

УДК 534.1

## ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ВИБРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

© 2017 г. Метрикин В.С.<sup>1</sup>, Стародубровская Н.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация

v.s.metrikin@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2017

Рассматривается динамика осциллятора, представляющего собой пару трущихся поверхностей, одна из которых движется с постоянной скоростью, а другая, прикрепленная к неподвижной опоре, находится на ней. Сила трения принята в виде суммы двух сил: сухого трения с коэффициентом трения относительного покоя в виде монотонно возрастающей функции от длительности времени относительного покоя трущихся тел и вязкого трения с постоянным коэффициентом трения (сила трения наследственного типа). Изучена структура фазового пространства в зависимости от величины коэффициента вязкого трения. Показано, что режимы с относительным покоем трущихся поверхностей возможны лишь при значениях коэффициента вязкого трения, принадлежащих определенному интервалу. Приведен аналитический вид функции последования, который позволяет определить неподвижные точки точечного отображения, соответствующие периодическим режимам движения тела, либо отыскать бифуркационные значения параметров возникновения хаоса.

*Ключевые слова:* математическая модель, трение наследственного типа, функция последования, относительный покой, неподвижная точка, хаос.

### Введение

Известно, что в большинстве случаев силы трения играют чисто демпфирующую роль, благодаря чему происходит затухание свободных колебаний, уменьшаются амплитуды вынужденных колебаний, расширяются области устойчивости и т.д. Однако для целого ряда динамических систем эти силы выступают как дестабилизирующий фактор, то есть наличие в системе даже малых сил трения порождает неустойчивые состояния равновесия. Именно к таким системам можно отнести фрикционные автоколебательные системы (ФАС). Фрикционные автоколебания связаны с нестабильностью процесса трения при относительно малых скоростях скольжения и являются одним из наиболее распространенных видов механических автоколебаний. Об этом впервые было сказано в работе А.Ю. Ишлинского и

И.В. Крагельского [1], а затем в многочисленных исследованиях отечественных [2–6] и зарубежных исследователей [7–11]. В работах [3–5] учитывался фундаментальный факт, что причиной механических релаксационных колебаний трущихся поверхностей является упругость системы и увеличение силы трения с увеличением продолжительности времени относительного покоя трущихся поверхностей. Этому явлению было дано название «трение наследственного типа». Анализ ФАС с трением Кулона – Амонтона с наследствованием и без наследственности показал, что в последнем случае существуют только фрикционные автоколебания [12], тогда как наследственность силы сухого трения приводит к наличию в ФАС сколь угодно сложных периодических режимов движения со множеством периодов времени относительного покоя трущихся поверхностей, а также стохастических автоколебаний [3–5].

### 1. Уравнения движения

В настоящей статье рассматривается физическая модель, состоящая из тела массой  $m$ , прикрепленного пружиной с жесткостью  $k$  к неподвижной опоре, которая находится на шероховатой ленте, движущейся с постоянной скоростью  $V_0$  (рис. 1).

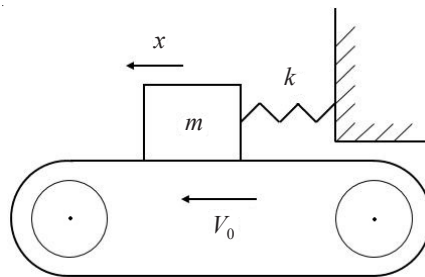


Рис. 1

Сила трения между телом и лентой – кусочно-гладкая функция относительной скорости  $\dot{x} - V_0$ , разрывная при  $\dot{x} = V_0$ . В качестве силы трения выбрана сумма сил сухого и вязкого трения. Математическую модель исследуемой системы можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -kx - f_* P \operatorname{sgn}(\dot{x} - V_0) + \alpha_1(\dot{x} - V_0), \quad \dot{x} \neq V_0, \quad (1)$$

$$k|x| \leq f(t_k)P, \quad \dot{x} = V_0, \quad (2)$$

где  $P$  – сила давления на контакт;  $f_*$ ,  $\alpha_1 > 0$  – коэффициенты трения скольжения;  $f(t_k)$  – коэффициент трения относительного покоя. В дальнейшем будем считать, что коэффициент трения скольжения  $f_*$  постоянен, а коэффициент трения относительного покоя  $f(t_k)$  является кусочно-линейной функцией времени  $t_k$  предшествующего интервала длительного контакта тела с лентой и записывается в виде

$$f(t_k) = \begin{cases} f_* + \frac{(f^* - f_*)t_k}{t^*}, & 0 < t_k < t^*, \\ f^*, & t_k \geq t^*, \end{cases} \quad (3)$$

качественный вид которого представлен на рис. 2.

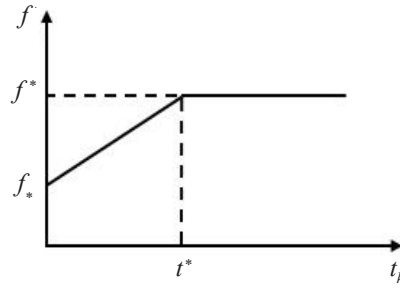


Рис. 2

Введем безразмерные время  $\tau = \varepsilon^* t / t^*$ , координату  $\xi = kx / (f_* P)$  и параметр  $\varepsilon^* = (f^* - f_*) / f_*$ , характеризующий форму коэффициента трения относительного покоя. Тогда выражения (1), (2) примут вид

$$\ddot{\xi} = -\xi - \text{sgn}(\dot{\xi} - \theta) + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta), \quad \dot{\xi} \neq \theta, \quad (4)$$

$$|\xi| \leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = \theta. \quad (5)$$

Здесь

$$\theta = \frac{V_0 \sqrt{mk}}{f_* P}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{mk}}, \quad \varepsilon(\tau_k) = \frac{f(t^* \tau_k / \varepsilon^*) - f_*}{f_*}.$$

Нетрудно видеть, что в силу (3) имеем

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \tau_k, & 0 < \tau_k < \varepsilon^*, \\ \varepsilon^*, & \tau_k \geq \varepsilon^*. \end{cases}$$

## 2. Качественное исследование структуры фазового пространства

Исследуем характер разбиения на траектории фазовой плоскости  $\xi, \dot{\xi}$  уравнения (4) при различных значениях параметра  $\tilde{\alpha}_1$ . Правая часть рассматриваемого уравнения разрывна на прямой  $\dot{\xi} = \theta$ . Из поведения траекторий вблизи указанной прямой следует, что прямая  $\dot{\xi} = \theta$  содержит отрезок скользящих движений  $|\xi| \leq 1, \dot{\xi} = \theta$ .

Уравнение (4) имеет единственное состояние равновесия  $A(1 - \tilde{\alpha}_1 \theta, 0)$ , являющееся неустойчивым фокусом при  $0 < \tilde{\alpha}_1 < 2$  и неустойчивым узлом при  $\tilde{\alpha}_1 \geq 2$ . При сколь угодно малых значениях параметра  $\tilde{\alpha}_1$  на фазовой плоскости существует устойчивый сшитый предельный цикл  $L$ , состоящий из дуги СВ и отрезка ВС скользящих движений (рис. 3).

С ростом  $\tilde{\alpha}_1$  полутраектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  сближаются (предельный цикл  $L$  расширяется) и при некотором  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1^*$  совпадают. При  $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_1^*$ , сколь угодно близких к  $\tilde{\alpha}_1^*$ , полутраектория  $\Gamma_1$  пересекает прямую  $\dot{\xi} = \theta$ ,  $\alpha$ -предельным множеством полутраектории  $\Gamma_3$  является состояние равновесия  $A$  (рис. 4).

При дальнейшем увеличении  $\tilde{\alpha}_1$  полутраектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_4$  сближаются и при некотором  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1^{**}$  совпадают. Сшитый предельный цикл  $L$  при этом не содержит отрезка скользящих движений. При  $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_1^{**}$ , сколь угодно близких к  $\tilde{\alpha}_1^{**}$ , полутраектория  $\Gamma_4$  имеет  $\alpha$ -предельным множеством состояние равновесия  $A$ , полутраектория  $\Gamma_1$  —  $\omega$ -предельным множеством сшитый предельный цикл  $L$  (рис. 5).

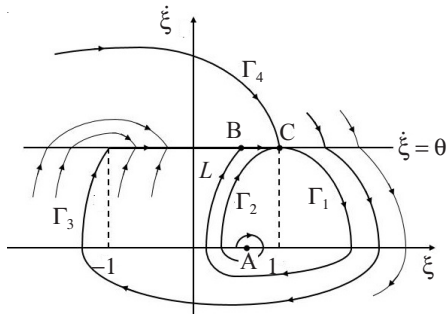


Рис. 3

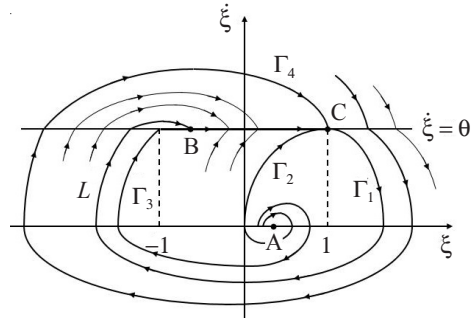


Рис. 4

Предельный цикл  $L$  при  $\tilde{\alpha}_1 \rightarrow \tilde{\alpha}_1^{***}$  уходит в бесконечность. Отметим, что  $\tilde{\alpha}_1^{***} < 2$ . При  $\tilde{\alpha}_1 \geq 2$  состояние равновесия  $A$  является неустойчивым узлом (рис. 6).

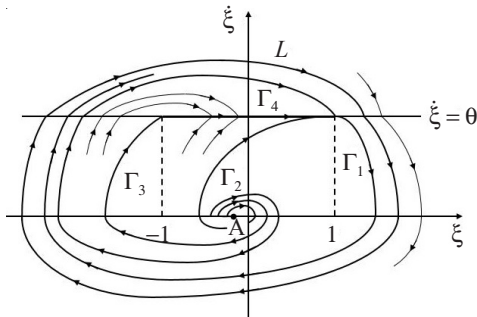


Рис. 5

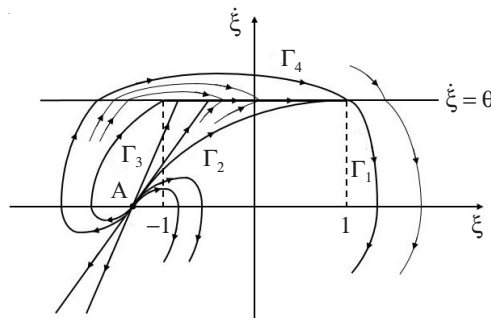


Рис. 6

### 3. Построение функции последования

В дальнейшем будем исследовать динамику системы (4), (5). Анализ поведения фазовых траекторий уравнения (4) при различных значениях параметра  $\tilde{\alpha}_1$  показывает, что конечное число последовательных интервалов проскальзывания с запаздыванием и опережением с последующим длительным контактом возможно лишь при  $0 < \tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_1^{**}$ . Далее будем считать, что  $0 < \tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_1^{**}$ .

Предположим, что при  $-\tau_k < \tau < 0$  тело находится в контакте с лентой, а при  $\tau = 0$  имеем  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_0 = 1 + \varepsilon(\tau_k)$ ,  $\dot{\xi} = \theta$ . При  $\tau > 0$  и вплоть до ближайшей относительной остановки в момент  $\tau = \tau_1$  движение тела происходит с отставанием от ленты ( $\dot{\xi} < \theta$ ). Решение уравнения (4) с начальными условиями  $\tau = 0$ ,  $\xi = \xi_0$ ,  $\dot{\xi} = \theta$  может быть записано в виде

$$\xi = 1 - \tilde{\alpha}_1 \theta + \exp(\tilde{\alpha}_1 \tau / 2) \left[ (\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau + \frac{2\theta - \tilde{\alpha}_1(\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau \right].$$

При этом для  $\dot{\xi}$  имеем

$$\dot{\xi} = \exp(\tilde{\alpha}_1 \tau / 2) \left[ \theta \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau + \frac{\tilde{\alpha}_1 \theta - 2(\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau \right].$$

Полагая в рассматриваемых выражениях  $\tau = \tau_1$ ,  $\xi(\tau_1) = \xi_1$ ,  $\dot{\xi} = \theta$ , получим следующие соотношения для определения значений  $\tau_1$  и  $\xi_1$ :

$$\exp(\tilde{\alpha}_1 \tau_1 / 2) \left[ \theta \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_1 + \frac{\tilde{\alpha}_1 \theta - 2(\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_1 \right] = \theta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = 1 - \tilde{\alpha}_1 \theta + \exp(\tilde{\alpha}_1 \tau_1 / 2) & \left[ (\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2\theta - \tilde{\alpha}_1(\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_1 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tau_1$  – наименьший из корней уравнения (6). Отметим, что значение  $\xi_1$  также удовлетворяет уравнению, получаемому из соотношений (6), (7) при исключении интервала времени  $\tau_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} & \left[ \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_1 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \right] + \\ & + \ln \frac{(\xi_1 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_1 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}}{(\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_0 - 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}} = 0. \end{aligned}$$

Мгновенное изменение направления проскальзывания в момент  $\tau = \tau_1$  произойдет, если  $\xi_1 < -1$  (в противном случае неизбежен последующий длительный контакт). Предположим, что  $\xi_1 < -1$ . При  $\tau_1 < \tau < \tau_1 + \tau_2$  (значение  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  соответствует точке  $\xi = \xi_2$ ,  $\dot{\xi} = \theta$ ) движение тела происходит с опережением ленты ( $\dot{\xi} > \theta$ ). Согласно (4) в силу начальных условий  $\tau = \tau_1$ ,  $\xi = \xi_1$ ,  $\dot{\xi} = \theta$  имеем

$$\begin{aligned} \xi = -1 - \tilde{\alpha}_1 \theta + \exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1(\tau - \tau_1)}{2}\right) & \left[ (\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} (\tau - \tau_1) + \right. \\ & \left. + \frac{2\theta - \tilde{\alpha}_1(\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} (\tau - \tau_1) \right], \\ \dot{\xi} = \exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1(\tau - \tau_1)}{2}\right) & \left[ \theta \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} (\tau - \tau_1) + \frac{\tilde{\alpha}_1 \theta - 2(\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} (\tau - \tau_1) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в рассматриваемые выражения  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ,  $\xi = \xi_2$ ,  $\dot{\xi} = \theta$ , получим следующие соотношения:

$$\exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1 \tau_2}{2}\right) \left[ \theta \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_2 + \frac{\tilde{\alpha}_1 \theta - 2(\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_2 \right] = \theta, \quad (8)$$

$$\xi_2 = -1 - \tilde{\alpha}_1 \theta + \exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1 \tau_2}{2}\right) \left[ (\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_2 + \frac{2\theta - \tilde{\alpha}_1 (\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_2 \right]. \quad (9)$$

Здесь  $\tau_2$  – наименьший из корней уравнения (8). Исключая из соотношений (8), (9) промежуток времени  $\tau_2$ , можно получить уравнение, которому также удовлетворяет значение  $\xi_2$ :

$$\frac{\tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_2 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \right] + \ln \left| \frac{(\xi_2 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_2 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}}{(\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_1 + 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}} \right| = 0.$$

Отметим, что мгновенное изменение направления проскальзывания в момент  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  осуществляется, если  $\xi_2 > 1$ .

Последующие интервалы проскальзывания с запаздыванием и опережением исследуются аналогично. Указанное исследование приводит к следующим рекуррентным соотношениям для определения значения  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1 \tau_i}{2}\right) \left[ \theta \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_i + \frac{\tilde{\alpha}_1 \theta - 2(\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_i \right] = \theta, \\ \xi_i = \pm 1 - \tilde{\alpha}_1 \theta + \exp\left(\frac{\tilde{\alpha}_1 \tau_i}{2}\right) \left[ (\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \cos \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_i + \frac{2\theta - \tilde{\alpha}_1 (\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta)}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}}{2} \tau_i \right] \end{array} \right.$$

либо

$$\frac{\tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_i \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2\theta / (\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1}{\sqrt{4 - \tilde{\alpha}_1^2}} \right] + \ln \left| \frac{(\xi_i \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_i \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}}{(\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) \sqrt{(\theta / (\xi_{i-1} \mp 1 + \tilde{\alpha}_1 \theta) - \tilde{\alpha}_1 / 2)^2 + 1 - \tilde{\alpha}_1^2 / 4}} \right| = 0$$

(верхний знак в формулах для  $i = 2n - 1$ , нижний – для  $i = 2n$ ,  $n \in N$ ). При этом  $i$ -й этап проскальзывания существует, если  $|\xi_{i-1}| > 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Предположим, что  $-1 < \xi_j(\tau_k) < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Тогда после  $j$  интервалов проскальзывания при  $\tau = \tau^*$ ,  $\tau^* = \sum_{i=1}^j \tau_i$ , начнется этап длительного контакта тела с лентой. На рассматриваемом этапе в силу (5) имеем

$$\xi = \xi_j(\tau_k) + \theta(\tau - \tau^*). \quad (10)$$

Этап завершится в момент  $\tau = \tau^* + \tau_{k+1}$  при  $\xi = 1 + \varepsilon(\tau_{k+1})$ . Подставляя в выражение (10) указанные значения времени и координаты, получим соотношение, связывающее продолжительности  $\tau_k$  и  $\tau_{k+1}$  последовательных интервалов длительного контакта, то есть функцию последования

$$\Psi(\tau_{k+1}) = \varphi(\tau_k),$$

$$\Psi(\tau) = \theta\tau - \varepsilon(\tau), \quad \varphi(\tau) = 1 - \xi_j(\tau), \quad -1 < \xi_j(\tau) < 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Следует заметить, что при  $\tilde{\alpha}_1 = 0$  эта функция последования совпадает с функцией последования из статьи [4].

### Заключение

Изучена структура фазового пространства динамической системы, описывающей фрикционные автоколебания системы двух трущихся тел с учетом вязко-сухого трения наследственного типа. Качественным методом показано, что режимы с относительным покоем трущихся поверхностей возможны лишь при значениях коэффициента вязкого трения, принадлежащих определенному интервалу, приведен вид функции последования, который дает возможность определить неподвижные точки точечного отображения, соответствующие сколь угодно сложным периодическим режимам движения тела, и отыскать бифуркационные значения параметров возникновения хаотических движений [13, 14].

### Список литературы

1. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении. *Журнал технической физики*. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276–282.
2. Кашеневский Л.Я. Стохастические автоколебания при сухом трении. *Инженерно-физический журнал*. 1984. Т. 47. №1. С. 143–147.
3. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1990. №1. С. 23–28.
4. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа. *ПММ*. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859–864.
5. Зайцев М.В., Метрикин В.С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2012. №3(1). С. 141–146.
6. Ветюков М.М., Платовских М.Ю. Фрикционные автоколебания в системах с одной и двумя степенями свободы. *Современные проблемы механики и ее преподавания в вузе: Тр. Всерос. науч.-метод. конф.* СПб. 2015. Т. 1. С. 58–62.
7. Leine R.I., Van Campen D.H., De Kraker A., Van den Steen. Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*. 1998. Vol. 16. P. 41–54.
8. Van de Vrande B.L., Van Campen D.H., De Kraker A. An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*. 1999. Vol. 19. P. 157–169.
9. Leine R.I., Van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*. 2002. Vol. 72. P. 138–146.
10. Leine R.I., Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2006. Vol. 25. P. 595–616.

11. Luo G.W., Lv X.H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2008. Vol. 27. P. 1088–1107.
12. Неймарк Ю.И. *Динамические системы и управляемые процессы*. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 336 с.
13. Фейгин М.И. *Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями*. М.: Наука, 1994. 285 с.
14. Шустер Г. *Детерминированный хаос*. М.: Мир, 1988. 237 с.

#### References

1. Ishlinskii A. Yu., Kragelskiyi I.V. O skachkakh pri trenii [About racing in friction]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [The Russian Journal of Applied Physics]*. 1944. Vol. 4/5. Iss. 14. P. 276–282 (In Russian).
2. Kashchenevskii L. Ya. Stokhasticheskie avtokolebaniya pri sukhom trenii [Stochastic auto-oscillations with dry friction]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal [Journal of Engineering Physics and Thermophysics]*. 1984. Vol. 47. Iss. 1. P. 143–147 (In Russian).
3. Vetyukov M.M., Dobroslavskii S.V., Nagaev R.F. Avtokolebaniya v sisteme s kharakteristikoy sukhogo treniya nasledstvennogo tipa [Self-oscillations in a system with dry friction characteristic of hereditary type]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solid]*. 1990. No 1. P. 23–28 (In Russian).
4. Metrikin V.S., Nagaev R.F., Stepanova V.V. Periodic and stochastic self-oscillations in a system with dry friction hereditary type. *Journal Applied Mathematics and Mechanics*. 1996. Vol. 5. Iss. 60. 1996. P. 845–850.
5. Zaitsev M.V., Metrikin V.S. K teorii neavtonomnoy dinamicheskoy sistemy s treniem nasledstvennogo tipa [On the theory of a nonautonomous dynamical system with hereditary-type dry friction]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod]*. 2012. No 3(1). P. 141–146 (In Russian).
6. Vetyukov M.V., Platovskikh M. Yu. Friksionnye avtokolebaniya v sistemakh s odnoy i dvumya stepenyami svobody [Friction self-oscillations in systems with one and two degrees of freedom]. *Sovremennye problemy mekhaniki i ee prepodavaniya v vuze. Trudy Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsii [Modern problems of mechanics and its teaching in the university. Proceeding of the All-Russian Scientific and Methodological Conference]*. St. Petersburg. 2015. Vol. 1. P. 58–62 (In Russian).
7. Leine R.I., Van campen D.H., De Kraker A., Van den Steen. Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*. 1998. Vol. 16. P. 41–54.
8. Van de Vrande B.L., Van Campen D.L., De Kraker A. An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*. 1999. Vol. 19. P. 157–169.
9. Leine R.I., Van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*. 2002. Vol. 72. P. 138–146.
10. Leine R.I., Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2006. Vol. 25. P. 595–616.
11. Luo G.W., Lv X.H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2008. Vol. 27. P. 1088–1107.
12. Neimark Yu.I. *Dinamicheskie sistemy i upravlyaemye protsessy [Dynamic Systems and Managed Processes]*. Moscow. LIBROKOM Publ. 2010. 336 p. (In Russian).
13. Feigin M.I. *Vynuzhdennyye kolebaniya sistem s razryvnymi nelineynostyami [Forced Oscillations of Systems with Discontinuous Nonlinearities]*. Moscow. Nauka Publ. 1994. 285 p. (In Russian).
14. Schuster H.G. *Deterministic Chaos*. Weinheim. Phisic Verlag. 1984. 220 p.



## **FRictional SELF-OSCILLATIONS IN AN OSCILLATORY SYSTEM ACCOUNTING FOR HEREDITARY-TYPE FRICTION FORCES**

**Metrikin V.S.<sup>1</sup>, Starodubrovskaya N.S.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

The dynamics of an oscillator consisting of a pair of friction surfaces, one of which is moving at a constant velocity and the other located on it is secured to a rigid support, is considered. The friction force is assumed as a sum of two friction forces: dry friction with the relative rest friction coefficient as a monotonously increasing function of the duration time of relative rest of the bodies of friction, and viscous friction with a constant friction coefficient (a hereditary-type friction force). The phase space structure as a function of the viscous friction coefficient value is studied; modes with relative rest of the friction surfaces are shown to be possible only for viscous friction coefficient values within a certain interval. An analytical form of Poincare function is given which makes it possible either to determine fixed points of the point map corresponding to periodic modes of body motion or to find bifurcation values of parameters of the onset of chaos.

*Keywords:* mathematical model, hereditary-type friction, Poincare function, relative rest, fixed point, chaos.