

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИИ*

© 2017 г. **Давыдов С.А.¹, Земсков А.В.^{1,2}, Тарлаковский Д.В.^{1,2}**

¹Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Российская Федерация

²НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

azemskov1975@mail.ru

Поступила в редакцию 10.01.2017

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния термоупругой однокомпонентной среды с учетом наличия диффузионных потоков. Влияние диффузионных процессов на напряженно-деформированное состояние среды учитывается с помощью локально-равновесной модели термоупругой диффузии, включающей в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнения тепло- и массопереноса. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения по собственным функциям в виде сверток функций Грина с граничными условиями. Выполнен тестовый расчет. Предложенный алгоритм без изменений может быть использован при решении любой линейной нестационарной задачи термомеханической диффузии, в случае если граничные условия представляют собой линейные комбинации четных производных перемещений и нечетных производных температуры и концентрации по пространственной переменной, и с некоторыми модификациями для нечетных производных перемещений и четных производных температуры и концентрации.

Ключевые слова: термоупругая диффузия, интегральные преобразования, ряды Фурье, функции Грина.

Введение

При исследовании нестационарных процессов в сплошных средах зачастую требуется учет различных взаимодействующих между собой полей: механических, тепловых и диффузионных. Наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникают деформации и теплоперенос, которые, оказывая взаимное влияние друг на друга, влияют и на величину диффузионного потока. Кроме того, взаимное влияние оказывают друг на друга и другие поля, проявляющиеся в виде электромагнитных волн, нагрева проводников, пьезоэффекта и обратного пьезоэффекта, термоэлектрических эффектов (явления Зеебека, Пельтье, Томпсона) и электрострикции, магнитоупругих эффектов и магнитоэлектричества, электродиффузии и т.д. Наиболее общие

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00663 А).

постановки таких задач в рамках геометрически линейной локально-равновесной теории термомехано-диффузии приведены в [1–8].

В статье рассматривается одномерная нестационарная задача для термомехано-диффузии, а также предлагается метод ее решения, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа, рядов Фурье (в задаче для слоя) или синус-, косинус-преобразования Фурье (в задаче для полупространства). Достоинством метода является то, что трансформанты Лапласа являются рациональными функциями, что позволяет эффективно использовать вычеты для нахождения их оригиналов.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная одномерная нестационарная задача термоупругости для однородной среды с учетом массопереноса. Связанная система уравнений движения, тепло- и массопереноса в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид (штрих означает производную по пространственной координате, точка – производную по времени) [1–5]:

$$u'' = \ddot{u} + b\vartheta' + \alpha\eta', \quad \kappa\vartheta'' = \dot{\vartheta} + B\dot{u}' - \beta\dot{\eta}, \quad D\eta'' = \dot{\eta} + \Lambda u''' - M\vartheta''. \quad (1)$$

В качестве области решения задачи рассматривается слой и полупространство. Будем полагать, что на границах слоя заданы перемещения, теплообмен и диффузионные потоки:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = f_{11}(\tau), \quad u|_{x=1} = f_{12}(\tau), \quad \vartheta'|_{x=0} = f_{21}(\tau), \quad \vartheta'|_{x=1} = f_{22}(\tau), \\ (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=0} = f_{31}(\tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=1} = f_{32}(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия полагаются нулевыми:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0, \quad \vartheta|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

В (1)–(3) все величины являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами (при одинаковом начертании они обозначены символом *) имеет вид:

$$\begin{aligned} x = \frac{x_3}{L}, \quad u = \frac{u_3}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{n_0}, \quad c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{n_0\alpha^*}{\lambda + 2\mu}, \\ \beta = \frac{n_0 R \ln(\gamma n_0)}{c_{en}}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{c_{en} L c}, \quad b = \frac{b^* T_0}{\lambda + 2\mu}, \quad B = \frac{b^*}{c_{en}}, \quad M = \frac{D^* \ln(\gamma n_0)}{cL}, \\ D = \frac{D^*}{cL}, \quad \Lambda = \frac{\alpha^* D^*}{RT_0 cL}, \quad f_{1l}(\tau) = \frac{f_{1l}^*(t)}{L}, \quad f_{2l}(\tau) = \frac{L f_{2l}^*(t)}{T_0}, \quad f_{3l}(\tau) = \frac{f_{3l}^*(t)}{n_0 c}, \end{aligned}$$

где t – время; x_3 – декартова координата, направленная вглубь среды; u_3 – перемещение; L – характерный размер (в случае слоя – его толщина); $\eta^* = n - n_0$ – приращение концентрации; n и n_0 – текущая и начальная концентрации вещества; λ и μ – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; b^* – температурная постоянная; α^* – коэффициент, характеризующий объемное расширение среды за счет диффузии; D^* – коэффициент самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; $\vartheta^* = T - T_0$ – приращение температуры; T и T_0 – текущая и начальная температуры среды; κ^* – коэффициент теплопроводности; γ – коэффициент активации (для твердых растворов $\gamma = 1$); c_{en} – удельная объемная теплоемкость при постоянной концентрации и деформации.

Замечание 1. Для полупространства условие на границе $x = 1$ заменяется на условие ограниченности решения при $x \rightarrow \infty$ [6].

2. Алгоритм решения начально-краевой задачи

Рассмотрим алгоритм решения задачи (1)–(3). Пусть G_{qkl} ($q, k = \overline{1, 3}; l = 1, 2$) – функции Грина задачи (1)–(3). Они являются решениями задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} G_{1kl}|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta_{1l} \delta(\tau), & G_{1kl}|_{x=1} &= \delta_{1k} \delta_{2l} \delta(\tau), \\ G'_{2kl}|_{x=0} &= \delta_{2k} \delta_{1l} \delta(\tau), & (\Lambda G''_{1kl} - DG'_{3kl} - MG'_{2kl})|_{x=0} &= \delta_{3k} \delta_{1l} \delta(\tau), \\ G'_{2kl}|_{x=1} &= \delta_{2k} \delta_{2l} \delta(\tau), & (\Lambda G''_{1kl} - DG'_{3kl} - MG'_{2kl})|_{x=1} &= \delta_{3k} \delta_{2l} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, δ_{jk} – символ Кронекера. Тогда решение (1)–(3) представляется в виде (звездочка обозначает свертку по времени):

$$u = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{1kl} * f_{kl}, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{2kl} * f_{kl}, \quad \eta = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{3kl} * f_{kl}. \quad (5)$$

Отметим, что из (1), (2) и (4) с использованием замены пространственной переменной $y = 1 - x$ можно получить следующую связь функций Грина:

$$G_{1k2}(x, \tau) = G_{1k1}(1 - x, \tau), \quad G_{pk2}(x, \tau) = -G_{pk1}(1 - x, \tau) \quad (p = 2, 3).$$

Таким образом, для определения искоемых величин u , ϑ и η достаточно найти только функции G_{qk1} . Поэтому далее будем рассматривать задачу (1)–(3) при $f_{12} = f_{22} = f_{32} \equiv 0$.

Замечание 2. Ввиду вышеизложенного, последний индекс в записи функций Грина опустим, полагая $G_{qk} \equiv G_{qk1}$. В этом случае формулы (5) примут вид:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{k=1}^3 [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{1k}(1 - x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \vartheta(x, \tau) &= \sum_{k=1}^3 [G_{2k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{2k}(1 - x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \eta(x, \tau) &= \sum_{k=1}^3 [G_{3k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{3k}(1 - x, \tau) * f_{k2}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Применим теперь к (1)–(3) преобразование Лапласа по времени и представим решение в виде рядов по собственным функциям [1, 7, 8]. Получаем систему линейных алгебраических уравнений (s – параметр преобразования Лапласа, индекс L означает трансформанту Лапласа, n – номер гармоники ряда Фурье):

– при $n = 0$

$$s\vartheta_0^L - \beta s\eta_0^L = Bs f_{11}^L - \kappa f_{21}^L, \quad s\eta_0^L = f_{31}^L, \quad (7)$$

– при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} k_1 n u_n^L - b \lambda_n \vartheta_n^L - \alpha \lambda_n \eta_n^L &= 2 \lambda_n f_{11}^L, \\ Bs \lambda_n u_n^L + k_2 n \vartheta_n^L - \beta s \eta_n^L &= 2(Bs f_{11}^L - \kappa f_{21}^L), \\ \Lambda \lambda_n^3 u_n^L - M \lambda_n^2 \vartheta_n^L - k_3 n \eta_n^L &= 2(\Lambda \lambda_n^2 f_{11}^L - f_{31}^L), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\lambda_n = \pi n, \quad k_{1n} = s^2 + \lambda_n^2, \quad k_{2n} = s + \kappa \lambda_n^2, \quad k_{3n} = s + D \lambda_n^2,$$

$$u^L = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^L \sin \lambda_n x, \quad \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{g}^L \\ \eta^L \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{g}_n^L \\ \eta_n^L \end{matrix} \right\} \cos \lambda_n x. \quad (9)$$

Решая (7), (8), получаем вид искомым функций в пространстве преобразования Лапласа:

$$u^L = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{k1}^L \sin \lambda_n x, \quad \eta^L = \frac{f_{31}^L}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{3k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{k1}^L \cos \lambda_n x,$$

$$\mathfrak{g}^L = B f_{11}^L + \frac{-\kappa f_{21}^L + \beta f_{31}^L}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{2k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{k1}^L \cos \lambda_n x. \quad (10)$$

Здесь

$$P(\lambda_n, s) = k_{1n} k_{2n} k_{3n} - (b\beta\Lambda + \alpha BM)\lambda_n^4 s + \beta Ms \lambda_n^2 k_{1n} - \lambda_n^4 \alpha \Lambda k_{2n} + Bbs \lambda_n^2 k_{3n},$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n [(k_{2n} k_{3n} + \beta M \lambda_n^2 s) - (b\beta\Lambda + \alpha BM)\lambda_n^2 s - \lambda_n^2 \alpha \Lambda k_{2n} + Bbs k_{3n}],$$

$$P_{12}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n \kappa (\alpha M \lambda_n^2 - b k_{3n}), \quad P_{13}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n (b\beta s + \alpha k_{2n}),$$

$$P_{21}(\lambda_n, s) = 2[Bs^4 + (BD - \beta\Lambda)\lambda_n^2 s^3], \quad P_{22}(\lambda_n, s) = -2\kappa (k_{1n} k_{3n} - \alpha \Lambda \lambda_n^4),$$

$$P_{23}(\lambda_n, s) = 2s(\beta k_{1n} - \alpha B \lambda_n^2), \quad P_{31}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 s^2 (BMs + \Lambda k_{2n}),$$

$$P_{32}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n^2 (k_{1n} M \kappa - \Lambda \kappa b \lambda_n^2), \quad P_{33}(\lambda_n, s) = 2(k_{1n} k_{2n} + Bbs \lambda_n^2).$$

Из (9), (10) и (11) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_{21}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} = 2B.$$

Это означает, что соответствующий ряд в (10) сходится в обобщенном смысле к дельта-функции Дирака от пространственной переменной x . Представим последнюю дробь следующим образом:

$$\frac{P_{21}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} = \frac{2Bs^2}{\lambda_n^2 + s^2} + \frac{P_{21}^*(\lambda_n, s)}{P^*(\lambda_n, s)},$$

где

$$P^*(\lambda_n, s) = (\lambda_n^2 + s^2)P(\lambda_n, s),$$

$$P_{21}^*(\lambda_n, s) = P_{21}(\lambda_n, s)(\lambda_n^2 + s^2) - 2Bs^2 P(\lambda_n, s). \quad (12)$$

Тогда выражение для \mathfrak{g}^L с учетом равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{ch}((\pi - x)a)}{\operatorname{sh} \pi h}$$

примет вид [9]:

$$\mathfrak{g}^L = Bs \frac{\operatorname{ch}((1-x)s)}{\operatorname{sh} s} f_{11}^L + \frac{-\kappa f_{21}^L + \beta f_{31}^L}{s} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{21}^*(\lambda_n, s)}{P^*(\lambda_n, s)} f_{11}^L \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^3 \frac{P_{2k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{k1}^L \cos \lambda_n x. \quad (13)$$

Замечание 3. Решение в изображениях аналогичной задачи для полупространства запишется так:

$$\begin{aligned} u^L &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{P_{1k}(\omega, s)}{P(\omega, s)} f_{k1}^L \sin \omega x d\omega, \quad \eta^L = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{P_{3k}(\omega, s)}{P(\omega, s)} f_{k1}^L \cos \omega x d\omega, \\ \vartheta^L &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Bs^2}{\omega^2 + s^2} f_{11}^L \cos \omega x d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{21}^*(\omega, s)}{P^*(\omega, s)} f_{11}^L \cos \omega x d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^3 \int_0^{\infty} \frac{P_{2k}(\omega, s)}{P(\omega, s)} f_{k1}^L \cos \omega x d\omega, \end{aligned} \quad (14)$$

где ω – параметр синус-, косинус-преобразования Фурье.

3. Функции Грина

Сравнивая (10) с (6) и учитывая свойства преобразования Лапласа для свертки, находим изображения функций G_{qk} ($q = 1, 3$):

$$G_{1k}^L = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad G_{pk}^L = G_{pk0}^L(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{pkn}^L(s) \cos \lambda_n x \quad (p = 2, 3), \quad (15)$$

где

$$G_{220}^L(s) = -\frac{\kappa}{s}, \quad G_{230}^L(s) = \frac{\beta}{s}, \quad G_{330}^L(s) = \frac{1}{s}, \quad G_{qkn}^L(s) = \frac{P_{qk}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \quad (n \geq 1).$$

При этом для $G_{21}^L(s)$ с учетом (13) имеем:

$$G_{210}^L = Bs \frac{\operatorname{ch}((1-x)s)}{\operatorname{sh} s}, \quad G_{21n}^L(s) = \frac{P_{21}^*(\lambda_n, s)}{P^*(\lambda_n, s)} \quad (n \geq 1). \quad (16)$$

Функции $G_{qkn}^L(s)$ являются рациональными функциями параметра s . Пусть s_{1n} , s_{2n} – комплексно-сопряженные, а s_{3n} и s_{4n} – действительные корни многочлена $P(\lambda_n, s)$; $\xi_n = \operatorname{Re}(s_{1n}) < 0$, $\zeta_n = \operatorname{Im}(s_{1n})$, $s_{2n} = \bar{s}_{1n}$; $s_{3n}, s_{4n} < 0$ [7]. Тогда с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [10] находим оригиналы функций $G_{qk}^L(s)$ в формулах (15):

$$G_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \sin \lambda_n x, \quad G_{pk} = G_{pk0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2kn}(\tau) \cos \lambda_n x \quad (p = 2, 3); \quad (17)$$

$$G_{220}(\tau) = -\kappa H(\tau), \quad G_{230}(\tau) = \beta H(\tau), \quad G_{330}(\tau) = H(\tau);$$

$$\begin{aligned} G_{qkn}(\tau) &= \exp(\xi_n \tau) (A_{qkn1} \cos \zeta_n \tau - A_{qkn2} \sin \zeta_n \tau) + \\ &+ A_{qkn3} \exp(s_{3n} \tau) + A_{qkn4} \exp(s_{4n} \tau), \end{aligned} \quad (18)$$

где $H(\tau)$ – функция Хэвисайда, коэффициенты A_{qknl} находятся по формулам (штрих – производная по параметру s):

$$A_{qkn1} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{qk}(\lambda_n, s_{1n})}{P'(\lambda_n, s_{1n})}, \quad A_{qkn2} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{qk}(\lambda_n, s_{1n})}{P'(\lambda_n, s_{1n})},$$

$$A_{qknm} = \frac{P_{qk}(\lambda_n, s_{mn})}{P'(\lambda_n, s_{mn})} \quad (m = 3, 4). \quad (19)$$

Соответствующие гармоники функции $G_{21}^L(s)$ с учетом (16) определяются так [10]:

$$\begin{aligned} G_{210}(\tau - x) &= B\delta'(\tau - x) + B\sum_{n=1}^{\infty} [\delta'(\tau - 2n - x) + \delta'(\tau - 2n + x)]; \\ G_{21n}(\tau) &= \exp(\xi_n \tau) (A_{21n1} \cos \zeta_n \tau - A_{21n2} \sin \zeta_n \tau) + A_{21n3} \exp(s_{3n} \tau) + \\ &+ A_{21n4} \exp(s_{4n} \tau) + A_{21n5} \cos \lambda_n \tau - A_{21n6} \sin \lambda_n \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициенты A_{21nl} для $l = \overline{1, 6}$ также находятся по формулам типа (19) с учетом соотношений (12), (16).

Замечание 4. Оригиналы по Лапласу функций в (14) для полупространства будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\infty} G_{1k}(\omega, \tau) * f_{k1}(\tau) \sin \omega x d\omega, \quad \eta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\infty} G_{3k}(\omega, \tau) * f_{k1}(\tau) \cos \omega x d\omega, \\ \vartheta &= B\dot{\delta}(\tau - x) * f_{11}(\tau) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\infty} G_{2k}(\omega, \tau) * f_{k1}(\tau) \cos \omega x d\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где функции $G_{qk}(\omega, \tau)$ определяются по формулам типа (18) и (20) с учетом замены λ_n на ω .

Обращение синус- и косинус-преобразований Фурье в (21) осуществляется численно [6, 11].

4. Расчетный пример

Рассмотрим задачу для слоя со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0, \\ (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=0} &= \varepsilon H(\tau), \quad \varepsilon = 10^{-15}, \\ (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Среда – слой алюминия толщиной $L = 1$ мм при начальной температуре $T_0 = 600$ К. Ему соответствуют характеристики [12]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 5,55 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 2,61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \rho = 2652 \text{ кг/м}^3, \quad b^* = 6,56 \cdot 10^6 \text{ Н/(К} \cdot \text{м}^2), \\ \alpha^* &= 5 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль}, \quad D^* = 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}, \quad R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \quad \kappa^* = 233 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ c_{\varepsilon n} &= 1036,7 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad n_0 = 98295 \text{ моль/м}^3. \end{aligned}$$

Решение, полученное по формулам (17), (18) и (19), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \eta(\tau) = \varepsilon \left[\tau H(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{3n}(\tau) \cos \lambda_n x \right], \\ \vartheta(\tau) &= \varepsilon \left[\beta \tau H(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}(\tau) \cos \lambda_n x \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{qn}(\tau) &= G_{q3n}(\tau) * H(\tau) = \\
 &= \frac{\zeta_n A_{q3n1} - \xi_n A_{q3n2}}{\xi_n^2 + \zeta_n^2} \exp(\xi_n \tau) \sin \zeta_n \tau + \frac{\zeta_n A_{q3n2} + \xi_n A_{q3n1}}{\xi_n^2 + \zeta_n^2} (\exp(\xi_n \tau) \cos \zeta_n \tau - 1) - \\
 &\quad - \frac{1}{s_{3n}} A_{q3n3} (1 - \exp(s_{3n} \tau)) - \frac{1}{s_{4n}} A_{q3n4} (1 - \exp(s_{4n} \tau)).
 \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

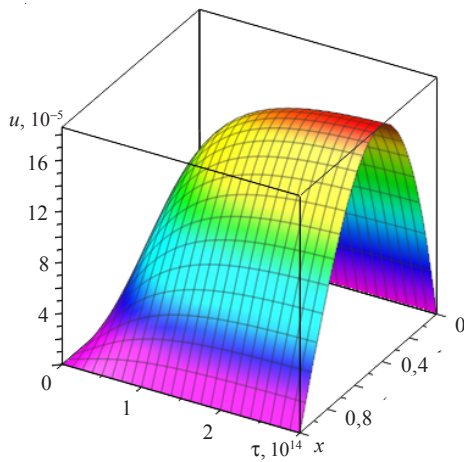


Рис. 1. Зависимость перемещения u от времени τ и глубины слоя x

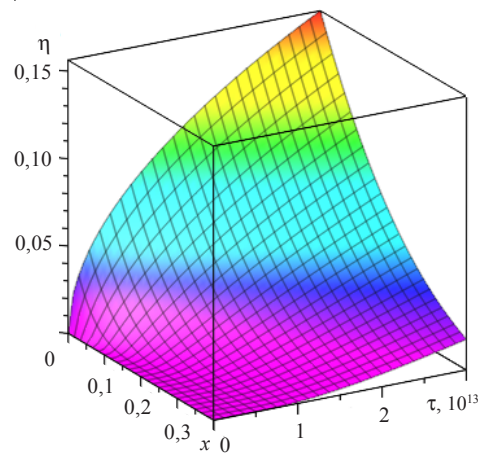


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации η от времени τ и глубины слоя x

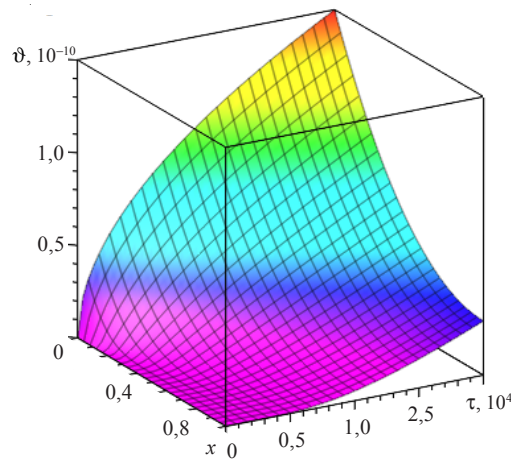


Рис. 3. Зависимость приращения температуры ϑ от времени τ и глубины слоя x

Заключение

Предложенный алгоритм без изменений может быть использован при решении любой линейной нестационарной задачи термомеханодиффузии при условии, что граничные условия представляют собой линейные комбинации четных производных перемещений и нечетных производных температуры и концентрации по про-

пространственной переменной x . Сами функции при этом понимаются как производные нулевого, то есть четного порядка. Если же граничные условия являются линейными комбинациями нечетных производных перемещений и четных производных температуры и концентрации по пространственной переменной x , как, например,

$$\begin{aligned} (u' - \alpha\eta - b\vartheta)|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & (u' - \alpha\eta - b\vartheta)|_{x=1} &= f_{12}(\tau), \\ \vartheta|_{x=0} &= f_{21}(\tau), & \vartheta|_{x=1} &= f_{22}(\tau), & \eta|_{x=0} &= f_{31}(\tau), & \eta|_{x=1} &= f_{32}(\tau), \end{aligned}$$

то решение следует искать в виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos \lambda_n x, \quad \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \eta \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \vartheta_n \\ \eta_n \end{Bmatrix} \sin \lambda_n x.$$

В остальном алгоритм решения будет полностью идентичен изложенному.

Список литературы

1. Давыдов С.А., Земсков А.В. Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомеханоdiffузии для слоя. *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции*. В 2 т. (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.). Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. Т. 1. С. 170–175.
2. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией. *Физическая мезомеханика*. 2011. Т. 14. №6. С. 35–51.
3. Кондрат В.Ф., Грицина О.Р. Співвідношення градієнтної термомеханіки за врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. №1. С. 91–100.
4. Kumar R., Chawla V. A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*. 2014. Vol. 7. No 7. P. 68–78.
5. Подстригач Я.С., Павлина В.С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в компонентном твердом растворе. *Физико-химическая механика материалов*. 1965. Т. 4. С. 383–389.
6. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2014. Т. 156. Кн. 1. С. 70–79.
7. Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя. *Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. С. 52–59.
8. Гойхбург Д.М., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений. *Вестник Московского авиационного института*. 2013. Т. 20. №2. С. 226–237.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. Т. 1. *Элементарные функции*. М.: Наука, 1981. 797 с.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа, 1965. 586 с.
11. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений. *Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества*. 2014. №2. С. 31–38.
12. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. *Физические величины: Справочник*. Под ред. И.С. Григорьева, И.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

References

1. Davydov S.A., Zemskov A.V. Analiz osobennostey v reshenii nestatsionarnoy zadachi termomekhanodiffuzii dlya sloya [Analysis of the features in the solution of the nonstationary problem for thermomechanical diffusion layer]. *Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: Trudy XVIII Mezhdunarodnoy konferentsii [Contemporary Problems of Continuum Mechanics. Proceedings of the XVIII International Conference]*. Rostov-on-Don. 7–10.11.2016. 2016. Vol. 1. P. 170–175 (In Russian).
2. Knyazeva A.G. Nelineynye modeli deformiruemykh sred s diffuziyei [Nonlinear diffusion models of deformed media]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]*. 2011. Vol. 14. No 6. P. 35–51 (In Russian).
3. Kondrat V.F., Gritsina O.R. Spivvidnoshennya gradientnoi termomekhaniki za vrakhuvannya neoborotnosti ta inertsynosti lokal'nogo zmishchennya masi [Relations of gradient thermomechanics taking into account theirreversibility and inertia of local displacement of mass]. *Matematichni metody ta fiziko-mekhanichni polya [Journal of Mathematical Sciences]*. 2011. Vol. 54. No 1. P. 91–100 (In Ukrainian).
4. Kumar R., Chawla V. A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*. 2014. Vol. 7. No 7. P. 68–78.
5. Podstrigach Ia.S., Pavlina V.S. Differentsial'nye uravneniya termodinamicheskikh protsessov v komponentnom tverdom rastvore [Differential equations of the thermodynamic processes in the component solid solution]. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov [Materials Science]*. 1965. Vol. 4. P. 383–389 (In Russian).
6. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Uprugoe poluprostranstvo pod deystviem odnomernykh nestatsionarnykh diffuzionnykh vozmushcheniy [The elastic half-space under the action of the one-dimensional non-stationary diffusion disturbances]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskii nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2014. Vol. 156. No 1. P. 70–79 (In Russian).
7. Gachkevich A.R., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Odnomernaya zadacha o nestatsionarnoy svyazannoy uprugoy diffuzii dlya sloya [The one-dimensional problem of unsteady-related elastic diffusion layer]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika [The journal Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics]*. 2013. Vol. 13. No 4. Iss. 1. P. 52–59 (In Russian).
8. Goikhburg D.M., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Dvukhkomponentnyy uprugo diffuzionnyy sloi pod deystviem odnomernykh nestatsionarnykh vozmushcheniy [Two-component elastic diffusion layer under the action of the one-dimensional non-stationary disturbances]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Bulletin of Moscow Aviation Institute]*. 2013. Vol. 20. No 2. P. 226–237 (In Russian).
9. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Tom 1. Elementarnyye funktsii [Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions]*. Moscow. Nauka Publ. 1981. 797 p. (In Russian).
10. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook of operational calculus]*. Moscow. Vyschaia shkola Publ. 1965. 586 p. (In Russian).
11. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Dvukhkomponentnoe uprugo diffuzionnoe poluprostranstvo pod deystviem nestatsionarnykh vozmushcheniy [Two-component diffusion elastic half-space under the action of non-stationary disturbances]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo Ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation]*. 2014. No 2. P. 31–38 (In Russian).
12. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskii A.M. et al. *Fizicheskie velichiny. Spravochnik [Physical Quantities. A Handbook]*. Edited by Grigoriev I.S., Meilikhov I.Z. Moscow. Energoatomizdat Publ. 1991. 1232 p. (In Russian).

SURFACE GREEN'S FUNCTION IN NON-STATIONARY PROBLEMS OF THERMOMECHANICAL DIFFUSION

Davydov S.A.¹, Zemskov A.V.^{1,2}, Tarlakovskii D.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation*

²*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

The problem of determining the stress-strain state of a thermal-elastic one-component medium, accounting for the presence of diffusion flows, is considered. The effect of diffusion processes is accounted for using a local equilibrium model of thermal elastic diffusion, which includes a coupled system of equations of motion of elastic body and an equation of mass- and heat-transfer. A solution is sought using the Laplace transform and eigenfunction decomposition in the form of convolutions of Green functions with boundary conditions. A test example is calculated. The present algorithm can be applied to analyzing any nonstationary problem of thermal-mechanical diffusion on condition that the boundary conditions are in the form of linear combinations of even derivatives of displacements and odd derivatives of temperature and concentration over the spatial variable, or, with some modifications, for odd displacement derivatives and even derivatives of temperature and concentration.

Keywords: thermoelastic diffusion, integral transforms, Fourier series, Green's functions.