

УДК 539.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ЗАТУПЛЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ, ДВИЖУЩИХСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО С ВРАЩЕНИЕМ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ\*

© 2015 г.

**Баничук Н.В., Иванова С.Ю.**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Российская Федерация*

banichuk@ipmnet.ru

*Поступила в редакцию 08.10.2015*

С использованием геометрических и физических предположений рассмотрено поступательное движение с вращением вокруг оси симметрии жесткого осесимметричного тела в упругопластической среде. На основе определяющих соотношений, связывающих нормальные и касательные напряжения на поверхности тела с его поступательной и вращательной скоростями движения, получены выражения для внешних воздействий и система дифференциальных уравнений динамики. Определены баллистические предельные скорости пробития упругопластической плиты вращающимся осесимметричным затупленным телом в предположении, что толщина плиты много больше миделя ударника и его длины. Сформулирована и решена задача оптимизации формы жесткого ударника, минимизирующей величину баллистической предельной скорости при ограничениях на массу ударника и величину угловой скорости вращения в момент удара.

*Ключевые слова:* высокоскоростное внедрение, проникание с вращением, осесимметричные ударники, оптимизация формы.

### **Введение**

Процессы внедрения жестких тел в деформируемые среды интенсивно изучаются в настоящее время (см., например, монографии [1–3]) с применением теоретических и экспериментальных методов исследования быстропотекающих процессов. Соответствующие модели поступательного высокоскоростного движения, описывающие сопротивление среды, предлагались в ряде работ [4–7]. При этом рассматривались как двучленные, так и трехчленные выражения для сил сопротивления. Двучленная формула [1] содержит независимую от скорости составляющую, характеризующую квазистатическое (прочностное) сопротивление, и квадратично зависящий от скорости член, описывающий динамическое сопротивление (гидро-

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №14-08-00016а), Программой фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН №11 и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2954.2014.1).

динамический напор). Трехчленные представления, содержащие также и линейный относительно скорости член, описывающий влияние сил трения, действующих на поверхности контакта ударника со средой, использовались для решения конкретных задач в [8–11]. Некоторые вопросы моделирования и качественного анализа поступательного движения с вращением в упругопластической среде исследовались в [12] для случая удлиненных цилиндрических ударников. Различные обобщения проблемы высокоскоростного движения в деформируемых упругопластических средах были рассмотрены в [13–15] применительно к моделированию динамики неосесимметричных тел. Особое внимание в современных исследованиях отводится задачам оптимизации формы внедряющихся жестких тел [16–18] и структуры неоднородных слоистых защитных пластин. При отыскании очертаний движущихся прямолинейно и поступательно ударников, внедряющихся в упругопластическую среду на максимальную глубину, было показано, что оптимальные формы характеризуются небольшим усечением носовой части.

В настоящей статье рассматриваются осесимметричные жесткие тела произвольной формы, совершающие вращение вокруг оси симметрии и поступательное движение в упругопластической среде. Определены силы и моменты, прикладываемые к телу со стороны деформируемой среды, и выведена система дифференциальных уравнений движения. Разработан метод определения баллистической предельной скорости пробивания плит (толстых пластин), основанный на использовании выведенных уравнений динамики, асимптотического анализа и численного моделирования. Сформулирована и решена задача минимизации величины предельной баллистической скорости, при этом найдены оптимальные формы ударников. Для численного определения форм применялся вариант генетического алгоритма, обеспечивающего построение глобально оптимального решения.

### Определяющие геометрические и физические соотношения

Рассматривается поступательное движение с вращением вокруг оси симметрии жесткого осесимметричного затупленного тела (ударника) длиной  $l$  в упругопластической среде. Форма поверхности тела (рис. 1) задается выражением  $y = y(x)$  ( $0 \leq x \leq l$ ,  $y(0) = r$ ,  $y(l) = R$ ), определяющим очертание меридиана. Здесь  $y$  – текущий радиус поверхности тела;  $r \geq 0$ ,  $R > 0$  – положительные параметры рассматриваемой формы.

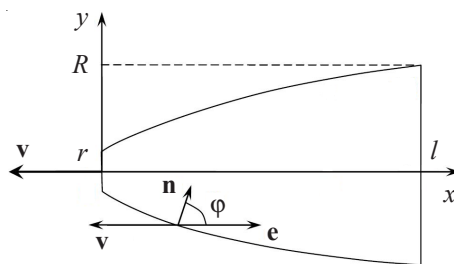


Рис. 1

Вектор продольной скорости движения ударника обозначается через  $\mathbf{v}$ , а вектор угловой скорости вращения вокруг оси симметрии тела – через  $\boldsymbol{\omega}$  ( $v = |\mathbf{v}|$ ,  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ ). Единичные векторы (орты)  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_p$ ,  $\mathbf{n}$  рассматриваемой прямоугольной системы координат ориентированы вдоль меридиана, параллели и нормали к поверхности тела,

а через  $\mathbf{v}_m$ ,  $\mathbf{v}_p$  и  $\mathbf{v}_n$  обозначены соответствующие компоненты вектора скорости, причем  $v_m = |\mathbf{v}_m|$ ,  $v_p = |\mathbf{v}_p|$ ,  $v_n = |\mathbf{v}_n|$  и

$$\mathbf{v}_m = v \sin \varphi \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{v}_p = \omega y \mathbf{e}_p, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_n = v(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}) = v \cos \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_p = v \sin \varphi \mathbf{e}_m + \omega y \mathbf{e}_p, \quad (3)$$

$$v_s = \sqrt{v_m^2 + v_p^2} = \sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 y^2}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_x$  – единичный вектор, параллельный оси тела;  $\mathbf{v}_s$  – вектор скорости, лежащий в плоскости, касательной к поверхности тела (на рис. 2: 1 – меридиан, 2 – параллель);  $y_x = dy/dx$ ;  $\varphi$  – угол между единичными векторами  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{n}$ , а два вектора, записанные через запятую в круглых скобках, означают их скалярное произведение.

Компоненты вектора  $\boldsymbol{\tau}_s$  касательного напряжения, действующие на поверхности тела в меридиональном направлении и вдоль параллели, обозначаются соответственно через  $\boldsymbol{\tau}_m$  и  $\boldsymbol{\tau}_p$  (рис. 3). При этом  $\tau_m = |\boldsymbol{\tau}_m|$ ,  $\tau_p = |\boldsymbol{\tau}_p|$  и

$$\boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_p, \quad (\boldsymbol{\tau}_m, \mathbf{e}_p) = 0, \quad (\boldsymbol{\tau}_p, \mathbf{e}_p) = \tau_p, \quad (5)$$

$$(\sigma(v_n) \mathbf{n}, \mathbf{e}_p) = (\sigma(v_n) \mathbf{n}, \mathbf{e}_m) = 0, \quad (6)$$

$$(\boldsymbol{\tau}_m, \mathbf{e}_x) = \tau_m \sin \varphi, \quad (\boldsymbol{\tau}_p, \mathbf{e}_x) = 0. \quad (7)$$

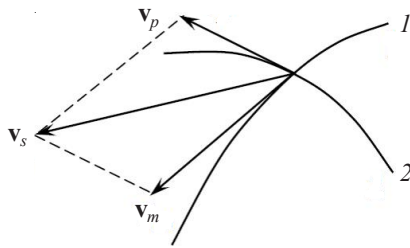


Рис. 2

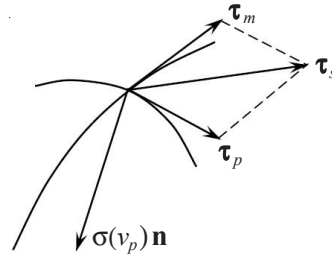


Рис. 3

Предполагается, что внешнее воздействие на движущееся поступательно с вращением тело определяется прикладываемыми со стороны среды нормальным давлением на поверхность тела  $\sigma(v_n) \mathbf{n}$  и касательным напряжением  $\boldsymbol{\tau}_s$ . Действующие нормальное и касательное напряжения и скорости точек поверхности тела связаны следующими соотношениями [1, 6]:

$$\sigma(v_n) = a_0 + a_2 v_n^2 = a_0 + a_2 v^2 \frac{y_x^2}{1 + y_x^2}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \frac{\tau_d}{|\mathbf{v}_s|} (\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_p) = \frac{\tau_d}{v_s} (v \sin \varphi \mathbf{e}_m + \omega y \mathbf{e}_p), \quad (9)$$

где  $a_0 > 0$  и  $a_2 > 0$  – заданные материальные постоянные применяемого двучленного выражения, характеризующие статическое и динамическое сопротивление среды;

$\tau_d > 0$  – заданная постоянная используемой модели (динамический предел текучести среды [12]).

### Внешние воздействия и уравнения динамики движущегося поступательно с вращением затупленного осесимметричного тела

Сила сопротивления  $d\mathbf{F}$ , прикладываемая к кольцевому элементу  $dS$  боковой поверхности движущегося тела, определяется выражением

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dS[\sigma(v_n)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_s] = dS[\sigma(v_n)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_p], \\ dS &= 2\pi y\sqrt{1+y_x^2}dx, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (10)$$

Для компоненты силы сопротивления  $(dF)_{\text{lat}}$ , действующей на элемент  $dS$  в направлении оси  $x$ , с учетом соотношений (5)–(8) и (10) будем иметь:

$$(dF)_{\text{lat}} = (\mathbf{e}_x, d\mathbf{F}) = 2\pi dx \left[ a_0 y y_x + \frac{a_2 y y_x^3}{1+y_x^2} v^2 + \frac{y v \tau_d}{\sqrt{v^2 + y^2(1+y_x^2)\omega^2}} \right]. \quad (11)$$

Применяя к (11) интегрирование по переменной  $x$  на отрезке  $[0, l]$ , приходим к выражению для компоненты  $D_{\text{lat}}$  силы сопротивления, обусловленной взаимодействием с боковой поверхностью тела, в виде

$$D_{\text{lat}} = \pi a_0 (R^2 - r^2) + 2\pi a_2 v^2 \int_0^l \frac{y y_x^3}{1+y_x^2} dx + \Phi(v, \omega, y), \quad (12)$$

$$\Phi(v, \omega, y) = 2\pi \tau_d v \int_0^l \frac{y}{\sqrt{v^2 + y^2(1+y_x^2)\omega^2}} dx. \quad (13)$$

Учитывая компоненту силы сопротивления  $D_{\text{nose}} = \pi r^2(a_0 + a_2 v^2)$ , обусловленную контактом с затупленной (носовой) частью поверхности ударника, приходим к следующему выражению для полной силы сопротивления:

$$\begin{aligned} D &= D_{\text{nose}} + D_{\text{lat}} = B_0(y) + v^2 B_2(y) + \Phi(v, \omega, y), \\ B_0 &= \pi a_0 R^2, \quad B_2 = \pi a_2 \left( r^2 + 2 \int_0^l \frac{y y_x^3}{1+y_x^2} dx \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Момент  $L_x$  сил сопротивления вращательному движению вокруг оси  $x$  также представим в виде суммы двух слагаемых:  $(L_x)_{\text{lat}}$  и  $(L_x)_{\text{nose}}$ . Момент сил сопротивления вращению  $(L_x)_{\text{lat}}$ , создаваемый боковой поверхностью ударника, определяется выражением

$$\begin{aligned} (L_x)_{\text{lat}} &= \int_0^l y (dF)_p = \Psi(v, \omega, y), \quad \Psi = 2\pi \tau_d \omega \int_0^l \frac{y^3(1+y_x^2)}{\sqrt{v^2 + y^2(1+y_x^2)\omega^2}} dx, \\ (dF)_p &= (\mathbf{e}_p, \boldsymbol{\tau}_p) dS = \frac{2\pi \tau_d}{v_s} \omega y^2 \sqrt{1+y_x^2} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение для полного момента сил сопротивления вращению вокруг оси  $x$  с учетом момента  $(L_x)_{\text{nose}} = 2\pi \tau_d r^3/3$ , обусловленного наличием плоской носовой части поверхности ударника, имеет вид

$$L_x = (L_x)_{\text{nose}} + (L_x)_{\text{lat}} = \frac{2\pi}{3} \tau_d r^3 + \Psi(v, \omega, y). \quad (16)$$

Таким образом, система уравнений динамики проникающего в сплошную упругопластическую среду осесимметричного затупленного тела с учетом вращения записывается в виде:

$$m \frac{dv}{dt} = -D = -B_0 - B_2 v^2 - \Phi, \quad (17)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -L_x = -\frac{2\pi}{3} \tau_d r^3 - \Psi, \quad (18)$$

$$m = \pi \rho \int_0^l y^2 dx, \quad I = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^l y^4 dx,$$

где  $t$  – время,  $m$  – масса ударника,  $I$  – его момент инерции относительно оси  $x$ ,  $\rho$  – плотность материала внедряющегося тела.

Переходя к безразмерным переменным и новым параметрам

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{l}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{ct}{l}, \quad c^2 = \frac{\tau_d}{\rho}, \\ \tilde{v} = \frac{v}{c}, \quad \tilde{\omega} = \frac{l\omega}{c}, \quad A_0 = \frac{a_0}{\tau_d}, \quad A_2 = \frac{a_2}{\rho}, \end{aligned} \quad (19)$$

запишем уравнения динамики ударника в безразмерной форме (тильды далее опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = - \left( \int_0^1 y^2 dx \right)^{-1} \left[ A_0 R^2 + A_2 v^2 \left( r^2 + 2 \int_0^1 \frac{y y_x^3}{1 + y_x^2} dx \right) + \right. \\ \left. + 2v \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{v^2 + y^2} (1 + y_x^2) \omega^2} dx \right] = -P_1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -2 \left( \int_0^1 y^4 dx \right)^{-1} \left[ \frac{r^3}{3} + \omega \int_0^1 \frac{y^3 (1 + y_x^2)}{\sqrt{v^2 + y^2} (1 + y_x^2) \omega^2} dx \right] = -P_2. \quad (21)$$

### Пробивание плиты из упругопластического материала жестким ударником и определение баллистической предельной скорости

С использованием безразмерных переменных и параметров (19) рассматривается нормальное проникание ударника (под углом  $\pi/2$ ) вдоль оси  $\zeta$ , где  $\zeta$  – безразмерная переменная координата носика ударника (обезразмеренная на его длину  $l$ ), в плиту толщиной  $\zeta_f$  (рис. 4). Предполагается, что имеет место пробивание плиты ударником, в результате чего ударник полностью выходит из нее и останавливается, то есть  $0 \leq \zeta \leq \zeta_f + 1$ . Будем считать, что толщина плиты много больше миделя ударника и его длины и влиянием свободных поверхностей плиты на стадиях входа и выхода из нее ударника можно пренебречь.

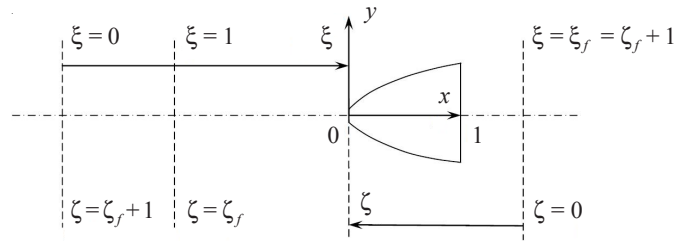


Рис. 4

Скорость  $v|_{\zeta=0} = v_{\text{imp}}$  соударения тела с плитой, при которой

$$v(\zeta) > 0, \quad \zeta \in [0, \zeta_f + 1); \quad v|_{\zeta=\zeta_f+1} = 0, \quad (22)$$

называется баллистической предельной скоростью. Она характеризует сопротивление плиты пробиванию и обозначается в дальнейшем через  $v_{\text{BLV}}$ , то есть

$$v|_{\zeta=0} = v_{\text{imp}} = v_{\text{BLV}}. \quad (23)$$

Для определения этой характеристики защитных свойств плиты введем новую систему координат с переменной  $\xi$  (см. рис. 4):

$$\xi = \zeta_f + 1 - \zeta, \quad d\xi = -d\zeta, \quad (24)$$

в которой  $v|_{\xi=0} = 0$ ,  $\omega|_{\xi=0} = \omega_f$ .

Задача Коши для системы двух дифференциальных уравнений во введенной безразмерной системе переменных формулируется в виде:

$$v \frac{dv}{d\xi} = P_1(v, \omega, y), \quad v \frac{d\omega}{d\xi} = P_2(v, \omega, y), \quad (25)$$

$$v|_{\xi=0} = 0, \quad \omega|_{\xi=0} = \omega_f, \quad (26)$$

позволяющем эффективно находить значения  $v_{\text{BLV}}$  при заданной нулевой начальной скорости поступательного движения и при различных значениях скорости вращения  $\omega_f \geq 0$ , рассматриваемой в качестве дополнительного параметра задачи.

Система дифференциальных уравнений (25) является существенно нелинейной, и поэтому для отыскания ее решений применяется численное интегрирование. Следует отметить сингулярность поведения решений системы уравнений (25) с начальными условиями (26), так как

$$v|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad \left. \frac{d\omega}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad (27)$$

поэтому на отрезке изменения переменной  $0 \leq \xi \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – достаточно малая положительная величина ( $0 < \varepsilon = 1$ ), применяется асимптотический анализ решений, а на отрезке  $\varepsilon \leq \xi \leq \zeta_f + 1$  выполняется численное интегрирование системы уравнений (25) с новыми начальными условиями

$$v|_{\xi=\varepsilon} = v(\varepsilon), \quad \omega|_{\xi=\varepsilon} = \omega(\varepsilon), \quad (28)$$

где  $v(\varepsilon)$  и  $\omega(\varepsilon)$  – некоторые аналитические выражения, получаемые в результате асимптотического анализа. Условия (28) выражают требование непрерывности разыскиваемых решений при  $\xi = \varepsilon$ . Рассмотрим асимптотическое поведение перемен-

ных в уравнениях (25) с начальными условиями (26) на участке  $0 \leq \xi \leq \varepsilon$ , полагая малыми значения  $v(\xi)$ . Выполняя интегрирование получающихся при этом асимптотических уравнений

$$\frac{dv^2}{d\xi} = 2A_0R^2 \left( \int_0^1 y^2 dx \right)^{-1}, \quad \frac{d\omega}{d\xi} = 4 \left( \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y_x^2} dx + \frac{r^3}{3} \right) \left( v(\xi) \int_0^1 y^4 dx \right)^{-1} \quad (29)$$

и находя постоянные интегрирования с помощью условий (26), получим

$$v(\xi) = C_1 \sqrt{\xi}, \quad \omega(\xi) = C_2 \sqrt{\xi} + \omega_f, \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon. \quad (30)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  асимптотического представления в (30) зависят от формы ударника  $y(x)$  и безразмерной материальной постоянной  $A_0$  и определяются следующими выражениями:

$$C_1 = \left( \frac{2A_0R^2}{\int_0^1 y^2 dx} \right)^{1/2}, \quad C_2 = \frac{8 \left( \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y_x^2} dx + r^3/3 \right)}{C_1 \int_0^1 y^4 dx}. \quad (31)$$

Используя асимптотические представления функций  $v(\xi)$ ,  $\omega(\xi)$ , согласно (30), (31), и условия их непрерывности в точке  $\xi = \varepsilon$ , приходим к начальным условиям (28), в которых

$$v(\varepsilon) = C_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad \omega(\varepsilon) = C_2 \sqrt{\varepsilon} + \omega_f. \quad (32)$$

Фиксируя значения основных параметров и выполняя численное интегрирование по  $\xi$  на отрезке  $[\varepsilon, \zeta_f + 1]$  системы дифференциальных уравнений (25) с начальными условиями (28), (32), получим искомые зависимости  $v(\xi)$ ,  $\omega(\xi)$  при  $\xi \in [\varepsilon, \zeta_f + 1]$  и значение баллистической предельной скорости  $v_{BLV} = v|_{\xi=\zeta_f+1}$  совместно с представлением решений (30), (31) на отрезке  $0 \leq \xi \leq \varepsilon$ .

### Оптимизация формы ударника

Проникание в упругопластическую среду и, в частности, процессы пробивания упругопластических плит зависят от механических (прочностных и инерционных) свойств среды и от свойств внедряющихся тел, включая их геометрические характеристики (форму, длину, мидель и т.д.), плотность, массу, момент инерции. В дальнейшем будем полагать заданными плотность ударника  $\rho$ , его длину  $l$  и, переходя к безразмерной форме, обозначим через  $\tilde{m} = m/(\pi\rho l^3)$  и  $\tilde{I} = 2I/(\pi\rho l^5)$  соответственно безразмерную массу и безразмерный момент инерции ударника. С учетом введенных ранее обозначений (19) будем рассматривать значения массы и момента инерции (тильды далее опускаем)

$$m(y) = \int_0^1 y^2 dx, \quad I(y) = \int_0^1 y^4 dx \quad (33)$$

в качестве величин, зависящих от рассматриваемых очертаний формы ударника. Будем также считать заданными такие безразмерные параметры, как мидель ударника  $R$ , толщину плиты  $\zeta_f$ , постоянные материала  $A_0$ ,  $A_2$  и значение угловой скорости вращения ударника на выходе из плиты  $\omega_f$ .

Формулируемая задача оптимизации формы ударника заключается в отыскании функции  $y_{\text{opt}}(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), при которой достигается минимум функционала

$$v_{BLV} \rightarrow \min_y \quad (34)$$

при ограничениях, наложенных на массу ударника

$$m(y) = \int_0^1 y^2 dx \leq m_* \quad (35)$$

и угловую скорость ударника  $\omega_{imp}$  на входе в плиту при  $\xi = \zeta_f + 1$

$$\omega_{imp}(y) \leq \omega_*, \quad (36)$$

где  $m_* > 0$ ,  $\omega_* > 0$  – заданные положительные величины. Для решения оптимизационной задачи (34)–(36) применим подход, основанный на минимизации расширенного функционала

$$J = v_{BLV} + \lambda(m - m_*) + \mu(\omega_{imp} - \omega_*) \rightarrow \min_y, \quad (37)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } m - m_* \leq 0, \\ \lambda_*, & \text{если } m - m_* > 0, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_{imp} - \omega_* \leq 0, \\ \mu_*, & \text{если } \omega_{imp} - \omega_* > 0, \end{cases}$$

где  $\lambda_* > 0$ ,  $\mu_* > 0$  – положительные штрафные множители.

Решение задачи минимизации функционала  $J$  при различных значениях параметров  $m_*$ ,  $\omega_*$  выполнялось при помощи эволюционного численного метода, основанного на генетическом алгоритме [19]. При этом исследуемое множество форм (популяция) состояло из 30 решений (индивидуумов) для каждой генерации (поколения). Процесс поиска оптимальной формы стартовал (инициировался) с начальной популяцией, составленной из произвольных распределений  $y(x)$  с заданным фиксированным миделем, продолжался на протяжении последовательного формирования 1000 улучшаемых генераций и завершался выбором наилучшего решения после 10 повторных инициализаций. Шаг разбиения отрезка  $[0, 1]$  изменения переменной  $x$  и отрезка  $[0, \zeta_f + 1]$  изменения переменной  $\xi$  был выбран равным величине  $\epsilon = 0,05$ . Таким образом, каждый индивидуум популяции состоял из 20 элементов.

Результаты расчетов представлены для следующих значений безразмерных параметров задачи:  $A_0 = 1$ ,  $A_2 = 0,2$ ,  $\zeta_f = 5$ ,  $\omega_f = 1$ ,  $m_* = 0,03$ ,  $\lambda_* = 1000$ ,  $\mu_* = 1$ ,  $R = y(1) = 0,2$ . На рис. 5 представлены оптимальные распределения форм ударников  $y_{opt}(x)$ , имеющих загупленную носовую часть. Тонкой линией показана форма для случая, когда  $\omega_* = 70$ , а жирной линией – для более высокой угловой скорости внедрения  $\omega_* = 90$ .

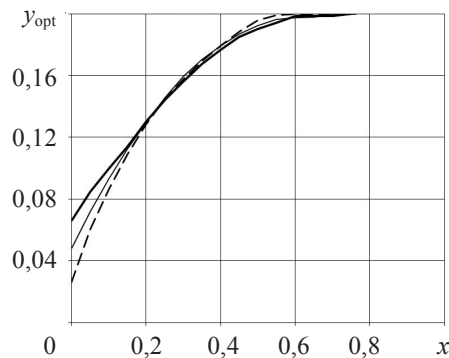


Рис. 5



Для этих распределений на рис. 6 и 7 соответственно представлены зависимости  $v_{opt}(\zeta)$  и  $\omega_{opt}(\zeta)$  поступательной и вращательной угловой скоростей от координаты  $\zeta$ . Жирные кривые соответствуют варианту  $\omega_* = 90$ , а тонкие –  $\omega_* = 70$ . Штриховыми линиями на рис. 5 и 6 показаны кривые для случая проникания без вращения  $\omega_* = 0$ .

Из приведенных графиков видно, что чем быстрее вращение подлетающего к преграде тела, тем меньшая поступательная скорость потребуется ему для пробивания этой преграды.

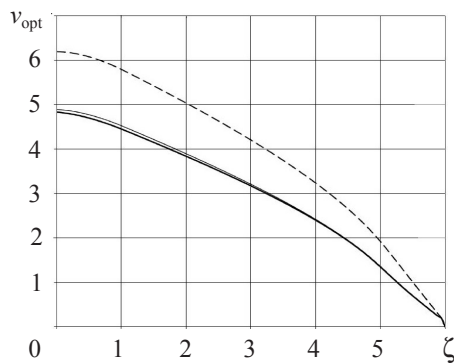


Рис. 6

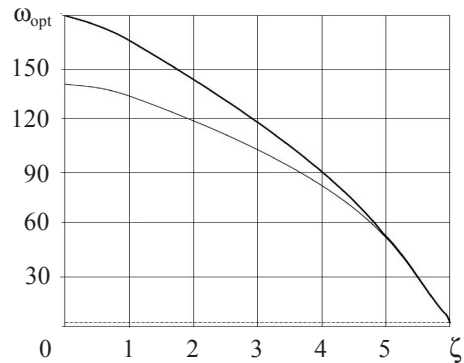


Рис. 7

Зависимость величины функционала  $J$  от номера генерации  $n_{gen}$ , характеризующая сходимость вычислительного процесса, представлена на рис. 8 (жирная кривая для  $\omega_* = 90$ , тонкая – для  $\omega_* = 70$  и штриховая – для  $\omega_* = 0$ ).

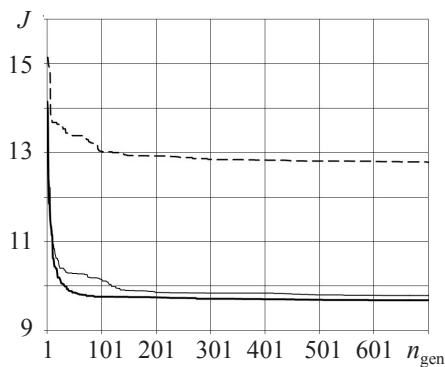


Рис. 8

### Некоторые замечания и выводы

Выведены уравнения динамики осесимметричного ударника,двигающегося поступательно с вращением в упругопластической среде. Уравнения получены как в форме, описывающей процесс проникания во времени, так и в форме, определяющей зависимости скоростей от пространственной координаты, что удобно для решения задач пробивания. Заметим, что уравнения представлены в безразмерном общем виде для затупленных осесимметричных тел с произвольным очертанием меридиана и произвольным распределением массовых и инерционных характери-

стик. Такое представление позволило эффективно решать задачи оптимизации формы ударников, исходя из требования минимизации баллистической предельной скорости пробивания плиты с учетом совместного поступательного и вращательного движений. При этом предполагалось, что мидель ударника и его длина много меньше толщины пробиваемой плиты, и особенности прохождения участков входа и выхода из нее, связанные с влиянием свободных поверхностей, здесь не рассматривались. Приведены результаты расчетов, выполненных с помощью численного метода нелокальной оптимизации (генетического алгоритма). Было отмечено, что оптимальная форма ударника имеет усеченную носовую часть и практически не зависит от частоты вращения в рассмотренном диапазоне, а также установлено, что чем быстрее вращение подлетающего к преграде тела, тем меньшая поступательная скорость требуется ему для пробивания этой преграды.

#### Список литературы

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied high-speed penetration dynamics*. Dordrecht, The Netherland: Springer, 2006. 357 p.
2. Бивин Ю. *Проникание, пробивание, рикошет*. Saarbrücken: Lap Lambert, 2012. 235 p.
3. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Математическое моделирование нестационарных процессов удара и внедрения осесимметричных тел и задачи идентификации свойств среды*. М.: Физматгиз, 2014. 208 с.
4. Poncelet J.V. Rapport sur un Memoire de MM Piobert et Morin, concernant les experiences faites a Metz en 1834, sur la penetration des projectiles dans divers milieux resistants et sur la rupture de corps par le choc, 1835. *Mem. Acad. Sci.* Paris. 1838. T. 15. P. 55–91.
5. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1982. №5. С. 181–185.
6. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. *Int. J. Solids Struct.* 1997. Vol. 34, No 31–32. P. 4127–4146.
7. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. О напряженном состоянии оболочек, проникающих в твердую деформируемую среду. *Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. конф.* Тула: Тул. ГУ, 2014. С. 115–122.
8. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 47–58.
9. Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M. On body shapes providing maximum depth of penetration. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 38, No 3. P. 491–498.
10. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-speed penetration modeling and shape optimization of the projectile penetrating into concrete shields. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2009. Vol. 37, No 4. P. 538–549.
11. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Рагнедда Ф., Серра М. О форме движущейся в деформируемой среде осесимметричной жесткой оболочки, обладающей минимальной массой и наименьшей силой сопротивления. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 36–44.
12. Симонов И.В. О качественных особенностях движения осесимметричного твердого тела с вращением в упругопластической среде. *Докл. РАН*. 2006. Т. 411, №4. С. 480–484.
13. Остапенко Н.А., Романенко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы трехмерных тел, проникающих в плотные среды. *Прикладная механика и механическая физика*. 1994. Т. 4. С. 515–521.
14. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. Форма тонких трехмерных тел, проникающих на максимальную глубину в плотные среды. *Прикладная математика и механика*. 1999. Т. 63. С. 953–967.
15. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. О проникании неосесимметричных тел в твердую деформируемую среду и оптимизация их формы. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. №4. С. 176–183.

16. Аптуков В.Н. Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1985. №3. С. 149–152.

17. Алехин В.В., Уржумцев Ю.С. *Оптимизация слоистых систем*. Якутск: Изд-во ЯФ СО РАН, 2002. 177 с.

18. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Makeev E.V. Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 124–133.

19. Goldberg D.E. *Genetic algorithm in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA. 1989.

#### References

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied high-speed penetration dynamics*. Dordrecht, The Netherland: Springer, 2006. 357 p.

2. Bivin Yu. *Pronikanie, probivanie, rikoshet*. Saarbrücken: Lap Lambert, 2012. 235 p.

3. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udara i vnedreniya osesimmetrichnykh tel i zadachi identifikatsii svoystv sredy*. M.: Fizmatgiz, 2014. 208 s.

4. Poncelet J.V. Rapport sur un Memoire de MM Piobert et Morin, concernant les experiences faites a Metz en 1834, sur la penetration des projectiles dans divers milieux resistants et sur la rupture de corps par le choc, 1835. *Mem. Acad. Sci. Paris*. 1838. T. 15. P. 55–91.

5. Bivin Yu.K., Kolesnikov V.A., Flitman L.M. Opredelenie mekhanicheskikh svoystv sredy metodom dinamicheskogo vnedreniya. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1982. №5. S. 181–185.

6. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. *Int. J. Solids Struct.* 1997. Vol. 34, No 31–32. P. 4127–4146.

7. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V. O napryazhenom sostoyanii obolochek, pronikayushchikh v tverduyu deformiruemyuyu sredu. *Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Mater. konf.* Tula: Tul. GU, 2014. S. 115–122.

8. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimizatsiya formy zhestkogo tela, vnedryayushchegosya v sploshnyuyu sredu. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2007. Vyp. 69. S. 47–58.

9. Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M. On body shapes providing maximum depth of penetration. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 38, No 3. P. 491–498.

10. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-speed penetration modeling and shape optimization of the projectile penetrating into concrete shields. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2009. Vol. 37, No 4. P. 538–549.

11. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Ragnedda F., Serra M. O forme dvizhushchegosya v deformiruemyuyu sredu osesimmetrichnoy zhestkoy obolochki, obladayushchey minimal'noy massoy i naimen'shey siloy soprotivleniya. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2011. Vyp. 73. S. 36–44.

12. Simonov I.V. O kachestvennykh osobennostyakh dvizheniya osesimmetrichnogo tverdogo tela s vrashcheniem v uprugoplasticheskoy sredy. *Dokl. RAN*. 2006. T. 411, №4. S. 480–484.

13. Ostapenko N.A., Romanenko V.I., Yakunina G.E. Optimal'nye formy trekhmernykh tel, pronikayushchikh v plotnye sredy. *Prikladnaya mekhanika i mekhnicheskaya fizika*. 1994. T. 4. P. 515–521.

14. Ostapenko N.A., Yakunina G.E. Forma tonkikh trekhmernykh tel, pronikayushchikh na maksimal'nyuyu glubinu v plotnye sredy. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1999. T. 63. S. 953–967.

15. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V. O pronikanii neosesimmetrichnykh tel v tverduyu deformiruemyuyu sredu i optimizatsiya ikh formy. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2008. №4. S. 176–183.

16. Aptukov V.N. Optimal'naya struktura neodnorodnoy plastiny s nepreryvnyim raspredeleniem svoystv po tolshchine. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1985. №3. S. 149–152.

17. Alekhin V.V., Urzhumtsev Yu.S. *Optimizatsiya sloistykh sistem*. Yakutsk: Izd-vo YaF SO RAN, 2002. 177 с.

18. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V. Pronikanie zhestkikh udarnikov v sloistye

plastiny i nekotorye zadachi global'noy mnogotselevoy strukturnoy optimizatsii. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2012. Vyp. 74. S. 124–133.

19. Goldberg D.E. *Genetic algorithm in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA. 1989.

## **SHAPE OPTIMIZATION OF TRUNCATED AXISYMMETRIC BODIES MOVING TRANSLATIONALLY WITH ROTATION IN ELASTIC-PLASTIC MEDIA**

**Banichuk N.V., Ivanova S.Yu.**

*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

The translational motion of a rigid axisymmetric body into an elastic-plastic medium with rotation about the symmetry axis is considered under some geometrical and physical suggestions. The expressions for external forces and the system of dynamic differential equations were derived on the basis of the defining relations between the normal and tangential stresses on the body surface and its translational and rotational moving velocities. The ballistic limit velocities for the perforation of an elastic-plastic slab by the rotating truncated axisymmetric body were defined under the suggestion that the slab thickness is much greater than the impactor midel and its length. The rigid impactor shape optimization was formulated and solved for minimization of the ballistic limit velocity under the constraints on the impactor mass and the rotation velocity value in the moment of impact.

*Keywords:* high-speed penetration, penetration with rotation, axisymmetric impactors, shape optimization.