

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ПЛОСКИМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

© 2015 г. **Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И.**

*Тверской государственный технический университет, Тверь,
Российская Федерация*

vlgzub@gmail.com

Поступила в редакцию 05.05.2015

Представлены основные уравнения теории процессов пластического деформирования в плоских задачах и их математическая модель, учитывающая обобщенный эффект Баушингера при сложном нагружении. Для решения основных уравнений используются универсальные аппроксимации функционалов процессов и численный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Для оценки достоверности полученные расчетные данные сопоставлены с результатами экспериментальных исследований, полученных на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ. Для реализованной траектории сложного деформирования отклонение расчетных данных для рассмотренной математической модели теории процессов от экспериментальных данных не превышает 7–8% по скалярным и 10% по векторным свойствам, что подтверждает достоверность предложенной математической модели.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сложное нагружение, математическая модель, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материалов, испытательный комплекс СН-ЭВМ.

1. Основные соотношения и уравнения

В теории процессов упругопластического деформирования компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} представлены в виде [1]

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \Theta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $S_{ij} = \sigma S_{ij}^*$, $\Theta_{ij} = \varepsilon \Theta_{ij}^*$ – компоненты их девиаторов; S_{ij}^* , Θ_{ij}^* – компоненты направляющих тензоров;

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ij} \delta_{ij}}{3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ij} \delta_{ij}}{3}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} \quad (2)$$

– модули их шаровых тензоров и тензоров-девиаторов соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера. При простом пропорциональном нагружении направляющие тензоры напряжений (S_{ij}^*) и деформаций (Θ_{ij}^*) равны и соотношения теории малых упругопластических деформаций [1, 2] имеют вид

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta} \Theta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где

$$\sigma = \Phi(\Theta) \quad (4)$$

– универсальная функция единой диаграммы упрочнения материалов Роша и Эйхингера, определяющая скалярные свойства материалов для произвольного напряженно-деформированного состояния (НДС); K – упругий модуль объемной деформации; $\sigma/\Theta = 2G_p$ – удвоенный пластический модуль сдвига. При сложном нагружении направляющие тензоры $(S_{ij}^*) \neq (\Theta_{ij}^*)$. Учет в определяющих соотношениях (3), (4) только скалярных свойств материалов недостаточен. Тензорное изложение теории пластического деформирования материалов не позволяет отобразить геометрически наглядно векторные свойства материалов в трехмерном физическом пространстве [1–6]. В связи с этим в теории процессов в работах А.А. Ильюшина [1, 3, 4] было использовано их представление в линейном совмещенном евклидовом пространстве E_6 с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{i}_k\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, 5$. В линейном шестимерном пространстве E_6 тензорам напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) поставлены в соответствие векторы напряжений и деформаций

$$\bar{S} = S_0 \hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_0 \hat{i}_0 + \bar{\Theta}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (6)$$

– векторы напряжений и деформаций в совмещенном пятимерном девиаторном пространстве E_5 . Координаты векторов S_k, Θ_k связаны с компонентами тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и девиаторов S_{ij}, Θ_{ij} взаимно-однозначными преобразованиями [1–6]:

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, & \Theta_2 = \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, & \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13}. \end{cases} \quad (7)$$

В подпространстве E_5 конец вектора деформаций $\bar{\Theta} = \Theta \hat{\Theta}$, где $\hat{\Theta}$ – единичный вектор, описывает траекторию деформирования $\bar{\Theta}(s)$ с длиной дуги s , в каждой точке которой строится естественный обобщенный ортонормированный репер Френе–Ильюшина $\{\hat{p}_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, 5$, а также векторы напряжений $\bar{\sigma} = \sigma \hat{\sigma}$, $d\bar{\sigma}/ds$, где $\hat{\sigma}$ – единичный вектор напряжений. Эта совокупность траектории деформирования $\bar{\Theta}(s)$ и векторов $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}/ds$, построенных в каждой ее точке вместе с соответствующей температурой T и модулем ε_0 , образует геометрический образ процесса деформирования в девиаторном пространстве E_5 . Единичные векторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\Theta}$ в E_5 эквивалентны направляющим тензорам $(S_{ij}^*), (\Theta_{ij}^*)$ и при простом нагружении совпадают, то есть $\hat{\sigma} = \hat{\Theta}$. При сложном нагружении $\hat{\sigma} \neq \hat{\Theta}$. Поэтому при простом нагружении соотношения теории малых упругопластических деформаций (3) в E_6 принимают вид:

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{\Theta}_0, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\Theta} \bar{\Theta}, \quad \sigma = \Phi(\Theta). \quad (8)$$

В естественном репере $\{\hat{p}_k\}$ векторы $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$ и $\hat{\Theta} = \bar{\Theta}/\Theta$ могут быть представлены разложениями

$$\hat{\sigma} = \cos \beta_k \hat{p}_k, \quad \hat{\Theta} = \cos \alpha_k \hat{p}_k, \quad (9)$$

где

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right], \dots; \quad (10)$$

κ_1, κ_2 – параметры кривизны и кручения внутренней геометрии траектории деформирования, отражающие влияние сложного нагружения; α_k, β_k – угловые координаты векторов $\hat{\sigma}$ и $\hat{\Theta}$ в естественном репере $\{\hat{p}_k\}$ Френе – Ильюшина.

Из соотношений (9) следует аналитическое выражение постулата изотропии в форме А.А. Ильюшина [3]:

$$\bar{\sigma} = (\sigma \cos \beta_k) \hat{p}_k = P_k \hat{p}_k. \quad (11)$$

Простейшей теорией процессов является теория для траекторий малой кривизны А.А. Ильюшина, которая обобщает теорию течения Мизеса для жесткопластических сред на упругопластические среды с упрочнением [1, 3]. В теории Мизеса предполагается, что направляющие тензоры напряжений (S_{ij}^*) и скоростей деформаций ($d\mathcal{E}_{ij}^*/ds$) совпадают, то есть (S_{ij}^*) = ($d\mathcal{E}_{ij}^*/ds$) или $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$, и реализуется свободное пластическое течение. В теории процессов А.А. Ильюшина это же равенство направляющих тензоров распространяется на упругопластические среды. Основные соотношения теории имеют вид

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\Theta}}{ds} (\hat{\sigma} \approx \hat{p}_1), \quad (12)$$

где

$$\sigma = \Phi(s) \approx \Phi(\Theta) \quad (13)$$

– универсальная функция упрочнения материалов Одквиста – Ильюшина при сложном нагружении [1, 5], мало отличающаяся от функции упрочнения при простом нагружении и не учитывающая в явном виде историю сложного нагружения и векторные свойства материала.

В работе [1] А.А. Ильюшин представил основное соотношение постулата изотропии также в форме

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = P_k^* \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (14)$$

В частности, для плоских траекторий соотношение (14) было представлено в виде [1]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N\hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - N \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \quad (15)$$

где $N, d\sigma/ds = P \cos \vartheta_1$ – функционалы процесса; $\beta_1 = \vartheta_1$ – угол сближения между векторами $\hat{\sigma}$ и \hat{p}_1 в соприкасающейся плоскости репера $\{\hat{p}_k\}$; $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$.

Соотношение (15) в дальнейшем в работах [7–11] было дополнено уравнением

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{N}{\sigma} \sin \vartheta_1 \quad (16)$$

для отображения влияния векторных свойств материалов.

Для траекторий средней кривизны κ_1 угол сближения $\vartheta_1 \neq 0$. Однако во многих теориях пластичности допускается возможность использования приближенного закона упрочнения Одквиста – Ильюшина (13) $\sigma = \Phi(s)$ и, следовательно, $d\sigma/ds = d\Phi/ds$.

Для функционала $N = M_1$ при сложном нагружении в [5, 6] предложено выражение

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q(\vartheta_1), \quad (17)$$

где $2G_p = \Phi(s)/s$ – удвоенный пластический модуль при простом нагружении;

$$f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \quad (18)$$

– функция сложного нагружения; q – экспериментально определяемый показатель степени; индекс «нолик» у $2G_p^0$ относится к точке излома траектории. В частности, при простом нагружении ($\vartheta_1 = 0$) имеем $M_1 = 2G_p$. При изломе траектории на $\vartheta_1^0 = 180^\circ$ получаем $M_1 = 2G$. В ряде теорий пластичности при активном упругопластическом деформировании принимается $M_1 = \alpha_* 2G$, где $0 < \alpha_* \leq 1$. Так, в теории течения и различных ее вариантах считается $M_1 = 2G$, $\alpha_* = 1$. В теории процессов для траекторий средней кривизны принимается $\alpha_* = 0,75-0,8$. Общие определяющие соотношения теории процессов получены в работах [5, 6]. С изменением параметров кривизны и кручения κ_1, κ_2 и углов излома траекторий деформирования необходим учет истории сложного нагружения, что закон упрочнения Одквиста – Ильюшина (13) не обеспечивает. Это может приводить к недостоверным результатам при практических расчетах. Поэтому построение новых более точных аппроксимаций функционалов процессов пластического деформирования при построении математических моделей является актуальной и практически важной задачей.

2. Математическая модель теории процессов в плоских задачах

К основным уравнениям математической модели теории процессов в плоских задачах относятся уравнения (15), (16) и универсальные аппроксимации функционалов упругопластических процессов [5, 6]:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \Phi(s) + Af^p(\vartheta_1^0)\Omega(\Delta s) - B\Delta s\kappa_1, \\ M_1 &= 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q(\vartheta_1), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Delta s = s - s_K^T$ – приращение дуги траектории деформирования; s_K^T – длина дуги в точке ее излома K ;

$$\Omega(\Delta s) = -[\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s})] \quad (20)$$

– функция, описывающая «нырок» напряжений и обобщенный эффект Баушингера при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$A\gamma(1+b) = \frac{d\Phi}{ds} + 2G, \quad \Phi_0 = \Phi(s_K^T); \quad f^p(\vartheta_1^0) = \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2}\right)^p; \quad (21)$$

b, B, γ, p, q – экспериментально определяемые параметры для каждого материала согласно методике, изложенной в [5]. Эффект Баушингера при простом знакопеременном нагружении-разгрузке рассматривается при сложном нагружении-разгрузке как проявление общего свойства запаздывания скалярных свойств материалов [3, 5, 6, 12]. Основные уравнения математической модели процессов упру-

гопластического деформирования приводят к решению задачи Коши. При численном решении этой задачи использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности [13]. Ранее такая математическая модель была использована в работах [14, 15] для процессов деформирования по сложным кусочно-линейным траекториям.

3. Экспериментальное обоснование достоверности математической модели

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета на трубчатых образцах из стали 45 с механическими характеристиками $\sigma^T = 285$ МПа, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Трубчатые образцы имели толщину стенки $h = 1$ мм, диаметр срединной поверхности $d = 31$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. На рис. 1 приведена диаграмма простого нагружения образца из стали 45 с площадкой текучести, полученная при нормальной температуре при растяжении. Эта диаграмма аппроксимировалась с помощью выражений

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}) & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}) & \text{при } s > s^T, \end{cases}$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, σ_T – предел текучести при растяжении; σ_* , α , β , G_* – постоянные параметры, G – упругий модуль сдвига.

Кружочками на рис. 1 отмечены экспериментальные точки диаграммы в плоскости $\sigma - s$, сплошной линией – ее аппроксимация. При обработке этой диаграммы были получены следующие численные значения параметров для стали 45 с площадкой текучести: $\sigma^T = 285$ МПа, $s^T = 9 \cdot 10^{-3}$, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78,8$ МПа, $2G_* = 1619$ МПа.

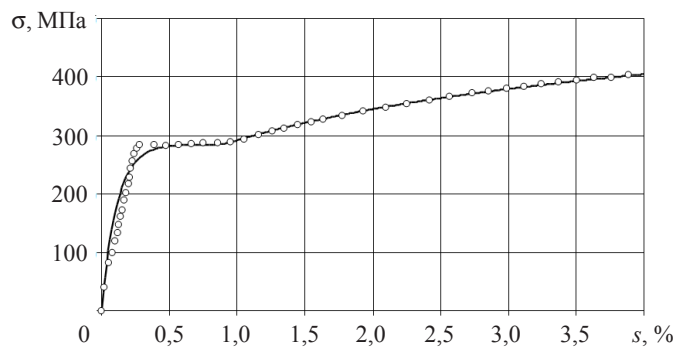


Рис. 1

На рис. 2 приведена реализованная в опыте двузвенная траектория деформирования трубчатого образца из стали 45 в плоскости $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$ девиаторного подпространства E_5 . Траектория состоит из прямолинейного первого участка OK и второго участка в форме окружности с радиусом $R = 1,75\%$, кривизной $\kappa_1 \approx 57,1$ и углом излома траектории $\vartheta_1^0 = 90^\circ$.

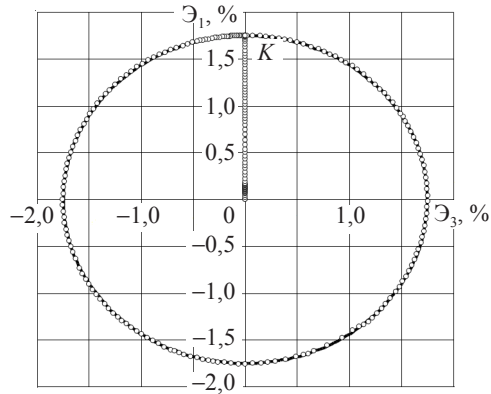


Рис. 2

На рис. 3 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в плоскости (S_1, S_3) совмещенного девиаторного подпространства напряжений E_5 , где экспериментальные результаты представлены также кружочками. Параметры b , A , B , γ , p , q , входящие в функционалы процесса (19), определялись согласно методике, изложенной в [5], на основе базовых опытов по типу веера двузвенных траекторий. В результате обработки экспериментальных данных для заданной программы сложного деформирования были получены значения параметров $b = 0,125$, $A = 370,2$ МПа, $B = 23$ МПа, $\gamma = 386,8$, $p = 1,8$, $q = 0,5$.

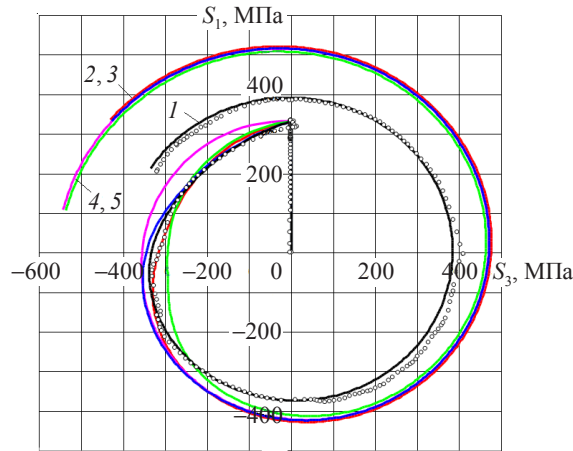


Рис. 3

Черная кривая I на рис. 3 соответствует полученным расчетным данным согласно изложенной выше математической модели теории процессов в плоских задачах, учитывающей в функционалах параметры сложного нагружения s , κ_1 , ϑ_1^0 и обобщенный эффект Баушингера, реализуемый на нырке напряжений при разгрузке. Синяя кривая 2 получена в предположении $B = 0$, то есть без учета кривизны в аппроксимациях функционалов (19). В таком виде функционалы используются, строго говоря, для процессов деформирования материалов вида ломаных траекторий. В работе [14] использование функционалов в этом случае позволило достоверно описать процессы упругопластического деформирования стали 45 для ломаных траекторий с большим углом излома $\vartheta_1^0 = 135^\circ$.

Красная кривая 3 соответствует расчету, в котором в (19) предполагалось $B = 0$, а параметры аппроксимаций определялись для траектории с углом излома $\vartheta_1^0 = 180^\circ$, что соответствует простой упругой разгрузке и простому эффекту Баушингера, но не соответствует реализованному в опыте углу излома траектории деформирования $\vartheta_1^0 = 90^\circ$. Такой неадекватный прием, используемый некоторыми авторами для построения приближенных выражений функционалов или материальных функций, может приводить к противоречию с опытом. В этом случае функционал определяется в отношении другого процесса нагружения и поэтому параметры сложного нагружения в (19) изменяются. Эти значения в нашем исследовании были равны: $b = 0,05$, $A = 846$ МПа, $B = 0$, $\gamma = 183,4$, $p = 2,5$, $q = 0,5$. Базовый опыт для их определения не соответствовал реализованной опытной траектории деформирования с углом излома $\vartheta_1^0 = 90^\circ$ и $\kappa_1 \neq 0$.

Бордовая кривая 4 и зеленая кривая 5 отражают результаты расчета по теориям пластичности, в основу которых положен закон упрочнения Одквиста – Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$. В этом случае предполагается, что кривизна мала ($\kappa_1 \approx 0$), а угол сближения невелик ($\cos \vartheta_1 \approx 1$, $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$) и определяется из дифференциального уравнения (15) при реальном значении $\kappa_1 \neq 0$. При таком противоречивом предположении кривая 4 отражает решение по теории течения Прандтля – Рейса – Хилла для материалов с упрочнением, но без учета эффекта Баушингера. В этой теории течения считается $M_1 = 2G$. Аналогичный результат был получен в теории процессов для траекторий средней кривизны, в которой принималось $M_1 = \alpha_* 2G$ ($0 < \alpha_* < 1$) при $\alpha_* = 0,8$ и $\sigma = \Phi(s)$.

Зеленая кривая 5 на рис. 3 отражает отклик в пространстве напряжений для теорий течения типа теории Кадашевича – Новожилова, в которых принимается $M_1 = 2G$, учитывается простой эффект Баушингера ($\vartheta_1^0 = 180^\circ$) и принимается закон упрочнения Одквиста – Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ для первичного участка упругопластического деформирования и закон $\sigma \neq \Phi(s)$ для вторичного участка пластического деформирования после простой упругой разгрузки. В реализованной в работе математической модели при определении параметров аппроксимаций был также принят соответствующий этой теории угол излома $\vartheta_1^0 = 180^\circ$. Как видно из рис. 3, вариант решения, соответствующий теории указанного типа, опытом также не подтверждается.

На рис. 4 приведены результаты расчетов и экспериментальные данные для диаграмм сложного нагружения $\sigma - s$, характеризующих скалярные свойства материалов в зависимости от длины дуги s сложного деформирования, а на рис. 5 – диаграммы для углов сближения $\vartheta_1 - \Delta s$, характеризующие векторные свойства материалов. На рис. 6, 7 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига $S_3 - \mathcal{E}_3$, а на рис. 8–10 – расчетные диаграммы изменения функционалов $d\sigma/ds$, M_1 , $M = d\sigma/ds - M_1 \cos \vartheta_1$ в зависимости от изменения длины дуги Δs траектории деформирования s с учетом изменения угла сближения ϑ_1 . Все кривые на этих рисунках имеют ту же нумерацию и тот же цвет, что и на рис. 3.

Из приведенных рисунков видно, что для реализованной траектории сложного деформирования отклонение расчетных данных (кривые 1) для рассмотренной математической модели теории процессов от экспериментальных данных не превышает 7–8% по скалярным и 10% по векторным свойствам, что подтверждает достоверность предложенной математической модели.

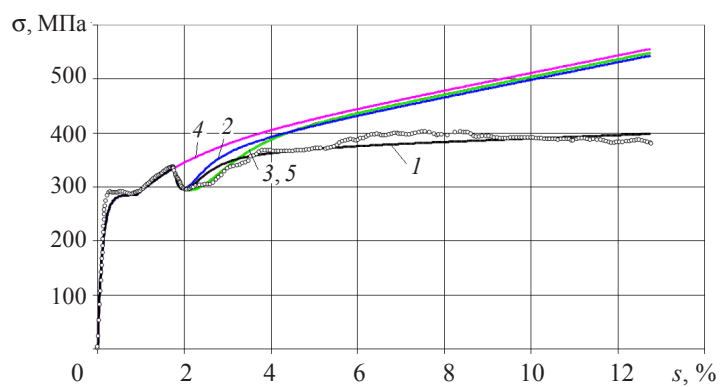


Рис. 4

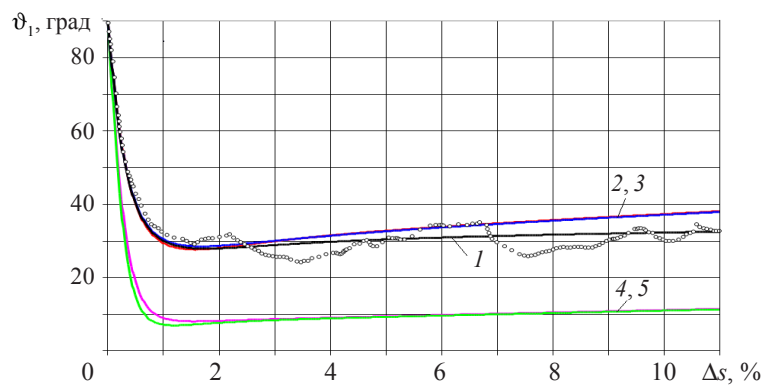


Рис. 5

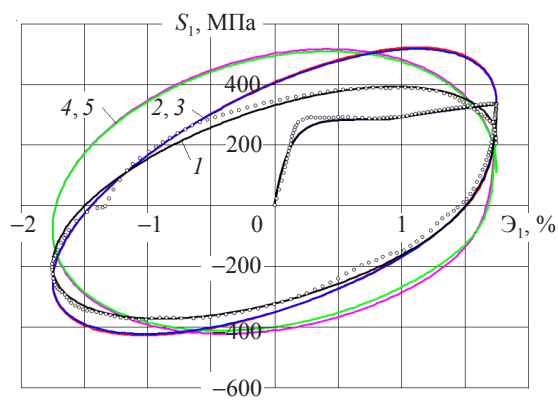


Рис. 6

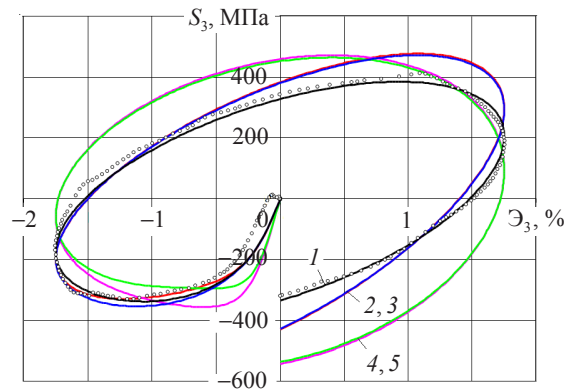


Рис. 7

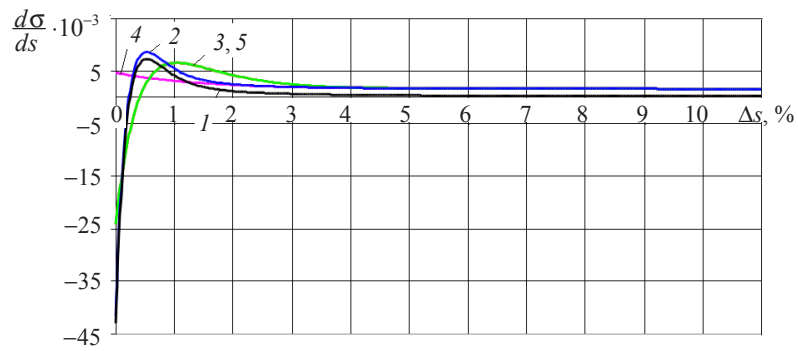


Рис. 8

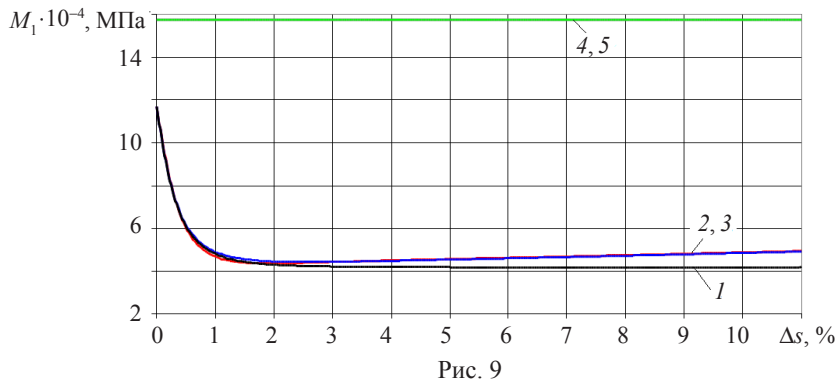


Рис. 9

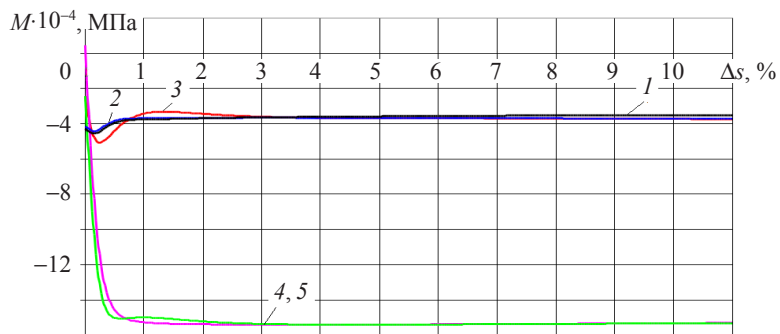


Рис. 10

4. Выводы

Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы.

1. Верификация математической модели на основе сравнения результатов расчетов с опытными данными подтвердила достоверность предложенных теоретических положений для процессов деформирования по траекториям постоянной кривизны в плоских задачах (кривые 1).

2. Степень точности той или иной теории пластичности можно адекватно установить только при учете в функционалах процессов всех основных параметров сложного нагружения: $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$. Неучет параметра кривизны κ_1 в аппроксимации функционала $\sigma = \sigma(s, \kappa_1, \vartheta_1^0)$ для криволинейных траекторий приводит к явному противоречию с опытом (кривые 2–5).

3. Теории пластичности, использующие закон упрочнения Одквиста – Ильюшина, при определении угла сближения ϑ_1 и функционала M_1 , характеризующих влияние векторных свойств материалов, дают результаты (кривые 4, 5 на рис. 5, 9), заметно отличающиеся от тех, которые получены с использованием теорий, учитывающих это влияние (кривые 1, 2, 3 на рис. 5, 9).

4. Для ломаных траекторий деформирования с прямолинейными участками ($\kappa_1 = 0$) расчетные результаты по скалярным свойствам по всем отмеченным выше теориям с ростом длины дуги s после излома траектории практически совпадают (см. рис. 3, 4, 8).

Список литературы

1. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. *Пластичность. Уругопластические деформации*. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. Ильюшин А.А. *Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность*. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
4. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
6. Зубчанинов В.Г. *Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность*. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
7. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ, 1971. 247 с.
8. Ленский В.С. *Гипотеза локальной определенности в теории пластичности* // Изв. АН СССР. ОТН. 1962. № 5. С. 154–158.
9. Дао Зуй Бик. *О гипотезе локальной определенности в теории пластичности* // Вестник МГУ. Серия «Математика, механика». 1965. №2. С. 67–75.
10. Зубчанинов В.Г. *К вопросу об использовании общей математической теории пластичности в теории устойчивости* // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела / Калинин: КГУ, 1982. С. 100–112.
11. Васин Р.А., Ильюшин А.А. *Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах* // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С. 114–118.
12. Москвитин В.В. *Пластичность при переменных нагружениях*. М.: Изд-во МГУ, 1965. 264 с.
13. Турчак Л.И., Плотников П.В. *Основы численных методов*. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
14. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гульятеев В.И. *Численное моделирование процессов сложного уругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям* // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18–25.
15. Зубчанинов В.Г. *Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред* // Изв. РАН. МТТ. 2011. №1. С. 27–37.

References

1. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii*. M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 271 s.
2. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Uprugoplasticheskie deformatsii*. M.: Gostekhizdat, 1948. 376 s.
3. Il'yushin A.A. *Trudy (1946–1966). T. 2. Plastichnost'*. M.: Fizmatlit, 2004. 480 s.
4. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy*. M.: Izd-vo MGU, 1990. 310 s.
5. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred*. M.: Fizmatlit, 2010. 352 s.
6. Zubchaninov V.G. *Ustoychivost' i plastichnost'. T. 2. Plastichnost'*. M.: Fizmatlit, 2008. 336 s.
7. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy*. M.: Izd-vo MGU, 1971. 247 s.
8. Lenskiy V.S. *Gipoteza lokal'noy opredelennosti v teorii plastichnosti // Izv. AN SSSR. OTN. 1962. № 5. S. 154–158.*
9. Dao Zuy Bik. *O gipoteze lokal'noy opredelennosti v teorii plastichnosti // Vestnik MGU. Seriya «Matematika, mekhanika». 1965. №2. S. 67–75.*
10. Zubchaninov V.G. *K voprosu ob ispol'zovanii obshchey matematicheskoy teorii plastichnosti v teorii ustoychivosti // Ustoychivost' v mekhanike deformiruемого tverdogo tela / Kalinin: KGU, 1982. S. 100–112.*
11. Vasin R.A., Il'yushin A.A. *Ob odnom predstavlenii zakonov uprugosti i plastichnosti v ploskikh zadachakh // Izv. AN SSSR. MTT. 1983. №4. S. 114–118.*
12. Moskvitin V.V. *Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniyakh*. M.: Izd-vo MGU, 1965. 264 s.
13. Turchak L.I., Plotnikov P.V. *Osnovy chislennykh metodov*. M.: Fizmatlit, 2003. 304 s.
14. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gul'tyaev V.I. *Chislennoe modelirovanie protsessov slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya stali po dvuzvennym lomanyim traektoriyam // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhd. sb. / Nizhegorod. un-t, 2014. Vyp. 76. Ch. 1. S. 18–25.*
15. Zubchaninov V.G. *Postulat izotropii i zakon slozhnoy razgruzki sploshnykh sred // Izv. RAN. MTT. 2011. №1. S. 27–37.*

MODELING THE PROCESSES OF COMPLEX ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF MATERIALS ALONG FLAT CURVILINEAR TRAJECTORIES

Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulyaev V.I.

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

Basic equations of the theory of plastic deformation process in plane problems are presented, as well as their mathematical model accounting for the generalized Bauschinger effect for complex loading. To solve the basic equations, universal approximations of process functionals and the fourth-order accuracy Runge – Kutta numerical method are used. To validate the reliability of the computed results, they are compared against the experimental results obtained using the SN-EVM automated test stand. For the implemented trajectory of complex deformation, the computed data for the above mathematical model of the theory of processes differ from the experimental data by not more than 7–8% in the scalar and 10% in the vector characteristics, which validates the reliability of the introduced mathematical model.

Keywords: elasticity, plasticity, complex loading, mathematical model, deformation trajectory, vector and scalar material characteristics, SN-EVM test stand.