

УДК 539.3

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ
СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ
ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ
РАБОТЫ ПО ОБЩЕЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ**

© 2013 г. **О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева**

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

nnsosa@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.06.2013

Рассмотрен случай, когда при случайных несовершенствах значение некротной критической нагрузки потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип некротной критической точки не меняется. Сформулирована и решена задача оптимизации стержневых конструкций по массе с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Метод апробирован на двух тестовых конструкциях.

Ключевые слова: оптимизация, геометрически нелинейные стержневые конструкции, случайные глобальные несовершенства, вероятность безотказной работы, общая потеря устойчивости, некротные предельные точки.

Введение

Все конструкции имеют хотя бы небольшие несовершенства. Несовершенства конструкции приобретают в процессе изготовления, транспортирования, монтажа и эксплуатации. В 1945 г. голландский профессор Койтер первым определил, что поведение конструкции с несовершенствами в значительной степени определяется поведением конструкции без несовершенств [1]. Общая потеря устойчивости связывается с несколькими типами некротных критических точек: асимметричная точка бифуркации, устойчивая симметричная точка бифуркации, неустойчивая симметричная точка бифуркации и предельная точка. Койтер также показал, когда и как значение некротной критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции без несовершенств может значительно уменьшиться при наличии несовершенств. Некротная нагрузка потери устойчивости есть степенная функция с показателем степени $2/3$ для неустойчивой симметричной точки бифуркации и степенная функция с показателем степени $1/2$ для асимметричной точки бифуркации [1]. Критическая нагрузка общей потери устойчивости для предельной точки, которую Койтер не рассмотрел, есть линейная функция. В большинстве работ рассматриваются несовершенства, которые считаются известными в дискретных точках конструкции. Обычно вектор несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$ представляют в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mu \mathbf{d}, \quad (1)$$

где $\mathbf{\epsilon}_0$ – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции без несовершенств, $\mathbf{\epsilon}$ – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции с несовершенствами, \mathbf{d} – первая форма потери устойчивости [2–4] конструкции без несовершенств, μ – масштабирующий множитель. В некоторых случаях фиксируется форма несовершенств \mathbf{d} и ищется множитель μ , а в других задачах масштабирующий множитель μ фиксируется и можно сформулировать задачу нахождения самой худшей формы несовершенств [5], которая дает наибольшее уменьшение значения критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции. Использование этих двух представлений дает только приближенное значение критической нагрузки общей потери устойчивости, так как вид несовершенств (1) не является общим.

В настоящей статье начальные глобальные несовершенства рассматриваются как независимые случайные малые величины, распределенные по нормальному закону, и величина критической нагрузки общей потери устойчивости тоже случайная величина. Рассматривается случай, когда при случайных несовершенствах значение критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип критической точки не меняется. Ограничение на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости включается в ограничения задачи оптимизации.

1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров \mathbf{X}^* из области допустимых значений F , для которых масса W конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} W(\mathbf{X}), \quad (2)$$

где \mathbf{X} – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений F определяется следующими ограничениями:

– на вероятность безотказной работы конструкции [6]

$$1 - P(0 < \Lambda^{\text{imp}}(\mathbf{X}, \mathbf{\epsilon}) < 1) \geq \delta, \quad (3)$$

где Λ^{imp} – некрatный критический пропорциональный множитель внешней консервативной нагрузки \mathbf{P}_0 ; P – вероятность общей потери устойчивости стержневой конструкции; $\mathbf{\epsilon}$ – вектор случайных глобальных несовершенств, которые имеют нормальное распределение, компоненты вектора $\mathbf{\epsilon}$ являются малыми величинами; δ – заданный допуск; для конструкции без несовершенств $\mathbf{\epsilon} = \{0\}$;

– на предельные значения управляемых параметров

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad (4)$$

где \mathbf{X}_{\min} и \mathbf{X}_{\max} – нижние и верхние значения для параметров проектирования.

Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность безотказной работы стержневой конструкции со случайными несовершенствами для одного типа критической точки – предельной точки.

2. Основные уравнения

Рассмотрим геометрически нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия Π зависит от вектора перемещений \mathbf{u} , пропорцио-

нального множителя нагрузки Λ , случайного вектора глобальных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$. Все компоненты внешней консервативной нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру Λ . Полная потенциальная энергия стержневой конструкции со случайными несовершенствами записывается в виде

$$\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \Lambda \mathbf{u}^T \mathbf{P}_0, \quad (5)$$

где $\varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$ – энергия деформации, \mathbf{P}_0 – вектор внешних консервативных нагрузок.

Уравнения равновесия стержневой конструкции для критического состояния имеют вид:

$$\mathbf{r}^c(\mathbf{u}^{\text{imp}}, \Lambda^{\text{imp}}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \left\{ \frac{\partial \Pi^c}{\partial u_i} \right\} = \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

так как полная потенциальная энергия стационарна в точке. Верхний индекс imp в (6) означает зависимость от вектора несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Уравнения равновесия (6) определяют равновесные кривые в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных (\mathbf{u}, Λ) при фиксированных несовершенствах $\boldsymbol{\varepsilon}$. На равновесных кривых имеются критические точки – точки, в которых выполняется условие:

$$\det \left| \frac{\partial r_i^c}{\partial u_j} \right| = \det \mathbf{K}^c = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где \mathbf{K}^c – касательная матрица жесткости стержневой конструкции.

Альтернативным условием для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости конструкции, которое определяется из следующей проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}^c \boldsymbol{\Phi}_1 = \{0\}. \quad (8)$$

Условие (7) или (8) трактуется как общая потеря устойчивости конструкции, так как при выполнении (7) или (8) возможны неоднозначные решения уравнений равновесия (6).

При варьировании несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$ критические точки будут образовывать m -мерную поверхность критических состояний, где m – размерность вектора случайных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Дифференцируя уравнения равновесия (6) по параметрам продвижения t_1, t_2, \dots, t_m вдоль m -мерной поверхности критических состояний, во всех точках которой касательная матрица жесткости $\mathbf{K}^c = \partial \mathbf{r}^c / \partial \mathbf{u}$ является особенной, запишем

$$\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [0], \quad (9)$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по $\mathbf{t}^T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$.

Уравнение (9) будет использоваться для определения критической точки – предельной точки.

3. Определение предельной точки

Умножим слева уравнение (9) на $\boldsymbol{\Phi}_1^T$, где $\boldsymbol{\Phi}_1$ – первая форма потери устойчивости стержневой конструкции без несовершенств. Тогда можно записать:

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T (\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \{0\}. \quad (10)$$

Из (10) приходим к условию потери устойчивости стержневой конструкции [6]:

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon} = \{0\}^T, \quad (11)$$

которое будем использовать для определения некротной предельной точки.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \neq \{0\}^T, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \neq \{0\}^T, \quad \dot{\varepsilon} \neq [0], \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} = -\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon}, \quad (12)$$

называется предельной точкой. Влияние одного случайного несовершенства ε_1 на предельную точку показано на рис. 1, а. Критический множитель Λ^{imp} внешней консервативной нагрузки зависит линейно от ε_1 в окрестности $\varepsilon_1 = 0$ [6], рис. 1, б. На рис. 1 предельные точки смещаются вдоль прямой критических состояний I , а критический множитель нагрузки, соответствующий предельной точке, для конструкции без несовершенств обозначен Λ^c .

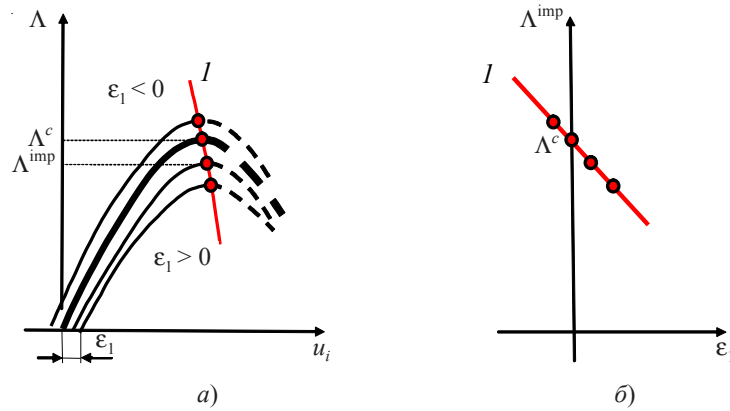


Рис. 1

4. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки для некротной предельной точки

Для разложения в ряд Тейлора критического множителя и критических перемещений Λ^{imp} и \mathbf{u}^{imp} необходимо определить их производные по параметрам продвижения t_1, t_2, \dots, t_m вдоль m -мерной поверхности критических состояний.

Не нарушая общности, для простоты рассмотрим два случайных несовершенства ε_1 и ε_2 ($m = 2$). Параметрические уравнения 2-мерной поверхности критических состояний имеют вид:

$$\mathbf{u}^{\text{imp}} = \mathbf{u}^{\text{imp}}(t_1, t_2), \quad \Lambda^{\text{imp}} = \Lambda^{\text{imp}}(t_1, t_2), \quad \varepsilon = \varepsilon(t_1, t_2). \quad (13)$$

Все значения t_1 и t_2 , меняющиеся в некоторой области, дают координаты всех точек 2-мерной поверхности критических состояний.

Разложим Λ^{imp} , ε_1 , ε_2 в ряды Тейлора в окрестности точки (t_1^0, t_2^0) , где t_1^0, t_2^0 соответствуют случаю отсутствия несовершенств у стержневой конструкции, т.е. $\varepsilon_1(t_1^0, t_2^0) = 0$, $\varepsilon_2(t_1^0, t_2^0) = 0$. Можно записать, пренебрегая компонентами второго и более порядков малости,

$$\Lambda^{\text{imp}}(t_1, t_2) = \Lambda^{\text{imp}}(t_1^0, t_2^0) + \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2, \quad (14)$$

$$\varepsilon_1(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2, \quad (15)$$

$$\varepsilon_2(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2, \quad (16)$$

где t_1 и t_2 – параметры продвижения вдоль поверхности критических состояний, а производные $\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)$, $\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)$ по параметрам продвижения t_1 и t_2 вдоль 2-мерной поверхности критических состояний определяются из уравнения (11) следующим образом:

$$\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_1} = - \frac{\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial t_2} = - \frac{\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}. \quad (18)$$

Предположим, что $t_1 = \varepsilon_1$, а $t_2 = \varepsilon_2$. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2} = 1. \quad (19)$$

Используя (19) в уравнениях (15) и (16), получим

$$\Delta t_1 = \varepsilon_1, \quad \Delta t_2 = \varepsilon_2. \quad (20)$$

Следовательно, уравнение (14) приводится к виду

$$\Lambda^{\text{imp}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Lambda^c + \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1}(0, 0) \varepsilon_1 + \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_2}(0, 0) \varepsilon_2. \quad (21)$$

Формула (21) легко обобщается на случай m несовершенств:

$$\Lambda^{\text{imp}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_i}(0, 0, \dots, 0) \varepsilon_i, \quad (22)$$

где Λ^c – критический множитель нагрузки \mathbf{P}_0 для конструкции без несовершенств, соответствующий предельной точке, а производные $\partial \Lambda^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_i$ определяются по формуле:

$$\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_i} = - \frac{\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i}. \quad (23)$$

5. Аналитический анализ чувствительности вектора перемещений для некротной предельной точки

Пренебрегая компонентами второго и более порядков малости, можно записать:

$$\mathbf{u}^{\text{imp}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = \mathbf{u}^c + \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon}(0, 0, \dots, 0) \varepsilon, \quad (24)$$

где \mathbf{u}^c – вектор перемещений для конструкции без несовершенств в предельной точке.

Матрица \mathbf{K}^c в уравнении (9) является особенной, и нахождение $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} = \partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon$ из (9) становится невозможным. Так как критическая точка – некротная точка, то необходимо записать только одно дополнительное уравнение. Для получения этого дополнительного уравнения дифференцируем уравнение (8) по ε_1 . Тогда можно записать

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \Phi_1 + \mathbf{K}^c \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}. \quad (25)$$

Умножим слева уравнение (25) на Φ_1^T и получим одно дополнительное уравнение для определения $\partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_1$:

$$\Phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \Phi_1 = 0. \quad (26)$$

Итак, имеем n уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{K}^c \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}, \\ \Phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \Phi_1 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

для определения производной $\partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_1$. Аналогично определяются остальные производные $\partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_2, \partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_3, \dots, \partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_m$, входящие в неизвестную матрицу $\partial \mathbf{u}^{\text{imp}} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$.

Теперь мы имеем методику определения производных критического множителя нагрузки и критических перемещений по параметрам продвижения по m -мерной поверхности критических состояний. В частности, имеем производные от Λ^{imp} и \mathbf{u}^{imp} по случайным несовершенствам $\boldsymbol{\varepsilon}$.

6. Вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для некротной предельной точки

Плотность распределения вероятностей линейной функции

$$\Lambda^{\text{imp}} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i$$

нормально распределенных независимых случайных несовершенств ε_i есть нормальный закон [7]:

$$g(\Lambda^{\text{imp}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\partial \Lambda^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_i)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}} e^{-\left(\Lambda^{\text{imp}} - \left(\Lambda^c + \sum_{i=1}^m (\partial \Lambda^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_i) m_{\varepsilon_i} \right) \right)^2 \left(2 \sum_{i=1}^m (\partial \Lambda^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_i)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 \right)^{-1}} \quad (28)$$

с математическим ожиданием

$$m_{\Lambda^{\text{imp}}} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_i} m_{\varepsilon_i} \quad (29)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\Lambda^{\text{imp}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Lambda^{\text{imp}}}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}. \quad (30)$$

На рис. 2 показана форма функции плотности распределения вероятности нагрузки общей потери устойчивости для некротной предельной точки.

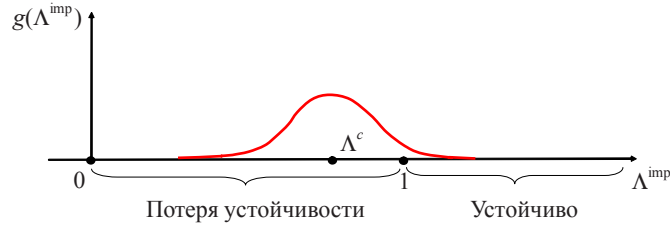


Рис. 2

Важно отметить, что функция плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости Λ^{imp} зависит от управляемых параметров конструкции \mathbf{X} . Поэтому график плотности вероятности случайной величины Λ^{imp} смещается относительно точки потери устойчивости $\Lambda^{\text{imp}} = 1$ при варьировании \mathbf{X} (см. рис. 2).

Можно определить вероятность попадания значений нормальной случайной величины Λ^{imp} в интервал общей потери устойчивости $(0, 1)$ (см. рис. 2):

$$P(0 < \Lambda^{\text{imp}} < 1) = \int_0^1 g(\Lambda^{\text{imp}}) d\Lambda^{\text{imp}}. \quad (31)$$

Выражение (31) позволяет подсчитать искомую вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для предельной точки. Функция плотности распределения вероятностей $g(\Lambda^{\text{imp}})$ случайной величины Λ^{imp} определяется по формуле (28), где производные $\partial \Lambda^{\text{imp}} / \partial \varepsilon_i$ определяются по (23), а m_{ε_i} , σ_{ε_i} – заданные параметры случайных нормальных независимых несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$.

7. Примеры

Для всех примеров, рассмотренных далее, модуль упругости $E = 6,895 \cdot 10^{10}$ Н/м², удельный вес $\rho g = 26977,5$ Н/м³, A – площади поперечных сечений элементов. Независимые случайные несовершенства $\boldsymbol{\varepsilon}$ подчинены нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными нулю, и заданными средними квадратичными отклонениями.

Пример 1. Ферма Мизеса, показанная на рис. 3, имеет две степени свободы: перемещения узла 2 вдоль осей x и y . Нагрузка, приложенная в узле 2, $P_0 = 2,06 \cdot 10^7$ Н; длина пролета $S = 0,4$ м; ε_1 – несовершенство модуля упругости E элементов фермы, ε_2 – несовершенство вертикальной координаты узла 2.

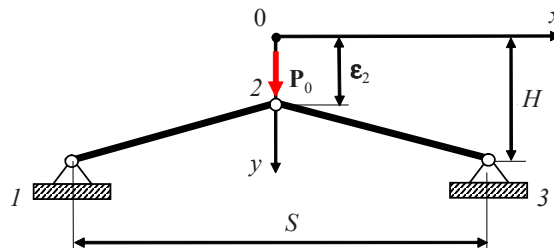


Рис. 3

Средние квадратичные отклонения σ_1 и σ_2 для двух независимых несовершенств ε_1 и ε_2 равны 1962 МПа и 0,005 м. Фиксированные параметры E, S, P_0 и границы изменения варьируемых параметров A и H в примере подобраны так, что тип критической точки не меняется.

Полная потенциальная энергия фермы Мизеса записывается в виде:

$$\Pi = \frac{2A(E + \varepsilon_1)(S^2 u_x^2 + (u_x^2 + u_y(2\varepsilon_2 - 2H + u_y))^2)}{\sqrt{(S^2 + 4(H - \varepsilon_2)^2)^3}} - \Lambda P_0 u_y.$$

Критический множитель нагрузки общей потери устойчивости фермы определяется из уравнения (21) и имеет вид:

$$\Lambda^{\text{imp}} = \frac{16AEH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} + \frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} \varepsilon_1 - \frac{16AEH^2 S^2}{P_0 \sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^5}} \varepsilon_2.$$

Параметрами проектирования для фермы являются площадь поперечных сечений элементов A [м²] и высота H [м]: $0,0011 \leq A \leq 0,0014$, $0,285 \leq H \leq 0,345$. Допустимая область F определяется ограничениями на параметры проектирования и ограничением на вероятность безотказной работы конструкции $1 - P(0 < \Lambda^{\text{imp}} < 1) \geq 0,99$.

Оптимальный проект фермы Мизеса определяется точкой $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1290,31 \text{ мм}^2; 345 \text{ мм}\}$ с весом $W_{\text{opt}} = 2,830 \text{ кГ}$ (рис. 4), где 1, 2 и 3 соответствуют ограничениям, состоящим в том, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99; 0,95 и 0,90 соответственно; 4, 5, 6 – кривые уровней целевой функции.

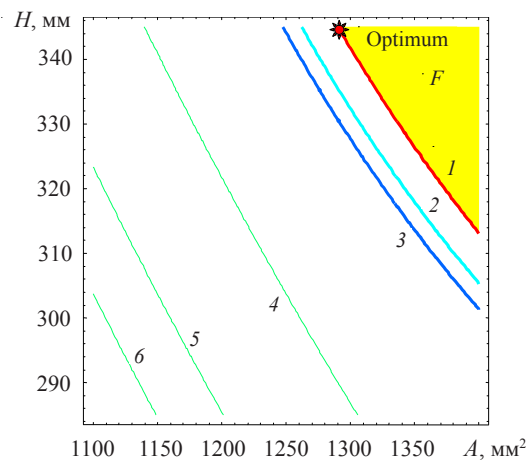


Рис. 4

Пример 2. Рассмотрим пространственный купол с тремя степенями свободы, нагруженный в узле 1 сосредоточенной силой $P_0 = 3,041 \cdot 10^7 \text{ Н}$ (рис. 5). На рис. 6 представлен вид купола сверху. Расстояние $S = 1 \text{ м}$, ε_1 – несовершенство модуля упругости E элементов фермы 1 и 3, ε_2 – несовершенство координаты z узла 1, ε_3 – несовершенство модуля упругости E элементов фермы 2 и 4. Средние квадратичные отклонения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для трех независимых несовершенств $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равны 1962 МПа; 0,005 м; 981 МПа.

Параметрами проектирования являются площади поперечных сечений A [м²] элементов и высота H [м] купола. Допустимая область F определяется следующими

ми ограничениями на параметры проектирования: $0,0012 \leq A \leq 0,002$, $0,5 \leq H \leq 0,6$ – и также ограничением на вероятность безотказной работы конструкции $1 - P(0 < \Lambda^{imp} < 1) \geq 0,99$.

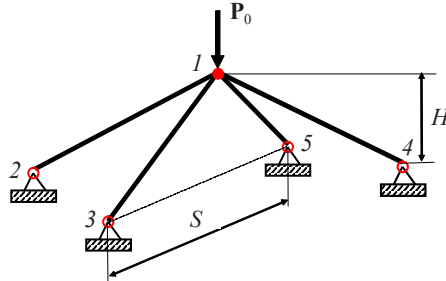


Рис. 5

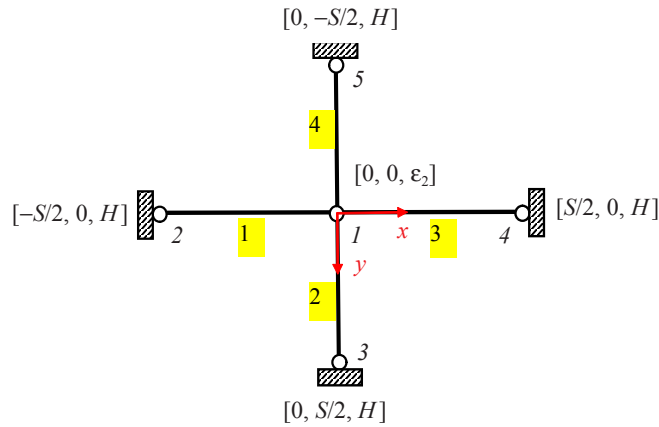


Рис. 6

Полная потенциальная энергия купола записывается в виде:

$$\Pi = -\Lambda P_0 u_z + \frac{2A}{\sqrt{(S^2 + 4(H - \varepsilon_2)^2)^3}} [S^2 (u_x^2 (E + \varepsilon_1) + u_y^2 (E + \varepsilon_3)) + (2E + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)(u_x^2 + u_y^2 + u_z (-2H + u_z + 2\varepsilon_2))^2].$$

Критический множитель нагрузки общей потери устойчивости купола определяется из уравнения (22) и имеет вид:

$$\Lambda^{imp} = \frac{32AEH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} + \frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} \varepsilon_1 - \frac{32AEH^2 S^2}{P_0 \sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^5}} \varepsilon_2 + \frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} \varepsilon_3.$$

Оптимальный проект купола определяется некротной предельной точкой $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1321,93 \text{ мм}^2; 600 \text{ мм}\}$ с весом $W_{opt} = 11,357 \text{ кГ}$ (рис. 7), где 1, 2, 3 соответствуют ограничениям, состоящим в том, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99; 0,95 и 0,90 соответственно; 4, 5, 6 – кривые уровней целевой функции.

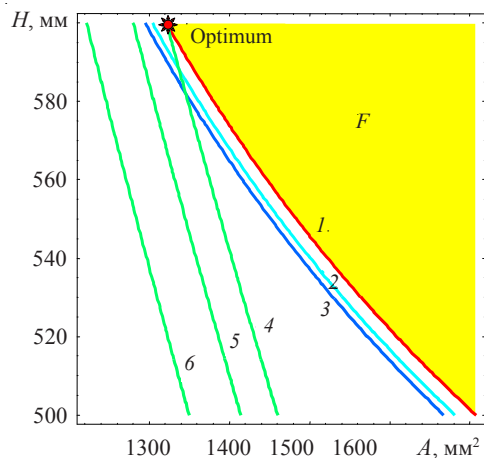


Рис. 7

Заключение

Сформулирована и решена новая задача оптимизации по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Проанализированы свойства функции плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции при наличии m независимых нормальных случайных несовершенств. Для некротной предельной критической точки решены два примера.

Список литературы

1. Koiter W.T. The stability of elastic equilibrium. Ph. D. Thesis. N.J. Paris, Amsterdam, Holland, 1945 (in Dutch). English Translation. NASA TTF-10833 (1967).
2. Ikeda K., Murota K., Elishakoff I. Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections // Computers & Structures. 1996. Vol. 59, No. 3. P. 463–469.
3. Mroz Z., Piekarski J. Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures // Int. J. Numer. Meth. Engng. 1998. 42. P. 1231–1262.
4. Балыкин С.В., Фрумен А.И. Влияние начальной погиби, соответствующей форме потери устойчивости сферической оболочки из оргстекла, на ее критическое давление // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов: Тез. докл. XXIII Международ. конф. СПб. 28 сент. – 01 окт. 2009. С. 38–40.
5. Сергеев, О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с несовершенствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2011. №4. Ч. 5. С. 2232–2234.
6. Оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях по устойчивости / А.К. Любимов, О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2012. Вып. 74. С. 134–145.
7. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС, 2010. 480 с.

**OPTIMIZATION OF BAR STRUCTURES WITH RANDOM IMPERFECTIONS
WITH CONSTRAINTS ON FAULTLESS OPERATION PROBABILITY
FOR OVERALL LOSS OF STABILITY**

O.A. Sergeyev, V.G. Kiselev, S.A. Sergeyeva

In this paper, we consider the case when the random imperfections value of the non-multiple critical buckling load changes and the type of non-multiple critical point – the limit point is not changed. The aim of the paper is the formulation and solution of the weight optimization problem of bar structures with constraints on faultless operation probability of the structure and constraints on the design variables. The method was verified on two test structures.

Keywords: optimization, geometrically nonlinear bar structures, random global imperfections, faultless operation probability for overall loss of stability, non-multiple limit points.