УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КВАДРАТУР СВЕРТОК В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УПРУГИХ ТЕЛ*)

А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук

Нижний Новгород

Представлена схема метода граничных элементов в сочетании с методом квадратур сверток. Рассмотрены модификации метода квадратур сверток. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующие достоинства полученных модификаций.

Введение

Существующие методологии решения задач упругодинамики с использованием метода граничного элемента (МГЭ) укладываются главным образом в два возможных подхода [1–6]: прямой подход во временной области или подход с использованием обратного преобразования в области Лапласа (Фурье). Все численные формулы обращения зависят от надлежащего выбора их параметров, а все пошаговые процедуры требуют адекватного выбора шага по времени и, как правило, приемов улучшения устойчивости пошаговой формулировки [1, 7]. Появление метода квадратур сверток позволило сформулировать новый МГЭ-подход [7–10].

Представлена гранично-временная формулировка, использующая модификации метода квадратур сверток и опирающаяся на специфику поведения весов интегрирования при замене интеграла свертки квадратурной формулой.

1. Волновые потенциалы теории упругости

Пусть S – замкнутая поверхность класса $C^{1,\alpha}(\alpha > 0)$, разделяющая n-мерное пространство R^n на области Ω^+ (внутреннюю) и Ω^- (внешнюю). Смещение точки $x = (x_1,\dots,x_n)$ упругой среды, занимающей области Ω^+ или Ω^-, в момент времени $t = x_{n+1}$ определяется вектор-функцией $u = u(x,t) = u(x')$, где $x' = (x,t)$, с компонентами $u_i = u_i(x')$ $(i = 1,\dots,n)$. Кроме того, вводятся обозначения: $G^{\pm} = \Omega^{\pm}\times R^+$, $\Sigma = S\times R$, $\Sigma^+ = S\times R^+$, $R^+ = (0,\infty)$.

Запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев с n-компонентными плотностями $\alpha(x'), \beta(x')$ $(x'\in \Sigma^+)$ определяются соответственно формулами:

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00500-а) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-3367.2008.8, проект РНП.2.1.2.3556 по Аналитической ведомственной целевой программе Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы»).

$$(V\alpha)(x') = \int_{\Sigma^+} (U_j(x-y,t-\tau), \alpha(y,\tau))\, e_j\, ds_y d\tau, \qquad (1)$$

$$(W\beta)(x') = \int_{\Sigma^+} ((T_{\nu(y)} U_j)(x-y,t-\tau), \beta(y,\tau))\, e_j\, ds_y d\tau, \qquad (2)$$

где $U(x, y, t)$ – матрица фундаментальных решений, столбцы которой $U_j = 0$ при $t < 0$ ($j = 1, ..., n$) удовлетворяют уравнениям Ламе; T_ν – оператор сингулярного решения, ν – единичная нормаль; $(\cdot\,,\cdot)$ – вещественное скалярное произведение в n-мерном пространстве.

Оба потенциала удовлетворяют в $G^\pm$ исходному уравнению и нулевым начальным условиям. При гладких плотностях справедливы формулы скачков потенциалов при переходе точки x' через Σ^+ [11].

Предположим, что поверхность S разделена замкнутым контуром $\Gamma \subset S$ на две связные компоненты S_i ($i = 1, 2$) ненулевой площади, так что $\Gamma = \partial S_i$ ($i = 1, 2$). В $G^\pm$ рассмотрим уравнения трехмерной нестационарной теории упругости с нулевыми начальными данными. На части граничной поверхности $\Sigma_1^+ = S_1 \times \mathrm{R}^+$ задаются смещения $u^\pm = f^\pm$, на $\Sigma_2^+ = S_2 \times \mathrm{R}^+$ – граничные усилия $T_\upsilon^\pm u = g^\pm$. Решение задачи с учетом (1), (2) будем искать в виде:

$$u(x') = (W\beta)(x') + (V\alpha)(x'),$$

где плотности β и α сосредоточены на Σ_1^+ и Σ_2^+ соответственно.

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованное уравнение без объемных сил и начальных деформаций [1], то есть:

$$\alpha_\Omega u_k(x,t) + \int_{+0}^{t} \int_{\partial\Omega} \{T_{ik}(x,y,t-\tau)[u_i(y,\tau) - u_i(x,\tau)] - U_{ik}(x,y,t-\tau) t_i(y,\tau)\}\, dS_x d\tau = 0,$$

$$x \in \partial\Omega.$$

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega$ на N_E граничных элементов E_e $(1 \le e \le N_E)$ совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные, каждый из которых отображается на некий контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e – это либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \le \xi_1 + \xi_2 \le 1, \xi_1 \ge 0, \xi_2 \ge 0$). Элемент E_e отображается на элемент Δ_e с помощью уравнения:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^{8} N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1,2,3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k-м элементе локальный номер l; $N^l(\xi)$ – функции формы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции.

Естественный базис (a_1, a_2), метрический тензор g и единичная нормаль n на E_e запишутся как

$$a_\alpha(\xi) = \sum_{q=1}^{N} N_\alpha^l(\xi) x^q, \quad g_{\alpha\beta}(\xi) = a_\alpha(\xi) \cdot a_\beta(\xi),$$

$$J(\xi)n(\xi) = a_1 \wedge a_2, \qquad J^2(\xi) = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(\xi)$$

$$(\xi \in \Delta_e; \quad \alpha, \beta = 1, 2).$$

Неизвестные граничные поля (u, t) интегрируются через узловые значения $u^k = u(z^k)$ и $t^k = t(z^k)$ в интерполяционных узлах z^k. Множество интерполяционных узлов отличается от множества геометрических узлов, а множество интерполяционных функций не совпадает с множеством функций формы. Рассмотрим случай, называемый согласованным интерполированием (Р.В. Гольдштейн (1978)), где для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы. Получим следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k:

$$u_i(y) = \sum_{l=1}^{4} R^l(\xi) u_i^{\chi(k,l)}, \qquad i = 1, 2, 3; \; y \in S_k,$$

$$t_i(y) = t_i^{\chi(k,l)}, \qquad i = 1, 2, 3; \; y \in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

В качестве узлов коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1-\alpha_\Omega}{2} u_i^m + \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{4} A_{ij}^{m,k,l} * u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N} B_{ij}^{m,k} * t_j^k, \tag{3}$$

$$\frac{1-\alpha_\Omega}{8} u_i^m + \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{4} A_{ij}^{m,k,l} * u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N} B_{ij}^{m,k} * t_j^k, \tag{4}$$

где * – знак операции Вольтерра по времени, N – число элементов границы.

Уравнения (3) записаны в узлах аппроксимации перемещений, уравнения (4) – в узлах аппроксимации усилий:

$$A_{ij}^{m,k,l} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[R^l(\xi) T_{ij}(x^m, y^k(\xi), t) - \delta_{\chi(k,l),m} T_{ij}^0(x^m, y^k(\xi)) \delta(t) \right] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{m,k} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} U_{ij}(x^m, y^k(\xi), t) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

Для раскрытия оператора свертки использован метод квадратур сверток.

3. Метод квадратур сверток в гранично-элементном моделировании

Традиционная схема метода квадратур сверток строится на основе составной формулы трапеций с постоянным шагом [7–9]:

$$y = q * g, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, ..., N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{\Re^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \overline{q}\left(\gamma(\Re e^{il2\pi L^{-1}}) / \Delta t\right) e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 x_n =$$

$$= \Delta t\left[\beta_k (s x_{n+k} + g((n+k)\Delta t)) + \ldots + \beta_0 (s x_n + g(n\Delta t))\right],$$

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 z^k + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 z^k + \ldots + \beta_k}, \quad x(t,s) = \int_0^t e^{s(t-\tau)} g(\tau) d\tau,$$

где $\overline{q}$ – изображение по Лапласу функции q.

Трансформанты, как показывают численные эксперименты, могут иметь специфический вид, поэтому наиболее эффективным было бы использование алгоритма численного интегрирования с переменным шагом.

Разделим интервал интегрирования, обозначив узлы через φ_k ($k = 1, 2, \ldots, L$), причем $\varphi_1 = 0, \varphi_L = 2\pi$, тогда весовые коэффициенты примут вид:

$$\omega_0 = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \mathrm{Re}\left[\overline{f}(\varphi)\right] d\varphi, \tag{5}$$

$$\omega_n = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \overline{f}(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \text{ для } t > 0. \tag{6}$$

На интервале $a = \varphi_k$, $b = \varphi_{k+1}$ возникают интегралы от быстро осциллирующей функции, причем $\omega(b - a) >> 1$, $f(\varphi)$ – гладкая функция. Такие функции могут быть хорошо приближены многочленами степени n лишь при $n >> \omega(b - a)/\pi$ [12]:

$$\int_a^b L_n e^{i\omega\varphi} d\varphi = S_n^{\omega}(f) = \frac{b-a}{2} e^{i\omega(b+a)/2} \sum_{j=1}^{n} D_j\left(\omega \frac{b-a}{2}\right) f(\varphi_j),$$

где

$$D_j(p) = \int_{-1}^{1} \left(\prod_{k \neq j} \frac{\xi - d_k}{d_j - d_k} \right) e^{ip\xi} d\xi, \quad \varphi_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad p = \omega \frac{b-a}{2},$$

$$R_n(f) = \int_a^b (f(\varphi) - L_n(\varphi)) e^{i\omega\varphi} d\varphi,$$

$$R_n(f) \leq \int_a^b \left| f(\varphi) - L_n(\varphi) \right| d\varphi \leq D(d_1, \ldots, d_n) \left(\max_{[a,b]} \left| f^{(n)}(\varphi) \right| \right) \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}.$$

Если подынтегральное выражение не является быстро осциллирующей функцией, то будем использовать соответствующую традиционную составную формулу типа Ньютона–Котеса.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $p = 1$ Н/м^2 призматического тела с жестко закрепленным концом и параметрами материала: плотность $\rho = 7850$ кг/м^3, коэффициент Пуассона $\nu = 0$, модуль Юнга $E = 2{,}11 \cdot 10^{11}$ Па. Задача решена в приведенных величинах ($p = 1$, $\rho = 0{,}5$, $\nu = 0$, $E = 1$). Гранично-элементная модель построена следующим образом: выбрано 126 четырехугольных элементов на четверти равномерной сетки.

На рис. 1 приведены кривые перемещений, число временных точек $N = 500$, число узлов интегрирования $L = 501$ на интервале от 0 до 2π с постоянным шагом $\Delta t = 0{,}01$. Цифрой *1* маркировано решение, полученное с использованием традиционного метода квадратур сверток, цифрой *2* – решение, полученное с использованием линейной интерполянты функции $f(\varphi)$ и с аналитическим вычислением экспоненты, цифрой *3* – решение, полученное с использованием квадратичной интерполянты функции $f(\varphi)$ и с аналитическим вычислением экспоненты. На рисунке видно, что результат, полученный с использованием традиционного метода квадратур сверток, значительно лучше.

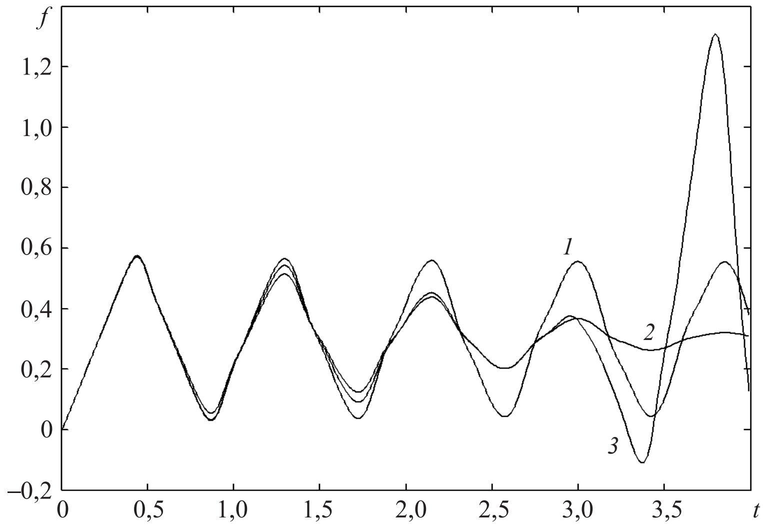

Рис. 1

На рис. 2 представлено решение, полученное с использованием традиционной составной формулы метода трапеций без веса с переменным шагом: на интервале от 0 до $\pi/2$ взяли 125 узлов интегрирования, на интервале от $\pi/2$ до $3\pi/4$ – 20 узлов, на интервале от $3\pi/4$ до 2π – 125 узлов. Общее число точек интегрирования $L = 270$, временных точек $N = 500$, шаг $\Delta t = 0{,}01$. На рис. 2 это кривая с осцилляциями.

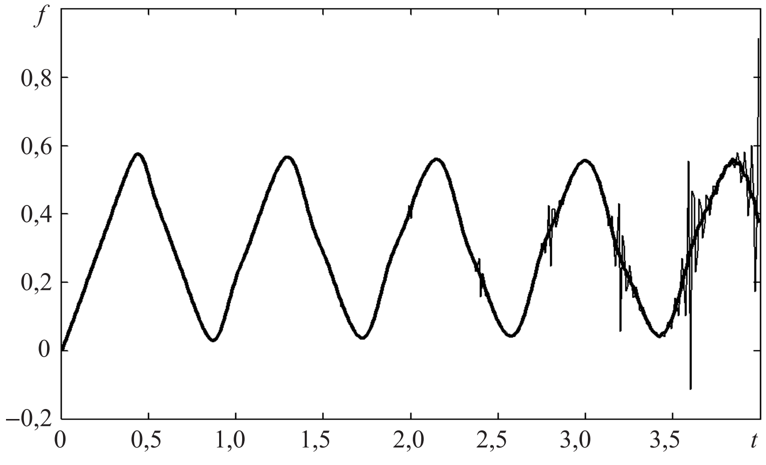

Рис. 2

Осцилляции можно погасить, применив предложенные комбинированные формулы. Решения, полученные по линейной и квадратичной комбинированным формулам, совпали. Им соответствует гладкая кривая на рис. 2. Эти решения при меньшем числе узлов интегрирования (L = 270) совпадают с кривой *1* на рис. 1 (L = 501).

Можно и дальше уменьшать число узлов интегрирования, получая при этом хорошие результаты. Однако если число точек по времени, которое равно N, начинает превышать $2L$, то картина колебательного процесса сильно изменяется – увеличивается амплитуда колебаний, а их частота уменьшается (для традиционного метода квадратур сверток такая картина появляется при $N > L$). На рис. 3 приведены расчеты для следующего разбиения – на интервале от 0 до $\pi/2$ – 70 узлов интегрирования, на интервале от $\pi/2$ до $3\pi/4$ – 20 узлов, на интервале от $3\pi/4$ до 2π – 70 узлов.

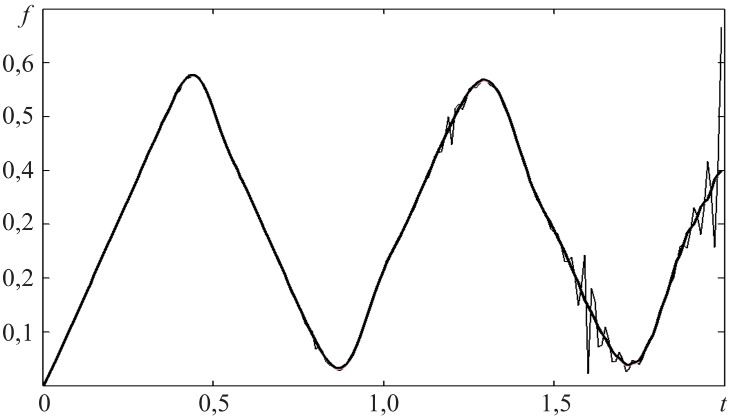

Рис. 3

Следует отметить, что традиционный вариант формулы квадратур сверток дает хорошие результаты за счет большого количества узлов интегрирования. Применение комбинированной формулы позволяет сохранить необходимую точность с использованием меньшего числа узлов интегрирования.

Заключение

Показано, как более эффективно использовать метод граничного элемента в сочетании с методом квадратур сверток, учитывая характер поведения спектральных функций весовых множителей итоговой квадратурной формулы. При этом удается достигнуть более высокой точности численных результатов, проводя расчеты с переменным шагом по времени с уменьшением общего числа временных шагов по сравнению с традиционным подходом.

Ключевые слова: метод граничных элементов, модификация метода квадратур сверток, задачи упругодинамики.

Литература

1. *Баженов, В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

2. *Banerjee, P.K.* Advanced Development of BEM for Elastic and Inelastic Dynamic analysis

of Solids / P.K. Banerjee, S. Ahmad, H.C. Wang // In Industrial Application of Boundary Element Methods (Banerjee P.K., Wilson R.B., eds.) / Developments in Boundary Element Methods. – London: Elsevier, 1989. – P. 77–177.

3. *Karabalis, D.L.* Dynamic Analysis of 3-D Foundations / D.L. Karabalis, D.C. Rizos // In Boundary Element Techniques in Geomechanics (Manolis G.D., Davies T.G., eds.). – London: Elsevier, 1993.

4. *Antes, H.* The boundary integral approach to static and dynamic contact problems / H. Antes, P.D. Panagiotopoulos // Int. Series of Numerical Mathematics 108. – Birkhauser, Basel, 1992. – 313 p.

5. *Beskos, D.E.* Boundary Element Methods in Dynamic Analysis / D.E. Beskos // Appl. Mech. Review. – 1987. – Vol. 40. – № 1. – P. 1–23.

6. *Beskos, D.E.* Boundary element methods in dynamic analysis: Part II 1986–1996 / D.E. Beskos // Appl. Mech. Review. – 1997. – Vol. 50. – P. 149–197.

7. *Schanz, M*. Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua / M. Schanz. – Berlin Springer, 2001. – 170 p.

8. *Lubich, C.* On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1994. – № 67. – S. 365–389.

9. *Lubich, C.* Schneider R Time discretization of parabolic boundary integral equations / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1992. – V. 63. – S. 455–481.

10. *Schanz, M.* Boundary element analysis / M. Schanz, O. Steinbach. – Berlin Springer, 2007. – 354 p.

11. *Новацкий, В*. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

12. *Бахвалов, Н.С*. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.

[23.10.2008]

BOUNDARY-ELEMENT PROCEDURE BASED ON MODIFIED CONVOCATION QUADRATURE METHOD IN DYNAMIC PROBLEMS OF ELASTIC BODIES

A.A. Belov, L.A. Igumnov, S.Yu. Litvinchuk

A scheme of a boundary-element method is given in combination with a convocation quadrature method. The modifications of the convocation quadrature method are considered. The results of numerical experiments showing the advantages of the obtained modifications are presented.

Key words: boundary element method, modification of the convocation quadrature method, problems of elastodynamics.