

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДЕПЛАНАЦИИ  
НА ПАРАМЕТРЫ КРУТИЛЬНОЙ ВОЛНЫ,  
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ТОНКОСТЕННОМ СТЕРЖНЕ\***

© 2015 г.

**Ерофеев В.И.<sup>1,2</sup>, Лампси Б.Б.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения Российской академии наук,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>3</sup>*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

erf04@sinn.ru

*Поступила в редакцию 17.02.2015*

Рассматривается математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в стержне, включающая в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности и депланацию, то есть выход поперечного сечения в процессе деформации стержня из первоначального плоского состояния. В отличие от большинства известных моделей здесь связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, а находится в процессе решения задачи. Определено, что наличие депланации влечет за собой дисперсию фазовой скорости крутильной волны. Показано, что одновременное присутствие нелинейности и дисперсии приводит к формированию несинусоидальных стационарных волн в стержне, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения формы.

*Ключевые слова:* математическая модель, крутильная волна, тонкостенный стержень, депланация, крутильные колебания.

Среди многообразия изделий металлургической, машиностроительной, нефтедобывающей, других отраслей промышленности имеется широкая номенклатура протяженных объектов, длина которых превосходит поперечные размеры в сто и более раз. К таким объектам можно отнести прутковый прокат различного сечения, насосно-компрессорные, газовые и нефтяные трубы, железнодорожные рельсы, стальные тросы, проволоку, пружины и другую продукцию.

Для неразрушающего контроля протяженных объектов в России и за рубежом все чаще используются волноводные (wave guided) методы, то есть такие методы, которые основаны на использовании продольных, изгибных и крутильных нормальных волн [1, 2]. Напряженно-деформированное состояние (НДС) объекта и результат акустического воздействия на объект описываются полями одной природы. Ввиду того, что акустическое воздействие на НДС пренебрежимо мало, оценка техниче-

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 15-08-01836).

кого состояния металлоконструкций акустическим методом является наиболее достоверной. Использование при волноводном контроле продольной стержневой моды волны Похгаммера в области минимальной дисперсии скорости (для прутков) и нулевой крутильной волны (для труб) позволяет «прозвучивать» достаточно протяженные объекты – длиной в несколько сотен метров, что обеспечивает высокую чувствительность к дефектам по всему сечению объекта.

Недостаточное количество работ по исследованию закономерностей распространения нормальных волн в протяженных объектах, их взаимодействия с дефектами, отсутствие научно обоснованных технических решений по разработке эффективных высокочувствительных преобразователей и обоснованию новых информативных параметров является одной из причин, сдерживающих создание и внедрение надежных и эффективных методов бесконтактного акустического контроля линейно-протяженных объектов.

Целью настоящей статьи является изучение нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении интенсивных крутильных волн в тонкостенном упругом стержне. В результате проведенного анализа показано, что наличие нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсии (обусловленной деформацией) в стержне приводит к появлению несинусоидальных стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения формы.

В работе [3] предложена математическая модель крутильных колебаний стержня, включающая в себя геометрическую и физическую нелинейности, а также деформацию, то есть выход поперечного сечения в процессе деформации стержня из первоначального плоского состояния:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{I_x + I_g}{I_g} c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta - \frac{4\alpha_1}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  – угол поворота поперечного сечения,  $\rho$  – плотность материала,  $I_\omega$  – секториальный момент инерции,  $I_r$  – полярный момент инерции,  $I_x$  – крутящий момент инерции,  $I_g = I_x / (\psi - 1)$ ,  $\psi$  – геометрический параметр (см. [4]),  $c_s = \sqrt{GI_x / (\rho I_r)}$  – скорость распространения крутильных волн в стержне,  $c_\tau = \sqrt{G/\rho}$  – скорость распространения сдвиговых волн,  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольных волн в стержне,  $E$  – модуль Юнга,  $G = E / (2(1 + \nu))$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Третье слагаемое в уравнении (1) появилось из-за наличия деформации, приводящей к возникновению дисперсии фазовой скорости крутильной волны [5, 6]; четвертое слагаемое появилось в уравнении из-за наличия нелинейности.

Коэффициент  $\alpha_1$  характеризует геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то  $\alpha_1 > 0$ , если физически нелинейным, то  $\alpha_1 < 0$ .

Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (1), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает

перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, пластинах и оболочках содержится в работе [7].

Решение уравнения (1) будем искать в виде:  $\theta(x, t) = \theta(\xi)$ , где  $\xi = x - Vt$ ,  $V$  – скорость стационарной волны (заранее неизвестна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня  $\Theta = d\theta/d\xi$  уравнение в частных производных (1) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению (уравнение Дуффинга):

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\Theta^3 = 0, \quad (2)$$

где

$$m_1 = \frac{(V^2 - c_s^2)c_\tau^2 I_g}{I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g)c_\tau^2](V^2 - c_0^2)}, \quad (3)$$

$$m_2 = \frac{-4\alpha_1 c_\tau^2 I_g}{\rho I_r I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g)c_\tau^2](V^2 - c_0^2)}.$$

Для входящих в (3) скоростей линейных возмущений справедливо следующее неравенство:

$$c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{I_x + I_g}{I_g}} > c_\tau > c_s. \quad (4)$$

Если стержень обладает геометрической нелинейностью ( $\alpha_1 > 0$ ), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей  $V < c_s$ . Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости  $V$  имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (2) имеет различные решения. Типы фазовых портретов уравнения (2) в зависимости от скорости стационарной волны приведены на рис. 1.

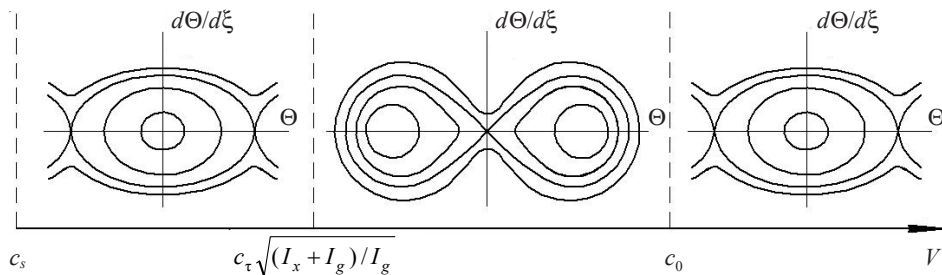


Рис. 1

Если скорость стационарной волны  $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$  или  $V > c_0$ , то уравнение Дуффинга (2) имеет два типа финитных решений – периодическое и уединенное.

Периодическое решение выражается через эллиптический синус:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{sn}(k\xi, s), \quad (5)$$

где  $A$  – амплитуда стационарной волны,  $k = \sqrt{(2m_1 + m_2 A^2)/2}$  – нелинейный аналог волнового числа,  $s^2 = -m_2 A^2 / (2m_1 + m_2 A^2)$  – квадрат модуля эллиптической функции, изменяющийся в интервале  $0 \leq s^2 \leq 1$ .

Параметры крутильной стационарной волны связаны соотношением:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2) \rho I_r s^2}{2\alpha_1 (1 + s^2)}}. \quad (6)$$

Следовательно, амплитуда волны растет прямо пропорционально с ростом ее скорости, а угол наклона кривых (6) возрастает при увеличении  $s$  от нуля до единицы.

Уединенная волна, являющаяся предельным случаем периодических волн (5), описывается выражением:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{th}(\xi/\Delta). \quad (7)$$

Ее скорость  $V$ , амплитуда  $A$  и ширина  $\Delta$  связаны соотношениями:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2) \rho I_r}{4\alpha_1}}, \quad (8)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{2I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_\tau^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_\tau^2 I_g}}. \quad (9)$$

Амплитуда уединенной волны увеличивается с ростом скорости, но ее график лежит выше соответствующей зависимости (6) для периодической волны.

Ширина уединенной волны (9) при  $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$  уменьшается пропорционально  $1/V$ . При скоростях  $V > c_0$  проявляется аномальное поведение уединенной волны, которое выражается в увеличении ее ширины ( $\Delta \sim V$ ) с ростом скорости и амплитуды.

Для скоростей, лежащих в интервале  $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$ , фазовый портрет уравнения (2) содержит два устойчивых положения равновесия, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу (см. рис. 1). В этом случае имеются три типа финитных решений.

Одним из решений уравнения Дуффинга является уединенная стационарная волна

$$\Theta = A \operatorname{ch}^{-1}(\xi/\Delta), \quad (10)$$

связывающая между собой два класса периодических волн. На фазовой плоскости это решение соответствует сепаратрисе, проходящей через начало координат и отделяющей одну область периодических решений от другой.

Скорость  $V$ , амплитуда  $A$  и ширина  $\Delta$  уединенной волны связаны соотношениями:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2) \rho I_r}{2\alpha_1}}, \quad (11)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{I_\omega[V^2 - ((I_x + I_g)/I_g)c_\tau^2](c_0^2 - V^2)}{(V^2 - c_s^2)c_\tau^2 I_g}}. \quad (12)$$

Видно, что в этом диапазоне  $A \sim V$ , а  $\Delta \sim \sqrt{1 - V^2/c_0^2}$ .

Движение по замкнутым траекториям вблизи положения равновесия описывается эллиптической функцией дельта-амплитуды:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{dn}(k\xi, s), \quad (13)$$

где  $A$  – амплитуда стационарной волны,  $k = \sqrt{m_2 A^2 / 2}$  – нелинейный аналог волнового числа,  $s = \sqrt{2(1 + m_1/(m_2 A^2))}$  – модуль эллиптической функции.

Параметры волны связаны соотношением:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{1}{2 - s^2}}, \quad (14)$$

то есть  $A \sim V$ , но амплитуда периодической волны при любом  $s$  меньше амплитуды уединенной волны (11).

Другой тип периодических движений описывается эллиптическим косинусом:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{cn}(k\xi, s), \quad (15)$$

где  $A$  – амплитуда стационарной волны,  $k = \sqrt{m_1 + m_2 A^2}$  – нелинейный аналог волнового числа,  $s = \sqrt{m_2 A^2 / (2(m_1 + m_2 A^2))}$  – модуль эллиптической функции, изменяющийся в интервале  $0,5 < s \leq 1$ .

Для таких волн связь между параметрами  $A$ ,  $V$ ,  $s$  имеет вид:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{2s^2 - 1}}. \quad (16)$$

Амплитуда таких периодических волн всегда больше амплитуды уединенной волны (11).

Для стержня, обладающего физической нелинейностью ( $\alpha_1 < 0$ ), на рис. 2 приведены типы фазовых портретов уравнения Дуффинга в зависимости от скорости стационарной волны.

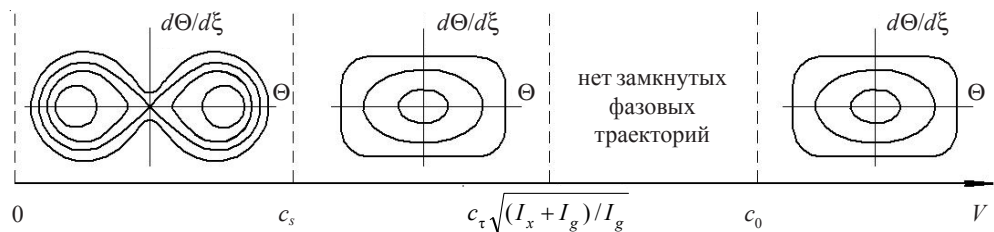


Рис. 2

В диапазоне скоростей  $V < c_s$  фазовый портрет уравнения (2) содержит два устойчивых положения равновесия типа «центр», а точка  $(0, 0)$  является «седлом». В этом случае имеется три типа финитных решений, двум из которых отвечают периодические волны (13), (15), а третьему – уединенная волна (10).

Скорость, амплитуда и ширина уединенной волны связаны соотношениями (11),

(12). Параметры периодической волны (13) связаны между собой соотношением (14), а параметры периодической волны (15) – соотношением (16).

Если скорость стационарной волны  $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$  или  $V > c_0$ , то уравнение Дуффинга (2) имеет только один тип финитного решения, отвечающего периодической волне. Такое решение выражается через эллиптический конус:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{cn}(k\xi, s), \quad (17)$$

где  $k = \sqrt{m_1 + m_2 A^2}$ ,  $s = \sqrt{m_2 A^2 / (2(m_1 + m_2 A^2))}$ .

Квадрат модуля эллиптической функции изменяется в интервале  $0 \leq s^2 \leq 0,5$ . При  $s^2 \rightarrow 0$  волна (17) близка к гармонической, а при  $s^2 \rightarrow 0,5$  ее профиль трансформируется в пилообразный. Связь между амплитудой, скоростью такой волны и модулем эллиптической функции определяется соотношением

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2) \rho I_r}{-2\alpha_1} \frac{s^2}{1 - 2s^2}}. \quad (18)$$

В диапазоне  $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$  уравнение (2) не имеет замкнутых фазовых траекторий, следовательно, в этом интервале скоростей нелинейных стационарных волн не существует.

#### Список литературы

1. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. *Неразрушающий контроль: Справочник*. В 7 т. / Под ред. В.В. Клюева. Т. 3: Ультразвуковой контроль. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
2. XI<sup>th</sup> European Conference on Non-Destructive Testing. October 6–10, 2014, Prague, Czech Republic. Conference Proceedings // The e-Journal of Nondestructive Testing. 2014. Vol. 19. No 12. <http://www.ndt.net>.
3. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. *Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и деформации* // Приволжский научный журнал. 2014. № 2. С. 14–17.
4. Сливкер В.И. *Строительная механика. Вариационные основы*. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
5. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. *Введение в акустическую динамику машин*. М.: Наука, 1979. 296 с.
6. *Вибрации в технике: Справочник*. В 6 т. Т. 1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
7. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. *Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор)* // Акустический журнал. 2002. Т. 48, №6. С. 725–740.

#### References

1. Ermolov I.N., Lange Yu.V. *Nerazrushayushchiy kontrol': Spravochnik*. V 7 t. / Pod red. V.V. Klyueva. T. 3: Ul'trazvukovoy kontrol'. M.: Mashinostroenie, 2004. 864 s.
2. XI<sup>th</sup> European Conference on Non-Destructive Testing. October 6–10, 2014, Prague, Czech Republic. Conference Proceedings // The e-Journal of Nondestructive Testing. 2014. Vol. 19. No 12. <http://www.ndt.net>.
3. Erofeev V.I., Lampsii B.B. *Matematicheskaya model' uprugogo tonkostennogo sterzhnya, sovershayushchego krutil'nye kolebaniya pri nalichii nelineynosti i deplanatsii* // Privolzhskiy nauchnyy zhurnal. 2014. № 2. S. 14–17.
4. Slivker V.I. *Stroitel'naya mekhanika. Variatsionnye osnovy*. M.: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2005. 736 s.

5. Artobolevskiy I.I., Bobrovnikskiy Yu.I., Genkin M.D. *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin*. M.: Nauka, 1979. 296 s.

6. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik*. V 6 t. T. 1 / Pod red. V.V. Bolotina. M.: Mashinostroenie, 1999. 504 s.

7. Erofeev V.I., Klyueva N.V. *Solitony i nelineynye periodicheskie volny deformatsii v sterzhnyakh, plastinakh i obolochkakh (obzor)* // Akusticheskiy zhurnal. 2002. T. 48, №6. S. 725–740.

**THE EFFECT OF THE ELASTIC NONLINEARITY AND WARPING  
ON THE PARAMETERS OF THE TORSIONAL WAVE PROPAGATING  
IN THE THIN-WALLED ROD**

**Erofeev V.I.<sup>1,2</sup>, Lamps B.B.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>3</sup>*Nizhni Novgorod State University of Architecture and Construction,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

A mathematical model describing the propagation of torsional wave in the rod, including geometric and material elastic nonlinearity and deplanation, i.e. the output of the cross-section, in the deformation process of the rod, from the initial flat. In contrast to most well-known models is the relation between the twist angle of the rod and measure delenatii not postulated, and is in the process of solving the problem. Determined that the presence of delenatii entails the dispersion of the phase velocity of torsional wave. It is shown that the simultaneous presence of nonlinearity and dispersion leads to the formation of non-sinusoidal standing waves in a beam propagating with constant speed without changing shape.

*Keywords:* mathematical model, torsional wave, thin-wall bar, warping, twisting vibrations.