поправка к прямой волне, связанная с наличием отражения, появляется во втором порядке. Условие применимости сделанного приближения $\|\mathcal{E}_0^+\| \gg \|\hat{r}^- \mathcal{E}_1^-\| \sim O[\hat{r}^- \hat{r}^+]$.

Нетрудно убедиться, что прямая и обратная волны связаны соотношением

$$\mathcal{E}_1^-(z) = \left[\int_z^b \exp\left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz''\right) \cdot \hat{r}^+ \cdot \exp\left(\int_z^{z'} \hat{t}^+ dz''\right) dz' \right] \mathcal{E}_0^+(z).$$

Оператор в квадратных скобках есть в точности оператор отражения \hat{R}_1 в первом приближении, получающийся в результате решения импедансного уравнения (2.9) при $\hat{r}^- = 0$, то есть без учета нелинейного члена. Следующие члены разложения можно определить по рекуррентной формуле

$$\hat{R}_{n+2} = \int_z^b \exp\left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz''\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \hat{R}_k \hat{r}^+ \hat{R}_{n-k+1} \right) \cdot \exp\left(\int_z^{z'} \hat{t}^+ dz''\right) dz'$$

для нечетных n , члены с четными индексами равны нулю. Все три сомножителя под интегралом имеют прозрачный физический смысл – распространение прямой волны до точки отражения z' , отражение и распространение обратной волны до точки наблюдения z .

5. О законе сохранения энергии в импедансном методе

В среде без пространственной дисперсии плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга $\mathbf{S} \equiv (c/4\pi) \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ [15]. Отсюда усредненный по высокочастотным осцилляциям поля поток энергии вдоль координаты z может быть определен как

$$S_z = (c/8\pi) \int \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) d^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Изменение потока энергии определяет плотность диссипации электромагнитной энергии на единицу длины $\partial_z S_z = q_z$, где

$$q_z = (1/16\pi) \int \text{Im}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d^2 \mathbf{r}_\perp. \quad (5.1)$$

В среде без диссипации поток энергии сохраняется, формально это следует из эрмитовости тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$, обеспечивающих равенство нулю диссипации (5.1). Посмотрим, как выглядит соотношение $\partial_z S_z = q_z$ в переменных, введенных в разделе 3.

Введем скалярное произведение векторных полей, зависящих от поперечных координат или волновых векторов в фурье-представлении:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \int \sum_i a_i b_i^* d^2 \mathbf{r}_\perp \text{ или } \int \sum_i a_i b_i^* d^2 \mathbf{k}_\perp.$$

Данное скалярное произведение определяет понятие эрмито-сопряженного оператора $(\mathbf{a}, \hat{A}\mathbf{b}) = (\hat{A}^* \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Легко убедиться, что поток энергии может быть выражен через следующее скалярное произведение

$$S_z = (\Psi, \hat{\sigma} \Psi), \quad \hat{\sigma} = \frac{c}{16\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Диссипацию электромагнитной энергии на единицу длины проще всего получить из уравнения (3.1), из которого следует закон изменения потока энергии в следующей форме:

$$q_z = \partial_z (\Psi, \hat{\sigma} \Psi) = (ik_0 \hat{M} \Psi, \hat{\sigma} \Psi) + (\Psi, ik_0 \hat{\sigma} \hat{M} \Psi) = -2k_0 \text{Im}(\Psi, \hat{\sigma} \hat{M} \Psi).$$

Здесь мы воспользовались эрмитовостью матрицы $\hat{\sigma}$. Используя введенную в разделе 3 матрицу перехода \hat{U} , поток и диссипацию энергии можно выразить через амплитуды встречных волн

$$S_z = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \hat{U}^* \hat{\sigma} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right), \quad q_z = -2k_0 \text{Im} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \hat{U}^* \hat{\sigma} \hat{M} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right). \quad (5.2)$$

Из приведенных соотношений видно, диссипация в среде отсутствует, если оператор $\hat{\sigma} \hat{M}$ эрмитов. Этот же вывод можно сделать более громоздким путем непосредственно из определения волнового оператора (3.2) и из того, что в недиссипативной среде тензоры $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ эрмитовы. Если потребовать ограниченность волнового поля в поперечных направлениях, эрмитовость оператора $\hat{\sigma} \hat{M}$ гарантирует существование полного дискретного спектра собственных векторов уравнения (3.7), используемого для определения нормальных мод. В среде с диссипацией дискретный базис может не существовать, однако в этом случае для

определения нормальных мод можно пренебречь диссипацией. Для этого вместо оператора \widehat{M} нужно использовать оператор \widehat{M}' , соответствующий эрмитовой части $\widehat{\sigma}\widehat{M}$:

$$\widehat{M}' = \widehat{\sigma}^{-1}[\widehat{\sigma}\widehat{M} + (\widehat{\sigma}\widehat{M})^*]/2 = \widehat{M} + (\widehat{\sigma}\widehat{M}^*\widehat{\sigma} - \widehat{M})/2.$$

Разложение по вакуумным модам автоматически удовлетворяет условиям эрмитовости, поэтому является полным.

К законам сохранения полезно прийти и непосредственно из уравнений для встречных волн (2.1). Пусть для простоты моды, используемые для разбиения поля на встречные волны, нормированы так, что единичной амплитуде \mathcal{E}_i^\pm отвечает мода с «единичным» потоком энергии. В частности, это условие выполнено для вакуумных ТЕ и ТМ мод. Тогда с точностью до размерного нормировочного множителя суммарный поток энергии есть разность потоков энергии всех мод, распространяющихся вдоль и навстречу оси z . В наших обозначениях

$$S_z = \text{const} \cdot \{(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-)\},$$

для ТЕ и ТМ мод, определенных матрицей (3.12), константа равна $(c/8\pi)\cos\vartheta$. Используя правило дифференцирования скалярного произведения,

$$\partial_z (\mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm) = (\partial_z \mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm) + (\mathcal{E}^\pm, \partial_z \mathcal{E}^\pm) = 2\text{Re}(\partial_z \mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm)$$

из уравнений (2.1) нетрудно получить закон изменения потока энергии в виде

$$\partial_z \{(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-)\} = 2\text{Re}\{(\mathcal{E}^+, \widehat{t}^+ \mathcal{E}^+) + (\mathcal{E}^-, \widehat{t}^- \mathcal{E}^-) + (\mathcal{E}^-, [\widehat{r}^+ + (\widehat{r}^-)^*] \mathcal{E}^+)\}. \quad (5.3)$$

Это частный случай, следующий из общих соотношений (5.2). В правой части записана диссипация. Непосредственной подстановкой в (3.13)-(3.14) можно убедиться, что если оператор $\widehat{\sigma}\widehat{M}$ эрмитов, то дифференциальные операторы прохождения антиэрмитовы, а операторы отражения антиэрмитово-сопряженные:

$$\widehat{t}^+ + (\widehat{t}^+)^* = 0, \quad \widehat{t}^- + (\widehat{t}^-)^* = 0, \quad \widehat{r}^+ + (\widehat{r}^-)^* = 0. \quad (5.4)$$

Отсюда сразу следует, что в среде без диссипации правая часть уравнения (5.3) обращается в нуль, обеспечивая сохранение потока энергии в каждом сечении поперек продольной координаты

$$(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-) = \text{const}.$$

Еще более сильное утверждение можно сделать относительно операторов отражения $\widehat{R}(z)$ и прохождения $\widehat{T}(z)$ конечного слоя $[z, b]$. Из соотношений (2.12) следует, что

$$-\partial_z (\widehat{R}^* \widehat{R}) = [\widehat{R}^* \widehat{R} (\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) + \widehat{R}^* \widehat{t}^- \widehat{R} + \widehat{R}^* \widehat{r}^+] + \text{э.с.},$$

$$-\partial_z (\widehat{T}^* \widehat{T}) = \widehat{T}^* \widehat{T} (\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) + \text{э.с.},$$

где э.с. обозначает эрмитовое сопряжение предыдущего слагаемого. Подчеркнем, что это

операторные соотношения – в частности, в левых частях здесь записаны не скалярные произведения, а новые операторы, получающиеся последовательным применением оператора отражения или прохождения и его эрмитового сопряженного. В среде без диссипации в силу свойств (5.4) слагаемое $\widehat{R}^* \widehat{t}^- \widehat{R}$ сокращается со своим эрмитово-сопряженным, поэтому его можно опустить, а слагаемое $\widehat{R}^* \widehat{r}^+$ можно заменить на $(\widehat{R}^* \widehat{r}^+)^* - \widehat{t}^+ = -(\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R})$, здесь \widehat{t}^+ тоже не дает вклада вместе со своим э.с. После этого сложим два уравнения, в результате получим

$$-\partial_z (\widehat{R}^* \widehat{R} + \widehat{T}^* \widehat{T}) = (\widehat{R}^* \widehat{R} + \widehat{T}^* \widehat{T} - \widehat{I})(\widehat{t}^+ + \widehat{r}^- \widehat{R}) + \text{э.с.}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять физическим начальным условиям – слой нулевой толщины ничего не отражает, $\widehat{R}(b) = 0$, и все пропускает, $\widehat{T}(b) = \widehat{I}$. Очевидным решением, удовлетворяющим этим условиям, является

$$\widehat{R}^* \widehat{R} + \widehat{T}^* \widehat{T} = \widehat{I}.$$

Это универсальное свойство операторов отражения и прохождения неоднородной недиссипативной среды имеет ясный физический смысл – сумма потоков энергии отраженной и прошедшей волны должна равняться потоку энергии в падающей волне. Если, например, операторы заданы матрицами $n \times n$, это соотношение определяет n^2 алгебраических связей.

6. Заключение

Мы рассмотрели метод инвариантного погружения применительно к задачам распространения электромагнитных волн в сложных средах с тензорным электромагнитным откликом. Особенностью таких сред является возможность распространения нескольких связанных нормальных волн с разными поляризациями. В основе метода лежит разбиение совокупности нормальных волн на две группы встречных волн. Если задача допускает такое разделение, то существует возможность определения матричного «импедансного» оператора, характеризующего связь между различными встречными волнами, распространяющимися в неоднородной среде. Этот оператор можно найти путем решения нелинейного эволюционного уравнения с универсальными (нулевыми) граничными условиями, не зависящими от деталей падающего на слой излучения. Соответственно, импедансный оператор также не зависит от деталей падающего излучения. Если импедансный оператор известен, то для любой заданной структуры падающего излучения можно восстановить поле во всем пространстве путем тривиальной линейной операции.

В одномерно-неоднородных задачах предложенный метод позволяет свести волновое уравнение к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент матрицы отражения. Эта система характеризуется низкой размерностью (равной квадрату числа нормальных мод, распространяющихся в одну сторону в данной среде). Практически во всех мыслимых ситуациях эта система может быть с легкостью численно проинтегрирована на персональном компьютере. Вследствие своей простоты и малой требовательности к вычислительным ресурсам такой подход может быть удобным инструментом для изучения распространения и линейной трансформации электромагнитных волн в ситуациях, когда из-за резкой пространственной зависимости параметров среды нарушается приближение геометрической оптики. Кроме того, импедансный метод в одномерной постановке можно использовать для быстрых тестов результатов более сложных электродинамических расчетов в ситуациях, когда стандартные приближенные техники, основанные на трассировке лучей или квазиоптическом уравнении, не применимы.

В двух- или трехмерно неоднородных средах импедансный метод приводит или к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечной размерностью (отвечающей бесконечному набору поперечных мод), или к системе интегро-дифференциальных уравнений с низкой размерностью. Численное решение и той, и другой задачи нетривиально, однако для большого класса задач этот подход все же удобнее непосредственного решения граничной задачи для уравнений Максвелла. В первую очередь это связано с эволюционным характером решаемых уравнений. Кроме того, немаловажно, что в рамках предложенного подхода автоматически и независимо от структуры падающего излучения точно учитывается условие излучения для проходящей волны за слоем.

Предложенный метод обобщается на случай сред с пространственной дисперсией, описываемой производными конечного порядка в тензорах диэлектрической или магнитной проницаемости. Идея такого обобщения достаточно проста – связанное с пространственной дисперсией повышение порядка уравнений Максвелла учитывается увеличением размерности вектора Ψ в уравнении (3.1). В результате уравнения Максвелла вновь сводятся к форме (3.1), однако волновой оператор \hat{M} имеет более сложный вид, зависящий от характера дисперсии. После этого можно вновь развивать импедансный метод в описанной нами форме. Интересно, что при этом автоматически решается проблема дополнительных граничных условий, связанных с повышением размерности волновых уравнений [82], по крайней мере, для сред, плавно переходящих в однородные на границах. Пример такого анализа для магнитоактивной плазмы можно найти в [59].

Литература

- [1] Стикс Т *Теория плазменных волн* (М.: Мир, 1965)
- [2] Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967)
- [3] Железняков В В *Излучение в астрофизической плазме* (Янус-К, Москва, 1997)
- [4] Brambilla M *Kinetic Theory of Plasma Waves* (Oxford: Clarendon Press, 1998)
- [5] Ярив А, Юх П *Оптические волны в кристаллах* (М.: Мир, 1987)
- [6] Смоленский Г А, Писарев Р В, Синий И Г *УФН* **116** 231 (1975)
- [7] Криничик Г С *Физика магнитных явлений* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976)
- [8] де Жен П *Физика жидких кристаллов* (М.: Мир, 1977)
- [9] Чандрасекар С *Жидкие кристаллы* (М.: Мир, 1980)
- [10] Блинов Л М *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов* (М.: Наука, 1978)
- [11] Сизов Ф Ф, Уханов Ю И *Магнитооптические эффекты Фарадея и Фогта в применении к полупроводникам* (Киев: Наукова думка, 1979)
- [12] Агранович В М, Горнштейн Ю Н *Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света, УФН* **176**(10) 1051-1068 (2006)
- [13] Гнедин Ю Н, Павлов Г Г, Шибанов Ю А *Письма в ЖЭТФ* **27** 325 (1978)
- [14] Железняков В В, Литвинчук А А *Физика плазмы* **9** 553 (1983)
- [15] Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
- [16] Стрэттон Дж *Теория электромагнетизма* (М.: Мир, 1949)
- [17] Каценелембаум Б З *Высокочастотная электродинамика* (М.: Наука, 1966)
- [18] Корн Г, Корн Т *Справочник по математике* (М.: Наука, 1970) стр. 265
- [19] Амбарцумян В А *Доклады АН СССР* **38**(8) (1943)
- [20] Амбарцумян В А *ЖЭТФ* **13**(9–10) 323 (1943)
- [21] Чандрасекар С *Перенос лучистой энергии* (М.: Иностранной литературы, 1953)
- [22] Scott M R *Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential Equations: An introduction* (London: Addison-Wesley, 1973)
- [23] Касты Дж, Калаба Р *Методы погружения в прикладной математике* (М.: Мир, 1976)
- [24] Kagiwada H H, Kalaba R *Integral Equations via Embedding Methods* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1974)
- [25] Bellman R, Wing G M *An Introduction to Invariant Embedding* (N.Y.: Wiley, 1975)
- [26] Цапенко Н Е *Уравнение Риккати и волновые процессы* (М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2008)
- [27] Кляцкин В И *Метод погружения в теории распространения волн* (М.: Наука, 1986)

- [28] Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах* (М.: Наука, 1980)
- [29] Pitteway M L V *Phil. Trans. R. Soc. London A* **257** 219 (1965)
- [30] Chessel C I *J. Atmos. Terr. Phys.* **33** 1515-32 (1971)
- [31] Chessel C I *J. Atmos. Terr. Phys.* **33** 1803-22 (1971)
- [32] Miller K L, Smith L G *J. Atmos. Terr. Phys.* **39** 899-911 (1977)
- [33] Budden K G *Lectures on Magnetoionic Theory* (London: Blackie, 1964)
- [34] Smith M S *J. Atmos. Terr. Phys.* **35** 51-62 (1973)
- [35] Smith M S *J. Atmos. Terr. Phys.* **36** 1165-72 (1974)
- [36] Куницын В Е, Смородинов В А, Усачев А Б *Радиотехника и электроника* **34**(2) 233-40 (1989)
- [37] Куницын В Е, Усачев А Б *Изв. вузов. Радиофизика* **33**(3) 267–73 (1990)
- [38] Nygren T *Planet. Space Sci.* **29**(5) 521-28 (1981)
- [39] Nygren T *Planet. Space Sci.* **30**(4) 427-30 (1982)
- [40] Zhang D Y *Radio Sci.* **26**(6) 1415-18 (1991)
- [41] Куницын В Е, Нестеров И А, Стефанчук А Д *Радиотехника и электроника* **44** (12) 1445–51 (1999)
- [42] Голикова Е В, Куницын В Е, Матвеев А С, Нестеров И А *Радиотехника и электроника* **50**(7) 794-804 (2005)
- [43] Бабиков В В *УФН* **92** (1) 3-26 (1967)
- [44] Бабиков В В *Метод фазовых функций в квантовой механике* (М.: Наука, 1967)
- [45] Калоджеро Ф *Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния* (М.: Мир, 1972)
- [46] Glazov L G, Pázsit I *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B* **215** 509–524 (2004)
- [47] Figueroa C, Brizuela H, and Heluania S P *J. Appl. Phys.* **99** 044909 (2006)
- [48] Figueroa C, Nieva N, Heluani S P *Physica B* **398** 356–9 (2007)
- [49] Glazov L G, Pázsit I *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B* **256** 638–58 (2007)
- [50] Guo Q, Feng Y P, Poon H C and Ong C K *Eur. Phys. J. B* **9** 29-36 (1999)
- [51] Нелин Е А *УФН* **177**(3) 307-313 (2007)
- [52] Swanson D G *Nucl. Fusion* **20** 949 (1980)
- [53] Appert K, Hellsten T, Vaclavik J and Villard L *Computer Physics Communications* **40** 73–93 (1986)
- [54] Appert K, Hellsten T, Sauter O, Succi S, Vaclavik J and Villard L *Computer Physics Communications* **43** 125–41 (1986)
- [55] Brambilla M *Plasma Phys. Control. Fusion* **41** 1 (1999)

- [56] Köhn A, Cappa A, Holzhauser E, Castejon F, Fernandez A and Stroth U *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 085018 (2008)
- [57] Kim K, Lee D-H and Lim H *Europhys. Lett.* **69**(2) 207–13 (2005)
- [58] Kim K, Lee D-H *Phys. Plasmas* **13** 042103 (2006)
- [59] Shalashov A G, Gospodchikov E D *Plasma Phys. Contr. Fusion* **52** (1) 025007 (2010)
- [60] Shalashov A G, Gospodchikov E D *Impedance technique for modeling of electromagnetic wave propagation in anisotropic and gyrotropic media*, in *Proc. of 21st Joint Russian-German Workshop on ECRH and Gyrotrons (STC-Meeting)*, Greifswald, German, (2009)
- [61] Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.:Наука, 1988)
- [62] Рид М, Саймон Б *Методы современной математической физики: Т. 1. Функциональный анализ.* (М.: Мир, 1977); *Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.* (1978); *Т. 3. Теория рассеяния.* (1982); *Т. 4. Анализ операторов* (1982)
- [63] Краснов М Л *Интегральные уравнения. Введение в теорию.* (М.:Наука, 1975)
- [64] Васильева А Б, Медведев Г Н, Тихонов Н А, Уразгильдина Т А *Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление.* (М.: Физматлит, 2003)
- [65] Демидович Б П, Марон И А, Шувалова Э З *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения.* (М.: Физматгиз, 1967)
- [66] Гельфанд С И *О числе решений квадратного уравнения в сб. «Глобус. Общематематический семинар»* Вып. 1. (Под ред. Прасолова В.В., Цфасмана М.А.) (Москва. Издательство МЦНМО, 2004) с. 124-133
- [67] Камке Э *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Мир, 1971)
- [68] Балакина М. А, Шалашов А Г, Господчиков Е Д, Смолякова О Б *Известия вузов, Радиофизика.* **49**(8) 686-703 (2006)
- [69] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика. Т. III Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (М.:Наука, 1989)
- [70] Budden K G *The Propagation of Radio Waves* (Cambridge University Press, 1985)
- [71] Cairns R A , Lashmore-Davies C N *Phys. Fluids* **26** (5) 1268 (1983)
- [72] Жаров А А *Физика плазмы* **10** 1109 (1984)
- [73] Mjølhus E *J. Plasma Phys.* **31** 7 (1984)
- [74] Токман М Д *Физика плазмы* **10** 1205 (1985).
- [75] Laqua H P *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** R1–R42 (2007)

- [76] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика. Т. VIII Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука 1989)
- [77] Boucher I et al. *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40** 1489 (1998)
- [78] Gusakov E Z, Hecaux S, Popov A Yu *Plasma Phys. Contr. Fusion* **51** 065018 (2009)
- [79] Suvorov E V, Erckman V, Holzhauser E, et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **37** (11) 1207-1213 (2009)
- [80] Suvorov E V, Holzhauser E, Kasperek W, et al. *Plasma Phys. Control. Fusion.* **39**(12B) B337-B351 (1997)
- [81] Suvorov E V, Holzhauser E, Kasperek W, et al. *Nucl. Fusion.* **38** (5) 661-671 (1998)
- [82] Агранович В.М., Гинзбург В.Л., *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука 1965)