УДК 539.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ РАСТЯНУТЫХ И СЖАТЫХ УПРУГИХ ПОЛОС И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК*)

Н.В. Баничук[1], А.А. Барсук[2], С.Ю. Иванова[1]

[1]*Институт проблем механики РАН, Москва*
[2]*Молдавский госуниверситет, Кишинев* (*Молдова*)

Рассматривается задача о свободных гармонических колебаниях упругой изотропной полосы в условиях ее растяжения (сжатия) равномерно распределенными по поперечному сечению усилиями заданной интенсивности. Принимается, что деформирование полосы происходит в ее плоскости. При отсутствии осевых усилий обсуждаемая задача совпадает с классической задачей о свободных колебаниях упругой полосы, исследованной Рэлеем и Лэмбом, а при нулевом значении частоты и сжатии полосы – с задачей устойчивости полосы, рассмотренной А.Ю. Ишлинским. В аналитической форме получена зависимость частот свободных колебаний от параметра нагрузки и отношения ширины полосы к длине полуволны ее волнообразного деформированного состояния. Показывается, что полученное решение задачи для полосы одновременно служит точным решением этой же задачи и для прямоугольных пластин конечных размеров для граничных условий, генерируемых инвариантностью полосы относительно сдвигов. Приводятся результаты асимптотического анализа решения задачи.

Ключевые слова: свободные колебания, устойчивость, предварительно напряженное состояние.

1. Рассматривается задача о свободных гармонических колебаниях изотропной упругой полосы шириной h, с упругими модулями λ, μ и плотностью материала ρ. Полоса подвержена однородному растяжению (сжатию) интенсивности p, при этом значение p положительно при растяжении и отрицательно при сжатии. Интегральное значение растягивающих (сжимающих) усилий P и значение p связаны соотношением $P = ph$. Для описания колебаний полосы введем декартову систему координат, ось ox которой направим параллельно кромкам вдоль осевой линии полосы, а ось oy – вертикально вверх, так что верхняя и нижняя кромки полосы описываются уравнениями $y = \pm h/2$. Введем обозначения u, v для горизонтальной и вертикальной компонент вектора перемещения и ω – для частоты свободных гармонических колебаний полосы.

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №08-08-00025а), Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН №13 и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-169.2008.1).

Имеем

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\rho\omega^2 u=0,$$
$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\rho\omega^2 v=0, \tag{1}$$

$$\tau_{xy}(x,\pm h/2)=0,\quad \sigma_y(x,\pm h/2)=0, \tag{2}$$

где компоненты напряжений τ_{xy} и σ_y связаны с деформациями известными соотношениями

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \sigma_y=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3}$$

При отсутствии осевых усилий ($p = 0$) соотношения (1)–(3) описывают задачу о свободных гармонических колебаниях прямолинейной упругой полосы, изучавшуюся Рэлеем [1] и Лэмбом [2], а при $\omega = 0$ и при $p < 0$ – задачу об устойчивости упругой полосы, которая обсуждалась А.Ю. Ишлинским [3]. При $\omega=0$ имеем задачу упругой устойчивости [4, 5]. Отметим, что все описывающие ее соотношения инвариантны относительно сдвига $x = x + d$ (d – произвольное число), откуда сразу следует, что решения задачи могут быть представлены в виде $u(x, y) = u(y)\cos(\gamma x)$, $v(x,y)= v(y)\sin(\gamma x)$. При вещественных значениях параметра γ напряженно-деформированное состояние (НДС) полосы представляет собой периодическую вдоль оси полосы структуру. Обозначив через l длину полуволны этой структуры, придем к соотношению $\gamma l = \pi$. С учетом используемого представления для компонент вектора перемещения краевая задача (1)–(3) перепишется в виде:

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\gamma(\lambda+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}+(\rho\omega^2-(p+(\lambda+2\mu))\gamma^2)u=0,$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\gamma(\lambda+\mu)\frac{\partial u}{\partial y}+(\rho\omega^2-(p+(\lambda+\mu))\gamma^2)v=0, \tag{4}$$

$$u'(\pm h/2)+\gamma v(\pm h/2)=0,\quad (\lambda+2\mu)v'(\pm h/2)-\gamma\lambda u(\pm h/2)=0. \tag{5}$$

Отметим, что все соотношения спектральной краевой задачи (4), (5) инвариантны относительно преобразований $y \to -y$, $u \to u$, $v \to -v$; $y \to -y$, $u \to -u$, $v \to v$, откуда следует, что все ее решения могут быть разбиты на симметричные и антисимметричные решения, характеризуемые свойством четности компонент вектора перемещения

$$u^s(y)=u^s(-y),\quad v^a(y)=-v^a(-y);\quad u^a(y)=-u^a(-y),\quad v^s(y)=v^s(-y). \tag{6}$$

Обозначим через SA первый из указанных в (6) классов решений, характеризующий симметричные деформации относительно оси полосы. Через AS обозначим второй класс решений в (6), который характеризует изгибные деформации полосы. Решение системы (4) имеет вид:

$$u(y)=A\cosh(\kappa_1\gamma y)+B\sinh(\kappa_1\gamma y)+C\kappa_2\cosh(\kappa_2\gamma y)+D\kappa_2\sinh(\kappa_2\gamma y),$$
$$v(y)=\kappa_1 A\sinh(\kappa_1\gamma y)+\kappa_1 B\cosh(\kappa_1\gamma y)+C\sinh(\kappa_2\gamma y)+D\cosh(\kappa_2\gamma y), \tag{7}$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные,

$$\varkappa_1=\sqrt{1-\frac{\varkappa}{\lambda+2\mu}},\quad \varkappa_2=\sqrt{1-\frac{\varkappa}{\mu}},\quad \varkappa=\rho c^2-p,\quad \omega=c\gamma. \tag{8}$$

Ниже все соотношения приводятся для случая плоской деформации. Для случая плоского напряженного состояния следует сделать известную замену $\lambda \to \lambda_* = \lambda\mu/(1+2\mu)$, $\mu \to \mu$, $\rho \to \rho\delta$ (δ – толщина пластинки). В частности, для решений класса AS $A=0$, $C=0$, и общее решение (7) записывается в форме

$$\begin{aligned} u^a(y) &= B\sinh(\varkappa_1\gamma y)+D\varkappa_2\sinh(\varkappa_2\gamma y),\\ v^s(y) &= \varkappa_1 B\cosh(\varkappa_1\gamma y)+D\cosh(\varkappa_2\gamma y). \end{aligned} \tag{9}$$

Из требования удовлетворения решения (9) граничным условиям (5) приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных B, D:

$$\begin{aligned} &2\varkappa_1 B\cosh(\varkappa_1\gamma h/2)+(\varkappa_2^2+1)D\cosh(\varkappa_2\gamma h/2)=0,\\ &[(\lambda+2\mu)\varkappa_1^2-\lambda]B\sinh(\varkappa_1\gamma h/2)+2\mu\varkappa_2 D\sinh(\varkappa_2\gamma h/2)=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Условие существования ненулевых решений однородной системы (10) (обращения ее определителя в нуль) приводит к трансцендентному уравнению для определения зависимости $\varkappa=\varkappa(\gamma h/2)$. Аналогично для решений класса SA имеем представление общего решения в виде

$$\begin{aligned} u^s(y) &= A\cosh(\varkappa_1\gamma y)+\varkappa_2 C\cosh(\varkappa_2\gamma y),\\ v^a(y) &= \varkappa_1 A\sinh(\varkappa_1\gamma y)+C\sinh(\varkappa_2\gamma y), \end{aligned} \tag{11}$$

систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных A, C:

$$\begin{aligned} &2\varkappa_1 A\sinh(\varkappa_1\gamma h/2)+(\varkappa_2^2+1)C\sinh(\varkappa_2\gamma h/2)=0,\\ &[(\lambda+2\mu)\varkappa_1^2-\lambda]A\cosh(\varkappa_1\gamma h/2)+2\mu\varkappa_2 C\cosh(\varkappa_2\gamma h/2)=0 \end{aligned} \tag{12}$$

и трансцендентное уравнение для определения зависимости $\varkappa=\varkappa(\gamma h/2)$. При отсутствии осевых напряжений ($p=0$) трансцендентные соотношения представляют собой известные дисперсионные зависимости Рэлея – Лэмба для частот свободных гармонических колебаний упругой полосы.

2. Проведем асимптотический анализ собственных форм и собственных значений при $\gamma h/2 \ll 1$ и при $\gamma h/2 \gg 1$. Приведем предельные значения при $\gamma h/2 \to 0$ величин

$$\varkappa_1=\sqrt{1-\frac{\varkappa_0}{\lambda+2\mu}}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu},\quad \varkappa_2=\sqrt{1-\frac{\varkappa_0}{\mu}}=i\sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}},\quad 1-\frac{\varkappa_0}{2\mu}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$$

и собственных форм $u^s(y)\equiv C$, $v^a(y)=0$. Проанализируем возможность существования решений $\varkappa(\gamma)$, обращающихся в бесконечность при $\gamma h \to 0$. Получим

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}}\frac{\gamma h}{2}=n\pi,\quad n=0,1,2,\ldots$$

С учетом связи (8) между частотами свободных колебаний, осевыми усилиями и параметром $\varkappa$ при $\gamma\to 0$ приходим к значениям частот свободных гармонических колебаний полосы, отвечающих нераспространяющимся модам ($\gamma=0$)

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\frac{\omega h}{2}=n\pi,\quad \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}\frac{\omega h}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2},\qquad n=0,1,2,\dots \tag{13}$$

Значениям частот (13) отвечают асимптотические представления для собственных форм

$$\begin{gathered}
u_{2n}^{s}(y)=0,\quad v_{2n}^{a}(y)=C_1\sin\frac{2n\pi y}{h},\\
u_{2n+1}^{s}(y)=C_2\cos\frac{(2n+1)\pi y}{h},\quad v_{2n+1}^{a}(y)=0
\end{gathered} \tag{14}$$

(C_1, C_2 – произвольные постоянные). Исследуем асимптотическое поведение частот свободных колебаний полосы и отвечающих им собственных форм при $\gamma h/2 \gg 1$. Проводя асимптотический анализ, приходим к асимптотическим представлениям для зависимостей $\kappa(\gamma)$:

$$\frac{\kappa_{2n}(\gamma)}{\mu}\approx 1+\frac{(2n)^2\pi^2}{\gamma^2h^2}+\cdots,\quad \frac{\kappa_{2n+1}(\gamma)}{\lambda+2\mu}\approx 1+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\gamma^2h^2}+\cdots,\quad \frac{\gamma h}{2}>>1, \tag{15}$$

и отвечающим им асимптотическим выражениям для собственных форм (14).

3. Исследуемой выше задаче о свободных гармонических колебаниях полосы может быть поставлена в соответствие задача о свободных колебаниях прямоугольных пластин конечных размеров. Следует отметить, что к настоящему времени практически отсутствуют аналитические решения спектральных задач для прямоугольных пластин при их деформировании в своей плоскости. Наличие таких решений, помимо самостоятельного значения, также важно для развития и апробирования асимптотических теорий при усовершенствовании статических и динамических моделей балок, а также при исследовании устойчивости упругих тел без дополнительных предположений об их относительных размерах. Покажем, что полученные выше решения для полосы при незначительных уточнениях могут служить и решениями для прямоугольных пластин конечных размеров. С этой целью обратимся к представлению для компонент вектора перемещения при фиксированном значении параметра γ и отметим, что в силу периодичности НДС на линиях $x_n = n\pi/\gamma$ имеют место соотношения

$$\frac{\partial u(x_n,y)}{\partial x}=0,\quad v(x_n,y)=0,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Рассмотрим свободные гармонические колебания в своей плоскости сжимаемой (растягиваемой) прямоугольной пластинки шириной h и длиной l. Уравнения колебаний описываются выражениями (1). Примем, что продольные стороны пластинки свободны от напряжений, а на поперечных сторонах выполняются условия

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\quad v(0,y)=v(l,y)=0, \tag{16}$$

В соответствии с граничными условиями (16) представим искомые функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)\cos\frac{n\pi x}{l},\quad v(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(y)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{17}$$

Приходим к спектральным краевым задачам для компонент $u_n(y)$, $v_n(y)$:

$$\mu\frac{d^2u_n}{dy^2}+\gamma_n(\lambda+\mu)\frac{dv_n}{dy}+(\rho\omega^2-(p+(\lambda+2\mu))\gamma_n^2)u_n=0,\quad \gamma_n=\frac{n\pi}{l},$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{d^2v_n}{dy^2}-\gamma_n(\lambda+\mu)\frac{du_n}{dy}+(\rho\omega^2-(p+(\lambda+2\mu))\gamma_n^2)v_n=0,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{18}$$

$$u_n'(\pm h/2)+\gamma_n v_n(\pm h/2)=0,$$
$$(\lambda+2\mu)v_n'(\pm h/2)-\gamma_n\lambda u_n(\pm h/2)=0,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{19}$$

Проанализируем случай $n = 0$ ($\gamma_0 = 0$). Приведем выражения для собственных форм и отвечающих им частот и отметим, что все решения могут быть разбиты на два класса – симметричные и антисимметричные – по свойству четности собственных форм:

$$u_{0n}^s(y)=C_{0n}^s\cos\frac{2n\pi y}{h},\quad \omega_{0n}^s=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}2n\pi,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$u_{0n}^a(y)=C_{0n}^s\cos\frac{(2n+1)\pi y}{h},\quad \omega_{0n}^a=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}(2n+1)\pi,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{21}$$

Отметим также, что при $n = 0$ $u_{00}^s\equiv\mathrm{const},\ \omega_{00}^s=0,$ и, таким образом, это решение отвечает горизонтальному перемещению пластинки без деформаций. Далее при построении и анализе решений спектральных задач будем полагать $n \neq 0$.

Поскольку формулировка спектральных краевых задач (18), (19) для фиксированного значения n с точностью до обозначений совпадает с формулировкой краевой задачи (4), (5) о свободных колебаниях полосы с соответствием $\gamma_n\to\gamma$, $u_n(y)\to u(y)$, $v_n(y)\to v(y)$, то при построении решений для прямоугольной пластины можно непосредственно воспользоваться результатами анализа задачи для полосы. В частности, все решения задач (18), (19) для каждого значения индекса n разбиваются на два класса: AS и SA аналогично случаю решения задачи для полосы. Для класса решений AS зависимость частоты свободных колебаний от осевых усилий определяется из соответствующего трансцендентного уравнения. Собственные формы представятся в виде

$$u_{nk}(x,y)=u_{nk}^a(y)\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad v_{nk}(x,y)=v_{nk}^s(y)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{22}$$

где

$$u_{nk}^a(y)=C\left[\frac{\sinh\kappa_{1k}\gamma_n y}{\cosh(\kappa_{1k}\gamma_n h/2)}-\frac{\kappa_{1k}\kappa_{2k}}{1-\kappa_{nk}^{as}/(2\mu)}\cdot\frac{\sinh\kappa_{2k}\gamma_n y}{\cosh(\kappa_{2k}\gamma_n h/2)}\right],$$
$$v_{nk}^s(y)=\kappa_{1k}C\left[\frac{\cosh\kappa_{1k}\gamma_n y}{\cosh(\kappa_{1k}\gamma_n h/2)}-\frac{1}{1-\kappa_{nk}^{as}/(2\mu)}\cdot\frac{\cosh\kappa_{2k}\gamma_n y}{\cosh(\kappa_{2k}\gamma_n h/2)}\right], \tag{23}$$
$$\kappa_{nk}^{as}=\rho\frac{{\omega_{nk}^{as}}^2}{\gamma_n^2}-p,\quad \kappa_{1k}=\sqrt{1-\frac{\kappa_{nk}^{as}}{\lambda+2\mu}},\quad \kappa_{2k}=\sqrt{1-\frac{\kappa_{nk}^{as}}{\mu}},$$

κ_{nk}^{as} – корень трансцендентного уравнения, а ω_{nk}^{as} – соответствующая частота свободных колебаний. Аналогичным образом для класса решений SA имеем трансцендентное уравнение и соответствующие собственные формы:

$$u_{nk}^{s}(y)=C\left[\frac{\cosh \kappa_{1k}\gamma_n y}{\sinh(\kappa_{1k}\gamma_n h/2)}-\frac{\kappa_{1k}\kappa_{2k}}{1-\kappa_{nk}^{as}/(2\mu)}\cdot\frac{\cosh \kappa_{2k}\gamma_n y}{\cosh(\kappa_{2k}\gamma_n h/2)}\right],$$

$$v_{nk}^{a}(y)=\kappa_{1k}C\left[\frac{\sinh \kappa_{1k}\gamma_n y}{\sinh(\kappa_{1k}\gamma_n h/2)}-\frac{1}{1-\kappa_{nk}^{as}/(2\mu)}\cdot\frac{\sinh \kappa_{2k}\gamma_n y}{\sinh(\kappa_{2k}\gamma_n h/2)}\right], \qquad (24)$$

$$\kappa_{nk}^{sa}=\rho\frac{{\omega_{nk}^{sa}}^2}{\gamma_n^2}-p,\quad \kappa_{1k}=\sqrt{1-\frac{\kappa_{nk}^{sa}}{\lambda+2\mu}},\quad \kappa_{2k}=\sqrt{1-\frac{\kappa_{nk}^{sa}}{\mu}},$$

где κ_{nk}^{sa} – корень трансцендентного уравнения, а ω_{nk}^{sa} – соответствующая частота свободных колебаний. Приведенные соотношения в замкнутой аналитической форме описывают решения задачи о свободных планарных гармонических колебаниях сжимаемой (растягиваемой) прямоугольной пластинки. В частности, при отсутствии напряжений растяжения–сжатия приведенные выражения описывают частоты и отвечающие им собственные формы свободных колебаний прямоугольной пластинки. С другой стороны, при отсутствии колебаний и в случае сжимающих напряжений этими же выражениями описываются критические силы и отвечающие им собственные формы потери устойчивости пластинки в своей плоскости для произвольных значений отношения сторон $0 < h/l < \infty$.

Обратимся теперь к асимптотическому анализу решений класса *AS* и рассмотрим случай удлиненных прямоугольных пластин ($h/l \ll 1$). Примем также, что значения параметра $n\pi h/l \ll 1$. Это означает, что рассматриваются колебания пластины с частотами из нижней части спектра частот. Тогда при $\omega_{nk}^{sa}=0$ приходим к асимптотическому представлению для критических сжимающих усилий

$$p_n=-\frac{4}{3}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{n\pi h}{2l}\right)^2\left[1-\frac{27\lambda+34\mu}{15(\lambda+2\mu)}\left(\frac{n\pi h}{2l}\right)^2+\ldots\right],$$
$$n=1,2,\ldots,\quad \frac{n\pi h}{l}<<1. \qquad (25)$$

Отметим, что асимптотическое представление для критической силы, отвечающее значению $n = 1$, приводится в работе А.Ю. Ишлинского [3] и имеет вид

$$p_1=-\frac{4}{3}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\pi h}{2l}\right)^2\left[1-\frac{3\lambda-4\mu}{15(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\pi h}{2l}\right)^2+\ldots\right]. \qquad (26)$$

Сопоставление выражений для критических сил p_1 (25), (26) показывает, что главные члены асимптотических разложений этих выражений совпадают, в то время как вторые слагаемые существенно различаются. В выражении (25) второе слагаемое всегда отрицательно, и, таким образом, в соответствии с общей теорией устойчивости упругих тел учет конечности размеров пластинки приводит к понижению критических сил. В то же время из выражения (26), полученного на основании анализа [3], следует, что в зависимости от значений постоянных Ламе учет конечности размеров пластинки может приводить как к увеличению, так и к уменьшению критических сил по сравнению с их главным асимптотическим значением.

Обратимся к анализу решений уравнения при $\gamma_n h/2=n\pi/(2l)>>1$, откуда приходим к асимптотическим зависимостям для частот свободных колебаний

$$\omega_{n,2k-1}^{sa\;2}(\gamma) \approx \frac{1}{\rho}\left[p + \left(1 + \frac{(2k-1)^2 l^2}{n^2 h^2} + \ldots\right)(\lambda + 2\mu)\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$
$$\omega_{n,2k+1}^{sa\;2}(\gamma) \approx \frac{1}{\rho}\left[p + \left(1 + \frac{(2k)^2 l^2}{n^2 h^2} + \ldots\right)\mu\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (27)$$

и отвечающих им асимптотическим представлениям для собственных форм

$$u_{n,2k-1}^{s}(y) = 0, \quad v_{n,2k-1}^{a}(y) = C_1 \sin\frac{(2k-1)\pi y}{h};$$
$$u_{n,2k}^{s}(y) = C_2 \cos\frac{2k\pi y}{h}, \quad v_{n,2k-1}^{s}(y) = 0. \qquad (28)$$

В заключение отметим, что, как показано выше, в прямоугольной пластинке при указанных граничных условиях существует счетное множество колебаний с локализованными формами в окрестности свободных продольных сторон.

Литература

1. *Rayleigh*, *J.W.* On the free vibration in an infinite plate of homogenous isotropic elastic matter / J.W. Rayleigh // Proc. Math. Soc. London. – 1889. – №20.

2. *Lamb*, *H.* On waves in an elastic plate / H. Lamb // Proc. Roy. Soc. London. – 1916. – №93A.

3. *Ишлинский*, *А.Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 2 / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – 416 с.

4. *Болотин*, *В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 332 с.

5. *Васидзу*, *К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

[24.05.2010]

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS AND STABILITY OF ELASTIC STRIPS AND RECTANGULAR PLATES LOADED IN TENSION AND COMPRESSION

N.V. Banichuk, A.A. Barsuk, S.Yu. Ivanova

The problem of free harmonic vibrations of an elastic isotropic strip loaded in tension (compression) by uniformly distributed forces of assigned intensity over its transversal cross-section is studied. The deformations of the strip are assumed to be in-plane. In the absence of axial forces, the problem in question coincides with the classical problem of free vibrations of an elastic strip investigated by Rayleigh and Lamb, and for the zero frequency in the case of compression it coincides with the problem of stability of a strip considered by Ishlinsky. A relation between the frequencies of free vibrations and the loading and geometrical parameters is obtained in analytical form. The obtained solution of the problem for a strip is shown to be, at the same time, the exact solution of the same problem for rectangular plates of finite dimensions for boundary conditions generated by the invariability relative to displacements. The results of the asymptotic analysis of the solution of the problem are presented.

Key words: free vibrations, stability, prestressed state.