

УДК 539.3

## **ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СОУДАРЕНИИ С ЖЕСТКИМИ ТЕЛАМИ<sup>\*)</sup>**

**Н.А. Абросимов, А.В. Елесин, Н.А. Новосельцева**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

Предлагается методика численного решения задач динамического деформирования композитных пластин при низкоскоростном соударении с абсолютно жесткими телами. На примере решения задачи динамического контактного взаимодействия стального шарика с композитной пластиной показана достоверность данного подхода, а также проведен анализ влияния различных параметров (скорости и массы ударника, структуры пакета) на величину контактной силы и прогиб в центре пластины.

*Ключевые слова:* композитные материалы, низкоскоростное соударение, численные методы.

### **Введение**

Для оценки сопротивляемости композитных материалов повреждениям необходим достоверный анализ динамического поведения композитных конструкций при ударных воздействиях. Удары возможны как на этапе изготовления (например, при падении инструмента), так и на этапе эксплуатации конструкции (старт космических объектов). Следствием ударов является ухудшение жесткостных и прочностных характеристик композитных конструкций из-за повреждений.

Первым шагом исследования сопротивляемости повреждениям композитных слоистых материалов является адекватное описание их неустановившегося поведения при ударе. Для понимания этого процесса необходимо наличие двух составляющих: во-первых, должна быть разработана математическая модель, учитывающая влияние сдвиговых деформаций и взаимозависимость изгиба и кручения, а также быструю изменяемость контактной нагрузки по временной и пространственным координатам; во-вторых, анализ реакции композитных элементов конструкций на ударное нагружение предполагает хорошую оценку величины контактной силы в течение всего процесса соударения. Задачи соударения при малой скорости рассматривались авторами статей [1–6]. В этих работах предусматривается знание закона деформирования (зависимости между контактной силой и вдавливанием),

---

<sup>\*)</sup> Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00500-а).

который применительно к слоистым композитам получают на основе результатов статических испытаний на вдавливание.

Настоящая статья имеет две цели. Первая – формулировка математической модели, позволяющей учесть упомянутые выше особенности поведения слоистых композитов при ударе и служащей основой для разработки метода анализа более сложных конструкций. Вторая цель заключается в применении этой модели для решения задач об ударе по слоистым композитам, чтобы выяснить характер влияния различных параметров на неустановившееся поведение слоистых композитных пластин при ударе.

### 1. Постановка и метод решения задачи

Полагается, что пластина образована перекрестной укладкой однонаправленного композитного материала. Отнесем пластину к декартовой системе координат  $\alpha_i$  ( $i = 1, 3$ ), направив ось  $\alpha_3$  по нормали к внутренней поверхности.

При построении геометрических зависимостей будем исходить из соотношений квадратичного варианта нелинейной теории упругости [7], которые с учетом недеформируемости материала пластины в направлении координаты  $\alpha_3$  и осреднения деформаций сдвига по толщине пластины можно представить в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2/2 + \alpha_3 \kappa_{11}, & e_{13} &= \varphi_1 + \varepsilon_{13}, & (1 \Leftrightarrow 2), \\ e_{12} &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23} + \alpha_3(\kappa_{12} + \kappa_{21}), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}, \quad (1 \Leftrightarrow 2),$$

$u_i(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $i = 1, 3$ ) – перемещения точек внутренней поверхности в направлениях  $\alpha_i$ ;  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ) – углы поворота нормали к внутренней поверхности.

Соотношения упругости композитной слоистой пластины устанавливаются на основе метода эффективных модулей и закона Гука для симметричной пары слоев с учетом ступенчатого изменения жесткостных характеристик по толщине пластины. При этом для описания напряженного состояния композитных пластин более естественной является формулировка определяющих соотношений посредством введения обобщенных силовых факторов – усилий и моментов, которые можно представить в виде [8, 9]:

$$\begin{aligned} N_{11} &= B_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + B_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + C_{11}\kappa_{11} + C_{12}\kappa_{22}, & N_{12} &= B_{33}\bar{\varepsilon}_{12} + C_{33}\kappa_{12}, \\ M_{11} &= C_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + C_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + D_{11}\kappa_{11} + D_{12}\kappa_{22}, & (1 \Leftrightarrow 2), \\ M_{12} &= C_{33}\bar{\varepsilon}_{12} + D_{33}\kappa_{12}, & Q_1 &= K_1(\varepsilon_{13} + \varphi_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2/2; & \bar{\varepsilon}_{12} &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}/2, & (1 \Leftrightarrow 2), \\ B_{jj} &= I_{jj}^{(0)}, & B_{12} = B_{21} &= J_{12}^{(0)}, & C_{jj} = I_{jj}^{(1)}, & C_{12} = C_{21} = J_{12}^{(1)}, \\ B_{33} &= I_{33}^{(0)}, & C_{33} &= I_{33}^{(1)}, \\ D_{jj} &= I_{jj}^{(2)}, & D_{12} = D_{21} &= J_{12}^{(2)}, & D_{33} &= I_{33}^{(2)}, \end{aligned}$$

$$K_j = h^2 \left[ \sum_{\kappa=1}^K \frac{z_\kappa - z_{\kappa-1}}{G_{j3}^{(\kappa)}} \right]^{-1}, \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (j=1, 2),$$

$$I_{11}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{11}^{(\kappa)} (z_\kappa^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}) \quad (i=0, 1, 2), \quad (1 \Leftrightarrow 2),$$

$$I_{33}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{33}^{(\kappa)} (z_\kappa^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}), \quad J_{12}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{12}^{(\kappa)} (z_\kappa^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}),$$

$z_\kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, K$ ) – координаты слоев, отсчитываемые от внутренней поверхности пластины.

Задача контактного взаимодействия пластины с жестким телом формулируется как несвободная вариационная задача. Абсолютно жесткий ударник может двигаться только в направлении оси  $\alpha_3$ .

Для описания совместного движения жесткого тела и пластины используется условие непроникания по нормали и вариационное уравнение динамики [10], которое для рассматриваемой системы может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \iint_F \left[ N_{11} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_1} + N_{21} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_2} + N_{22} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_1} + \right. \\ & \quad \left. + (Q_1 + N_{12} \varepsilon_{23} + N_{11} \varepsilon_{13}) \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_1} + \right. \\ & \quad \left. + (Q_2 + N_{21} \varepsilon_{13} + N_{22} \varepsilon_{23}) \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_2} + M_{11} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_1} + M_{21} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_2} + Q_1 \delta \varphi_1 + \right. \\ & \quad \left. + M_{22} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + Q_2 \delta \varphi_2 \right] d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \quad + \iint_F [(B_\rho \ddot{u}_1 + C_\rho \ddot{\varphi}_1) \delta u_1 + (B_\rho \ddot{u}_2 + C_\rho \ddot{\varphi}_2) \delta u_2 + B_\rho \ddot{u}_3 \delta u_3 + \\ & \quad + (D_\rho \ddot{\varphi}_1 + C_\rho \ddot{u}_1) \delta \varphi_1 + (D_\rho \ddot{\varphi}_2 + C_\rho \ddot{u}_2) \delta \varphi_2] d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint_F \sum_{i=1}^3 P_i \delta u_i d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & \quad - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i^*} (N_{11}^* \delta u_1^* + N_{21}^* \delta u_2^* + Q_1^* \delta u_3^* + M_{11}^* \delta \varphi_1^* + M_{21}^* \delta \varphi_2^*) d\alpha_2 - \\ & \quad - \sum_{i=3}^4 \int_{\Gamma_i^*} (N_{12}^* \delta u_1^* + N_{22}^* \delta u_2^* + Q_2^* \delta u_3^* + M_{12}^* \delta \varphi_1^* + M_{22}^* \delta \varphi_2^*) d\alpha_1 + \\ & \quad + \iint_S \lambda (\delta u_3 - \delta U_3) dS + m \ddot{U}_3 \delta U_3 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B_\rho = J_\rho^{(0)}, \quad C_\rho = J_\rho^{(1)}, \quad D_\rho = J_\rho^{(2)}, \quad J_\rho^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=i}^K \rho_k (z_k^{i+1} - z_{k-1}^{i+1}) \quad (i=0, 1, 2),$$

$P_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – компоненты внешней нагрузки по направлениям координатных осей

$\alpha_i$ ;  $N_{ij}^*$ ,  $Q_{ij}^*$ ,  $M_{ij}^*$  ( $i, j = \overline{1, 2}$ ) – усилия и моменты, действующие на границе расчетной области  $F$ ;  $\Gamma_i^*$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – граничные линии  $\alpha_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) = const области  $F$ ;  $S(t)$  – поверхность контакта пластины с жестким телом;  $\delta u_i$ ,  $\delta \varphi_i$ ,  $\delta U_3$  – произвольные кинематически допустимые изменения перемещений пластины и жесткого тела;  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа;  $m$  – масса жесткого тела; точка над буквой означает производную по времени.

Применяя к (3) известную процедуру преобразования интегралов (исключая при этом зависимые вариации перемещений пластины и жесткого тела в зоне контакта), получим:

– уравнения движения пластины:

$$\begin{aligned} L_1(N) + P_1 &= B_\rho \ddot{u}_1 + C_\rho \ddot{\varphi}_1; & L_2(N) + P_2 &= B_\rho \ddot{u}_2 + C_\rho \ddot{\varphi}_2; \\ L_1(M) - Q_1 &= D_\rho \ddot{\varphi}_1 + C_\rho \ddot{u}_1; & L_2(M) - Q_2 &= D_\rho \ddot{\varphi}_2 + C_\rho \ddot{u}_2; \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial \alpha_2} + P_3 &= B_\rho \ddot{u}_3; \\ L_1(T) &= \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_2}, & (1 \Leftrightarrow 2); \\ Q_{11} &= Q_1 + N_{11} \varepsilon_{13} + N_{12} \varepsilon_{23}, & (1 \Leftrightarrow 2); \end{aligned} \quad (4)$$

– естественные граничные условия на контурных линиях  $\Gamma_i^*$  ( $i = \overline{1, 4}$ ):

$$N_{11} = N_{11}^*; \quad N_{21} = N_{21}^*; \quad Q_{11} = Q_{11}^*; \quad M_{11} = M_{11}^*; \quad M_{21} = M_{21}^*; \quad (5)$$

– уравнение движения жесткого тела:

$$m \ddot{U}_3 = \iint_S p_3 dS, \quad (6)$$

где  $p_3$  – проекция контактного давления на ось  $\alpha_3$ .

Уравнения движения (4), (6) вместе с геометрическими (1) и физическими (2) соотношениями, краевыми (5) и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_i^0(\alpha_1, \alpha_2); & \varphi_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \varphi_j^0(\alpha_1, \alpha_2); \\ \dot{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_i^0(\alpha_1, \alpha_2); & \dot{\varphi}_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{\varphi}_j^0(\alpha_1, \alpha_2); \\ (i = \overline{1, 3}); & & (j = \overline{1, 2}); \\ U_3(0) &= U_3^0; & \dot{U}_3(0) &= \dot{U}_3^0 \end{aligned}$$

представляют полную систему уравнений, необходимую для исследования динамического деформирования композитных пластин при контактном взаимодействии с жесткими телами.

Численное решение сформулированной начально-краевой задачи осуществлялось на основе явной вариационно-разностной схемы [9].

## 2. Результаты решения задачи

Для проверки достоверности методики было проведено сравнение результатов расчета по данной методике с решениями, полученными в работах [2, 3]. Рассматривалось динамическое деформирование композитной пластины со свободными краями толщиной  $h = 0,0027$  м и линейными размерами  $L_1 = 0,1524$  м,  $L_2 = 0,1016$  м

при контактном взаимодействии с ударником. Ударник имел сферическую головку радиуса  $R = 0,00635$  м, масса ударника  $m_1 = 8,5 \cdot 10^{-3}$  кг [2],  $m_2 = 3,2 \cdot 10^{-2}$  кг [3]. Удар наносился по центру пластины с начальной скоростью  $\dot{U}_3(0) = 3$  м/с. Физико-механические характеристики элементарного слоя пластины:  $E_1 = 120$  ГПа,  $E_2 = 9$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,5$  ГПа,  $\rho = 1,58 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Структура пакета имеет вид  $[0^0/45^0/0^0/-45^0/0^0]_S$ .

На рис. 1 приведены графики изменения контактной силы во времени, рассчитанные по вышеописанной методике (сплошные линии) и приведенные в работах [2, 3] (штриховые линии). Кривые 1 и 2 получены для ударников массой  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Наблюдается достаточно хорошее соответствие результатов.

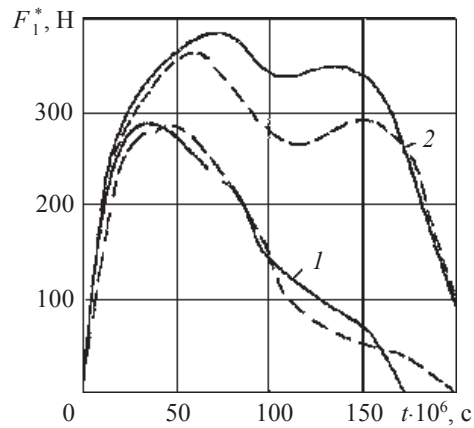


Рис. 1

На примере трехслойной прямоугольной пластины симметричного строения исследовалось влияние скорости и массы ударника на процесс деформирования. Рассматривалась пластина толщиной  $h = 0,003$  м ( $h_1 = h_2 = h_3$ ) с линейными размерами  $L_1 = 0,174$  м,  $L_2 = 0,042$  м, жестко зашеченная по краям  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_1 = L_1$  и свободная по другим краям. Удар наносился по центру пластины сферическим ударником радиусом  $R = 0,0075$  м. Физико-механические характеристики слоя пластины:  $E_1 = 120$  ГПа,  $E_2 = 7,9$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,5$  ГПа,  $\rho = 1,58 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Структура пакета имеет вид  $[0^0/90^0/0^0]$ .

На рис. 2 и 3 приведены графики изменения максимального прогиба пластины (сплошные линии), максимальной контактной силы (штриховые линии) и времени соударения (штрихпунктирные линии) в зависимости от скорости соударения при взаимодействии с ударником массой  $m = 0,01$  кг (рис. 2) и в зависимости от массы ударника при скорости соударения  $\dot{U}_3^0 = 3$  м/с (рис. 3).

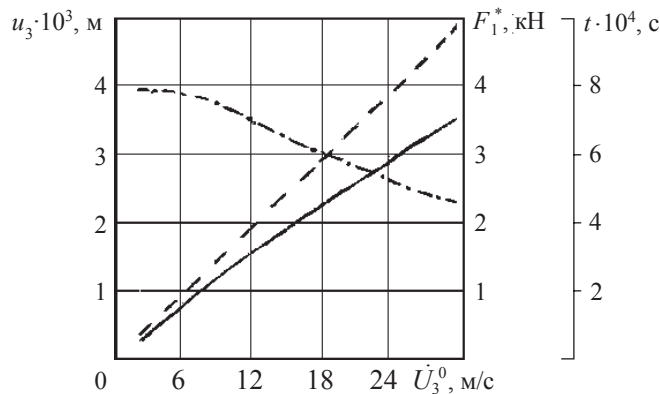


Рис. 2

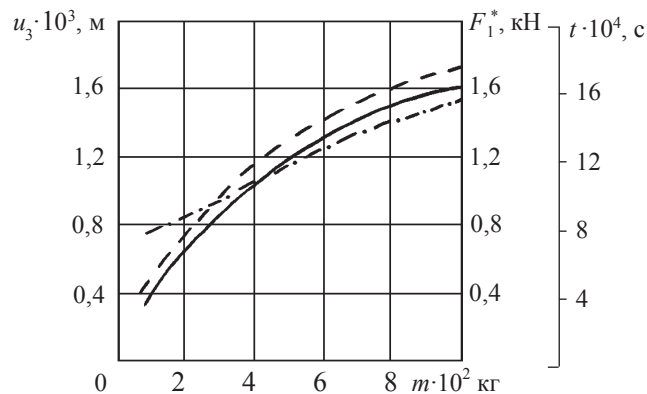


Рис. 3

Полученные результаты показывают, что в исследованном диапазоне параметров нагружения максимальные значения контактной силы и прогиба пластины практически прямо пропорционально зависят от скорости соударения. Зависимости контактной силы и прогиба в центре пластины нелинейно растут с увеличением массы ударника.

### Заключение

Представленные результаты позволяют сделать вывод о достоверности разработанной методики и возможности решения достаточно широкого класса задач динамического деформирования композитных пластин при контактном взаимодействии с жесткими телами.

### Литература

1. Грещук, Л.Б. Разрушение композитных материалов при ударах с малыми скоростями / Л.Б. Грещук // Динамика удара. – М.: Мир, 1985. – С. 8–46.
2. Sun, S.T. On the impact of initially stressed composite laminates / S.T. Sun, J.K. Chen // Composite Materials. – 1985. – №19. – P. 490–504.
3. Tan, T.N. Wave propagation in grafit/epoxy laminates due to impact / T.N. Tan, S.T. Sun // Appl. Mech. – 1985. – №52. – P. 6–12.
4. Санкар, Б.В. Реакция предварительно нагруженной балки из слоистого композита на соударение при малой скорости / Б.В. Санкар, К.Т. Сан // Аэрокосмическая техника. – 1986. – №4. – С. 154–162.
5. Ramkumar, R.L. Dynamic response of curved laminated plates subjected to low velocity impact / R.L. Ramkumar, Y.R. Thakar // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. – 1987. – V. 109, №1. – P. 67–71.
6. Christoforou, A.P. Analysis of impact response in composite plates / A.P. Christoforou, S.R. Swanson // Int. J. Solids Structures. – 1991. – V. 27, №2. – P. 161–170.
7. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – Л.–М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
8. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
9. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
10. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

[27.09.2010]

## **DYNAMIC DEFORMATION OF COMPOSITE PLATES IMPACTING ON RIGID BODIES**

**N.A. Abrosimov, A.V. Yelesin, N.A. Novosel'tseva**

A methodology for numerically analyzing problems of dynamic deformation of composite plates impacting with low velocities on perfectly rigid bodies is presented. The adequacy of the approach is demonstrated using the analysis of the problem of contact interaction between a steel ball and a composite plate. The influence of various parameters (velocity and mass of the striker, package structure) on the value of the contact force and the deflection in the centre of the plate is analyzed.

*Key words:* composite materials, low-velocity impact, numerical methods.