

УДК 539.3

ИЗГИБ ДЛИННОГО ТРУБОПРОВОДА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СИЛЬНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Р.М. Амирова, М.А. Ильгамов, А.Г. Хакимов

Уфа

Рассмотрено движение трубопровода как изогнутого стержня в сильно вязкой жидкости. Перемещения осевой линии считались конечными, деформации стержня – малыми. Учитывалось взаимное влияние силы продольного натяжения и поперечных перемещений, давление жидкости в трубопроводе. Выведены уравнения движения и проведены расчеты.

Введение

Известно, что подземный трубопровод сложного профиля может изменять свое положение в грунте под влиянием внутреннего потока жидкости, начального изгиба оси, свойств среды. Это медленный процесс, в котором перемещения осевой линии могут достигать значительной величины. Поэтому при проектировании необходимо прогнозировать движение подземного трубопровода под влиянием трех вышеупомянутых факторов.

В литературе имеются многочисленные исследования движения как внутреннего потока жидкости, так и самого трубопровода. Здесь рассматривается медленное движение трубопровода как стержня под действием сил упругости, внутреннего давления и нелинейного сопротивления внешней среды. Перемещения при этом могут быть конечными, но деформации считаются малыми. При выводе уравнений движения учитывается сила продольного натяжения, возникающая в результате поперечного перемещения трубопровода. Всеми колебательными процессами во внутреннем потоке жидкости мы пренебрегаем, так как изучаемое явление имеет другой масштаб по времени.

Физическая постановка задачи

Трубопровод рассматривается как упругий полый стержень, который погружен в сильно вязкую среду. В начальном состоянии трубопровод имеет нулевую кривизну. Учитывается начальная погрешность монтажа, внешняя среда считается вязкой жидкостью. Концы трубопровода считаем защемленными. Требуется найти движение стержня.

Предполагается, что деформации стержня малы, а поперечные перемещения конечны, но малы по сравнению с длиной стержня; сила натяжения стержня, возникающая в результате его изгиба, равномерно распределена по его длине; на больших интервалах времени внешняя среда описывается уравнениями очень вязкой жидкости; силами инерции стенки трубопровода и жидкости можно пренебречь.

Вывод уравнения движения

Будем искать нормальные перемещения стержня w_n как функцию времени t и длины дуги s :

$$w_n = w + \delta_0 \sin^2 \frac{\pi s}{L}, \quad (1)$$

где δ_0 – амплитуда начального прогиба, w – дополнительный прогиб, L – длина трубопровода.

Пусть на элемент изогнутой трубы действуют концевые и распределенные нагрузки. В данной постановке задачи будем пренебрегать продольными распределенными нагрузками (продольные силы инерции, трение потока) по сравнению с поперечными, кроме силы натяжения. Учитываем давление внутри трубы. Тогда распределенная нагрузка q_n на трубопровод выразится формулой:

$$q_n = q_{nr} + P_i F_i \kappa, \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2}, \quad F_i = \pi r_0^2,$$

где q_{nr} – сила сопротивления среды на единицу длины трубы, P_i – внутреннее давление в трубе, κ – кривизна трубопровода, F_i – площадь проходного сечения трубы, r_0 – внутренний радиус трубопровода.

Дифференциальные уравнения движения стержня в деформированном состоянии имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial s} - \kappa Q = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \kappa T - q_n = 0; \quad Q = -\frac{\partial M}{\partial s}, \end{cases} \quad (3)$$

где T – сила продольного натяжения трубопровода, Q – перерезывающая сила, M – изгибающий момент.

Используя выражение связи между изгибающим моментом и изменением кривизны упругой линии:

$$M = EI(\kappa - \kappa_n), \quad I = \frac{\pi(R_0^4 - r_0^4)}{4}, \quad R_0 = r_0 + h,$$

где E – модуль Юнга материала трубы; I – осевой момент инерции поперечного сечения трубопровода; R_0, h – наружный радиус и толщина стенки трубопровода, а $\kappa_n = 0$ – кривизна недеформированного трубопровода, получим:

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial s} = -EI \frac{\partial \kappa}{\partial s}. \quad (4)$$

Далее полученное выражение подставляем в первое уравнение системы (3):

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \kappa Q = \frac{\partial T}{\partial s} + EI \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\kappa^2}{2} \right) = 0,$$

$$T + EI \frac{\kappa^2}{2} = C.$$

Так как мы полагаем $\kappa \ll 1$, то отсюда следует, что

$$T = C. \quad (5)$$

С другой стороны, по физическому закону

$$T = EF \varepsilon = EF \left[\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 \right],$$

где $F = 2\pi r_0 h$ – площадь поперечного сечения трубы, ε – относительное удлинение, u_n – продольное перемещение элемента трубопровода. Тогда

$$\frac{C}{EF} = \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\int_0^L \frac{C}{EF} ds = \int_0^L \frac{\partial u_n}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds.$$

Далее, используя граничные условия:

$$u_n = 0; \quad s = 0, \quad s = L,$$

получим, что

$$\frac{CL}{EF} = u_n(L) - u_n(0) + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds.$$

Используя (5), получаем, что сила продольного натяжения трубопровода равна

$$T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds. \quad (6)$$

На трубопровод действует постоянное внутреннее давление P_i . После преобразований второе уравнение системы примет вид:

$$EI \frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - (T - P_i F_i) \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + q_{nr} = 0. \quad (7)$$

Сила сопротивления среды q_{nr} , отнесенная к единице длины, определяется формулой Ламба [1]:

$$q_{nr} = \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu / \gamma \rho_{gr} R u|}, \quad (8)$$

где μ – вязкость среды, ρ_{gr} – плотность среды, u – скорость поперечного перемещения цилиндра, R – радиус цилиндра, $\gamma = 1,7811$ – число Маскерони.

Подставляя (2) в (7) и заменяя R на R_0 , получим уравнение движения изогнутого трубопровода в вязкой среде:

$$EI \frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - (T - P_i F_i) \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu / \gamma\rho_{gr} R_0 u|} = 0, \quad (9)$$

$$u = \frac{\partial w_n}{\partial t}.$$

Подставляем (1) в уравнение (9) и получаем:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{8EI\pi^4 \delta_0}{L^4} \cos \frac{2\pi s}{L} - \left\{ \frac{EF}{2L} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{2\delta_0 \pi}{L} \int_0^L \sin \frac{2\pi s}{L} \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\delta_0^2 \pi^2}{2L} \right] - \right.$$

$$\left. - P_i F_i \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{2\delta_0 \pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi s}{L} \right) + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu / \gamma\rho_{gr} R_0 u|} = 0, \quad (10)$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Уравнения (10) дополним однородными начальными и краевыми условиями:

$$\begin{cases} w = 0, & t = 0, \\ w = dw/ds = 0, & s = 0, s = L. \end{cases} \quad (11)$$

Система (10)–(11) представляет собой нелинейную начально-краевую задачу относительно неизвестных функций w , u . Решение этой системы описывает перемещения трубопровода только в том случае, если они малы по сравнению с начальным радиусом кривизны его оси, а также если допустима гипотеза плоских сечений.

Для решения задачи (10)–(11) выберем явную двухслойную разностную схему по времени. Дискретизацию по пространству проведем интегро-интерполяционным методом. В результате получим разностное соотношение:

$$\frac{EI}{h_s^4} (w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j) - \frac{8EI\pi^4 \delta_0}{L^4} \cos \frac{2\pi s_i}{L} -$$

$$- \left\{ \frac{EF}{2L} \left[\sum_{i=i_1}^{i_2-h_1} \frac{(w_{i+1}^j)^2 - 2w_{i+1}^j w_{i-1}^j + (w_{i-1}^j)^2}{4h_s} + \sum_{i=i_1}^{i_2-h_1} \frac{2\pi\delta_0}{L} \sin \frac{2\pi s_i}{L} \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2} + \frac{\delta_0^2 \pi^2}{2L} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{P_i I}{h r_i} \right\} \left(\frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h_s^2} + \frac{2\pi^2 \delta_0}{L^2} \cos \frac{2\pi s_i}{L} \right) + \frac{4\pi\mu u_i^j}{0,5 + \ln |4\mu / \gamma\rho_{gr} R_0 u_i^j|} = 0,$$

$$u_i^j = \frac{1}{h_t} (w_i^{j+1} - w_i^j).$$

Здесь j – номер слоя по времени, i – номер точки по координате s ; h_s , h_t – шаг сетки по координате и времени соответственно, u – скорость элемента трубы. Краевые и

начальные условия учитываются обычным образом. Шаг по времени и координате выбирался опытным путем из требований устойчивости и точности.

При решении задачи были выбраны следующие параметры: $r_0=0,6$ м – внутренний радиус трубопровода, $L=1000$ м – длина трубопровода, $E=2\cdot 10^{11}$ Н/м² – модуль Юнга материала трубы, $\rho_{gr}=1700$ кг/м³ – плотность внешней среды, $\mu=1000$ Па·с вязкость жидкости, $h=0,005$ м – толщина стенки трубопровода, $\delta_0=1$ м – амплитуда начального прогиба.

Результаты расчетов

Исследование напряженно-деформированного состояния трубопровода с компенсатором осевых перемещений при заданном начальном прогибе для нулевого давления. Использование компенсатора осевых перемещений предполагает, что сила продольного натяжения трубопровода $T=0$.

Движение трубопровода начинается под действием сил упругости. На рис. 1 показаны прогибы трубопровода в различные моменты времени. На рис. 2 изображено изменение прогиба середины трубопровода в зависимости от времени.

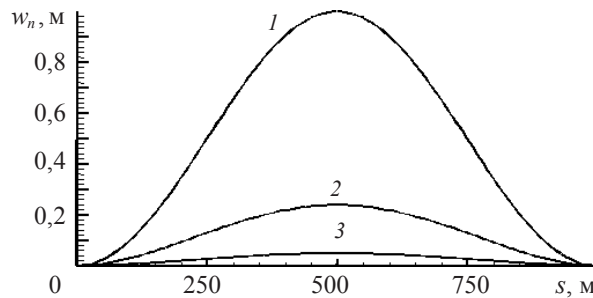


Рис.1. Прогибы трубопровода в моменты времени: 1 – $t=0$; 2 – $t=5000$ с; 3 – $t=10000$ с. Внутреннее давление в трубопроводе $P_i=0$

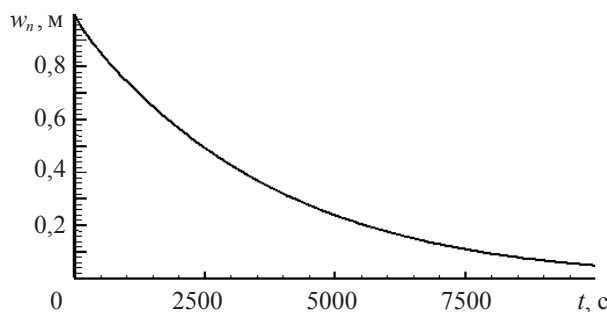


Рис. 2. Зависимость прогиба трубопровода от времени для $P_i=0$

Из графиков видно, что перемещение середины трубопровода с течением времени уменьшается и при больших значениях времени стремится к нулю.

Исследование напряженно-деформированного состояния трубопровода без компенсатора осевых перемещений при заданном начальном прогибе для нулевого внутреннего давления.

Рассмотрим два случая:

1. $T \neq 0$, то есть сила продольного натяжения трубопровода вычисляется по формуле (6), и справедливы условия:

$$\begin{cases} w = \partial w / \partial s = 0, & s = 0, s = L, \\ u_n(0) = u_n(L) = 0. \end{cases}$$

2. Одна из опор трубопровода не препятствует перемещению трубопровода вдоль оси, $T=0$, то есть пренебрегаем силой продольного натяжения, и справедливы следующие условия:

$$\begin{cases} w = \partial w / \partial s = 0, & s = 0, s = L, \\ T(0) = T(L) = T(s) = 0. \end{cases}$$

На рис. 3 показана зависимость прогиба трубопровода от времени в случаях 1 и 2. Как видно из графиков, перемещения трубопровода при $t=0$ и $t=10000$ с совпадают.

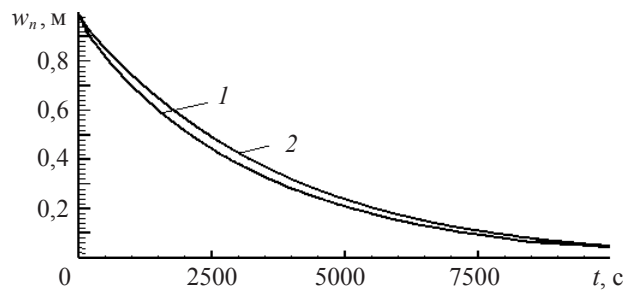


Рис. 3. Зависимость прогиба трубопровода от времени для $P_i = 0$

Исследование напряженно-деформированного состояния трубопровода с компенсатором осевых перемещений при заданном начальном прогибе для разных давлений. Внутреннее критическое давление $P_{кр}$ для защемленных опор определяется по формуле [2]:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EI}{F_i L^2} = \frac{4\pi^2 E h r_0}{L^2} = 23981 \text{ Па.}$$

При закритическом значении давления прогиб середины трубопровода с течением времени увеличивается. При критическом давлении трубопровод остается на месте, при докритическом внутреннем давлении максимальный прогиб уменьшается (рис. 4).

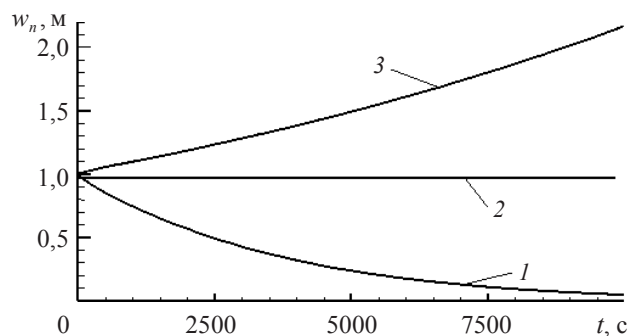


Рис. 4. Зависимость перемещения середины трубопровода от времени для разных давлений внутри трубопровода: 1 – $P = 0$; 2 – $P = P_{кр} = 23981$ Па; 3 – $P = 30000$ Па

Выводы

1. Разработана математическая модель деформации магистрального трубопровода с нулевой кривизной в недеформированном состоянии, проложенного в болотистой местности, учитывающая начальную погрешность монтажа, продольные усилия и внутреннее давление.

2. Исследовано напряженно-деформированное состояние трубопровода с компенсатором осевых перемещений при заданном начальном прогибе для нулевого давления. Движение трубопровода начинается под действием сил упругости. Показано, что при этом он стремится вернуться в прямолинейное положение.

3. При критическом значении внутреннего давления максимальный прогиб не меняется с течением времени. Если значение внутреннего давления больше критического, то максимальный прогиб трубопровода увеличивается, если меньше критического – уменьшается.

Литература

1. *Кочин, Н.Е.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 612 с.
2. *Ильгамов, М. А.* Статические задачи гидроупругости / М.А. Ильгамов. – Казань: ИММ РАН, 1994. – 208 с.

[26.05.2004]