Глава 1
Модель операции в нормальной форме и принципы выбора решений

1.1 Противоречия и компромиссы в задачах выбора решений

Деятельность, осуществляемая людьми, обычно носит целенаправленный характер, т.е. направлена на достижение определенных целей. Указанная направленность обеспечивается ***выбором*** соответствующих действий (реализация которых предполагает наличие ресурсов). Таким образом, выбор способа поведения, включающий процесс принятия решений, является неотъемлемой частью целенаправленной деятельности.

Математическая тория, задачей которой является моделирование процессов принятия решений, получила название *исследования операций*, поскольку рассматриваемые ею задачи выбора поведения, обычно (следуя традициям анализа военных операций) называют ***операциями***. При этом участников операции, т.е. лиц, принимающих решения в ходе операции и осуществляющих действия, называют оперирующими сторонами, или ***сторонами*** в этой операции. В некоторых случаях возникает необходимость подчеркнуть, что работу по анализу операции и фактическое принятие конкретного решения осуществляют разные лица (или группы лиц). В таких случаях о разработчиках вариантов решений говорят как об ***исследователях операции***.

Заметим, что в одной и той же операции могут участвовать несколько сторон, что типично, например, для экономических, социальных и многих других взаимодействий. Поскольку возможны различия в интересах этих сторон, то возникает ***конфликт интересов***. Такую ситуацию принято характеризовать как принятие решений в условиях конфликта (именно в этом положении оказались лебедь, рак и щука — герои известной басни И.А.Крылова). Возникающее конфликтное взаимодействие в зависимости от характера расхождения интересов может приводить и к компромиссам и к острому противостоянию сторон.

Следующее обстоятельство связано с тем, что условия реализации планируемых действий могут быть не известны той или иной стороне, как это зачастую имеет место, например, в отношении погодных условий, играющих существенную роль для ведения сельскохозяйственных работ в районах с неустойчивым климатом. Похожая ситуация возникает при разработке многофункциональных технических систем. Решение об эффективной структуре системы, разумеется, зависит от относительной частоты использования тех или иных ее возможностей, однако эти интенсивности использования различных режимов могут быть недостаточно известны в период проектирования. Подобные ситуации обычно характеризуют как принятие решений в условиях ***неопределенности***.

Более того, сама цель, преследуемая конкретной стороной, может быть противоречивой. Эта противоречивость зачастую является следствием изначальной противоречивости тех требований, которые предъявляются к решению. Например, требования высокой прочности и одновременно малой материалоемкости, или требования высокого качества и одновременно низкой стоимости обычно оказываются противоречивыми. Разумеется, время от времени создаются новые материалы, открываются новые физические эффекты и появляются основанные на них новые технологии, позволяющие улучшить одновременно все показатели. Но такие возможности возникают относительно редко. В рамках же существующих подходов приходится искать компромиссы, примиряющие противоречивые требования к принимаемым решениям.

Сами по себе цели операции могут иметь различные источники возникновения. Они могут задаваться (как это имеет место при постановке задач в военных операциях). Они могут внушаться (именно эту цель преследует реклама, как в сфере торговли, так и в сфере политики). Они могут воспитываться опытом. При этом следует отметить возможную противоречивость самого процесса целеполагания, поскольку цели могут изменяться в процессе разработки операции. Яркий пример такого рода приведен в работе В.Г.Карманова и В.В.Федорова[12]. Пример связан с задачей создания акустического прибора для обнаружения подводных лодок, поставленной правительством США перед известным изобретателем Т.А.Эдисоном[13] в 1917 году. Анализируя более широкую проблему защиты надводного флота от действий подводных лодок, Т.Эдисон установил, что, с одной стороны, пароходные компании продолжают использовать в военное время известные маршруты мирного времени, а с другой стороны, только 6% судов потоплено в ночное время. Кроме того, оказалось, что подводные лодки редко атакуют на мелководье. В результате (вместо акустического прибора) Т.Эдисон предложил рекомендации, согласно которым следовало отказаться от стандартных маршрутов, в глубоководные порты и опасные зоны заходить только ночью, а в дневное время укрываться в гаванях и на мелководье.

Еще одна грань проблемы выбора решений связана с тем, что стороны могут не адекватно оценивать условия операции, включая случаи неправильных представлений о возможностях друг друга и о собственных возможностях. При этом степень информированности или недостаточная информированность могут быть различными для разных сторон.

Следствием отмеченных выше обстоятельств (список которых может быть продолжен) является, как уже было отмечено, противоречивый характер задач выбора решений, что усложняет

---

[12] Карманов В.Г., Федоров В.В. Моделирование в исследовании операций. М.: Твема, 1996.

[13] Эдисон Томас Алва (1847-1931) — американский изобретатель (автор более 1000 изобретений) и предприниматель.

формирование представлений о «лучших» решениях. Ситуация еще более усложняется, если в операции участвуют более двух сторон, поскольку в этом случае одни из них могут объединяться в коалиции против других. При этом возникает необходимость анализа конфликтных отношений как между коалициями, так и внутри коалиций. Более того, требуется исследовать сам процесс формирования коалиций.

Поскольку принятие решений является одной из старейших областей человеческой деятельности, то не удивительно, что история дает многие образчики высочайшего искусства политического, экономического и военного руководства странами и народами, продемонстрированными выдающимися лидерами в разные эпохи. Однако обучение через медленное накопление опыта в практике реального управления становится сегодня недостаточным.

Новое время отличается стремительно возрастающей сложностью жизни, которая проявляется как в сложности современных изделий и технологических процессов, так и в усложнении взаимоотношений людей, обеспечивающих создание и использование изделий небывалой сложности путем глубокого разделения труда и широчайшей кооперации. Усложняются и средства, обеспечивающие эти масштабные взаимодействия. Достаточно заметить, что скоростной транспорт, телеграф, телефон и радиосвязь дополнились возможностями глобальных компьютерных сетей, совершивших переворот в мире транспорта, снабжения, банковского дела и во многих других областях.

Эти усложнения «социально-технологических» взаимодействий сопровождаются усложнениями взаимодействий социально-политических (достаточно отметить, например, процесс европейской интеграции). В новых условиях возникает острая потребность дополнить арсенал средств, характерных для *искусства* принятия решений, массовым применением эффективных *научных подходов* (с учетом тех обстоятельств, о которых коротко говорилось выше). Теория исследования операций, сложившаяся в XX веке (преимущественно в период после Второй мировой войны), во многом является ответом на указанную потребность.

Многие разделы прикладной математики (в некоторых классификациях их называют разделами кибернетики) рассматриваются как составные части теории исследования операций. К их числу относят теорию массового обслуживания, методы оптимизации, линейное и нелинейное программирование, и др. Отличительной чертой перечисленных разделов является то обстоятельство, что рассматриваемые в них задачи выбора решений включают математическую формулировку цели операции как некоторой оптимизационной задачи. При этом центр исследования смещается к вопросам выбора решения, обеспечивающего оптимум заданного функционала (при тех или иных дополнительных условиях). Кроме того, в сложившейся практике отечественной высшей школы эти разделы обычно представлены самостоятельными дисциплинами в учебных планах по многим специальностям.

Главной задачей настоящей книги является введение читателя в область исследования *фундаментальных черт* поведения сторон, находящихся в конфликте и в условиях неопределенности. Предлагаемый аппарат исследования основан на анализе соответствующих математических моделей и имеет целью формирование (с использованием средств математики) адекватных представлений о *рациональном поведении* в описанных выше противоречивых ситуациях. Книга знакомит как с нормативным подходом (когда даются рекомендации по наилучшему поведению в конфликтных ситуациях определенного типа), так и с методами прогнозирования поведения сторон, позволяющими оценивать возможные исходы конфликтов.

1.2 Математическая модель задачи выбора решений

Стратегии сторон и исходы операции

Пусть в операции участвуют две стороны, для обозначения которых будем использовать соответственно символы P_1 и P_2. Примем, что сторона P_1 выбирает решение x из множества X, а сторона P_2 — решение y из множества Y. При этом допускается, что решения x и y могут определять не только отдельные действия, но и некоторые планы действий сторон, которые будут ими последовательно реализовываться в условиях конфликта (с учетом реакций другой стороны). В связи с этим будем называть выбираемые сторонами решения ***стратегиями***.

Заметим, что принятое описание возможностей сторон не раскрывает указанных выше деталей их допустимого поведения. Способы создания таких описаний будут рассмотрены позже. Фактически на данном этапе рассмотрения символы x и y рассматриваются как «указатели» конкретных стратегий. Следует также отметить, что вводимое описание не характеризует ресурсов, необходимых для реализации выбираемых стратегий. Принимается, что во множества X и Y включены указатели лишь таких стратегий, реализация которых обеспечена необходимыми ресурсами.

Действия сторон в ходе операции завершаются некоторым ***исходом***, который зависит от стратегий, использованных сторонами. Однако этот исход может зависеть и от некоторых других факторов (например, от погодных условий), которые не управляются сторонами, участвующими в операции. Будем называть эти факторы ***состояниями природы*** (или неконтролируемыми параметрами) и обозначать символом $u \in U$ (полагаем, что множество U содержит все возможные значения состояний природы). Здесь, как и в случае обозначений, использованных для стратегий сторон, символ u играет роль указателя определенного состояния природы. В каждой конкретной задаче неконтролируемые параметры могут иметь собственную интерпретацию.

Обозначим исход операции символом $z \in Z$ (знак Z соответствует множеству всех возможных исходов) и опишем зависимость исхода от стратегий, выбранных сторонами, и от неконтролируемых параметров как отображение вида:

$$z=f(x, y, u), \quad x \in X,\ y \in Y,\ u \in U. \qquad (1.2.1)$$

Для каждой конкретной задачи принятия решений должно быть построено свое отображение указанного вида. Запись (1.2.1) означает лишь, что соответствующее отображение входит в рассматриваемую схему моделирования.

Описание интересов сторон

Независимо от источника, определяющего цели сторон в конкретной операции, наличие интересов у стороны P_i, i=1,2, в этой операции проявляется в том, что любые два ее исхода z_1 и z_2, вообще говоря, *не равноценны* для указанной стороны. Формальное описание этого обстоятельства может быть обеспечено введением соответствующих бинарных отношений на множестве исходов Z.

Выделим во множестве Z такие два исхода z_1 и z_2, что сторона P_1 считает исход z_1 *более предпочтительным*, чем исход z_2. Такие два исхода необходимо найдутся во множестве Z, ибо противный случай будет свидетельствовать об отсутствии у стороны P_1 каких-либо интересов в рассматриваемой операции. Обозначим символом T_1 подмножество всех пар (z_1, z_2) из прямого произведения Z×Z, обладающих указанным свойством. Выделенное подмножество определяет график *отношения строгого предпочтения* на множестве исходов Z, ибо из того, что $(z_1, z_2)\in T_1$ (эквивалентная форма записи этого факта есть $z_1T_1z_2$) следует, что для стороны P_1 исход z_1 строго предпочтительнее исхода z_2.

Если теперь выделить из множества $Z\times Z$ подмножество I_1 всех таких пар (z_1, z_2), что для стороны P_1 исход z_1 *равноценен* исходу z_2, то I_1 определяет график *отношения безразличия* на множестве исходов Z. Объединяя отношения T_1 и I_1, получим отношение нестрогого предпочтения

$$R_1=T_1\cup I_1, \tag{1.2.2}$$

по которому можно восстановить исходные отношения T_1 и I_1.

Действительно,

$$(z_1R_1z_2)\cap(z_2R_1z_1)\leftrightarrow(z_1I_1z_2), \qquad (1.2.3)$$

$$(z_1R_1z_2)\cap\neg(z_2R_1z_1)\leftrightarrow(z_1T_1z_2). \qquad (1.2.4)$$

Примем, что введенное отношение нестрогого предпочтения R_1 является *транзитивным*, т.е. что оно удовлетворяет условиям:

$$(z_1R_1z_2)\cap(z_2R_1z_3)\rightarrow(z_1R_1z_3). \qquad (1.2.5)$$

Не все отношения, встречающиеся в практике взаимодействий, обладают свойством транзитивности. Типичным примером отсутствия этого свойства являются отношения превосходства между спортивными командами, когда команда A побеждает команду B, которая, в свою очередь, побеждает команду C, из чего, однако, не следует, что команда A сильнее команды C и сможет ее победить. Иными словами, введенное условие транзитивности (1.2.5) выделяет достаточно широкий класс задач, которым будет ограничено рассмотрение, проводимое ниже. Отметим, что при выполнении условий (1.2.5), отношения R_1, T_1 и I_1 соответственно называются *квазипорядком, строгим порядком* и *эквивалентностью*.

Следующее обстоятельство, на которое нужно обратить внимание, состоит в том, что множество исходов Z может содержать и *несравнимые элементы*. Т.е. могут существовать такие пары $(z_1, z_2)\in Z\times Z$, для которых справедливы отношения $(z_1, z_2)\notin R_1$, $(z_2, z_1)\notin R_1$. Мы, однако, ограничим наше рассмотрение случаем, когда во множестве исходов таких несравнимых пар нет. Заметим, что в этом случае введенное отношение нестрогого предпочтения R_1 из (1.2.2) называется *полным квазипорядком*.

Аналогичные отношения можно задать и для описания интересов стороны P_2. При этом в схему модели будут включены отношения полного квазипорядка R_2, строгого порядка T_2 и эквивалентности I_2, для которых справедливо подобное (1.2.2) отношение $R_2=T_2\cup I_2$ и имеют место свойства, аналогичные (1.2.3)–(1.2.5).

Введенные отношения дают простое правило, определяющее совпадение или не совпадение интересов сторон. Роль такого формального теста играет следующее отношение

$$R_1 \neq R_2, \tag{1.2.6}$$

отражающее различие интересов сторон.

Модель операции в нормальной форме

Непосредственное использование отношений R_1 и R_2, введенных выше для описания интересов сторон P_1 и P_2, предполагает задание всех пар (z_1, z_2), составляющих графики этих отношений. В случае, когда множество исходов Z содержит значительное число элементов, явное перечисление всех таких пар может оказаться слишком громоздким. Зачастую эту трудность можно преодолеть, вводя значительно более компактное описание отношений R_1 и R_2 с помощью вещественных функций $H_1(z)$ и $H_2(z)$, определенных на множестве исходов Z и *неубывающих* соответственно по предпочтениям R_1 и R_2.

Определение 1.1. Функция $H_i(z)$, определенная на множестве исходов Z, называется ***неубывающей по нестрогому предпочтению*** R_i, если

$$(\forall z_1, z_2 \in Z)\ \ z_1 R_i z_2 \rightarrow H_i(z_1) \geq H_i(z_2). \tag{1.2.7}$$

При этом, согласно (1.2.3) и (1.2.7),

$$(\forall z_1, z_2 \in Z)\ \ z_1 I_i z_2 \leftrightarrow H_i(z_1) = H_i(z_2).$$

В случае, когда выполняются также условия

$$(\forall z_1, z_2 \in Z)\ \ z_1 R_i z_2 \leftrightarrow H_i(z_1) \geq H_i(z_2), \tag{1.2.8}$$

говорят, что эта функция ***представляет отношение*** R_i. В последнем случае соответствующую функцию $H_i(z)$ называют ***функцией ценности*** или ***функцией полезности*** исхода $z \in Z$.

Теорема 1.1. *Функция* $H_i(z)$, *не убывающая по полному квазипорядку* R_i *и удовлетворяющая условиям*

$$(\forall z_1, z_2 \in Z)\ \ z_1 T_i z_2 \to H_i(z_1) > H_i(z_2), \qquad (1.2.9)$$

представляет этот квазипорядок.

Доказательство. Свойство не убывания, включенное в условия теоремы, гарантирует справедливость утверждения (1.2.7). Теперь допустим, что условия (1.2.8) не выполняются. Т.е. во множестве $Z \times Z$ существует хотя бы одна пара (z_1, z_2), для которой справедливо неравенство

$$H_i(z_1) \geq H_i(z_2), \qquad (1.2.10)$$

но не имеет места отношение $z_1 R_i z_2$.

В силу предположенной полноты квазипорядка R_i, это означает справедливость обратного отношения $z_2 R_i z_1$, которое, в соответствии с (1.2.2), эквивалентно условиям

$$(z_2 T_i z_1) \cup (z_2 I_i z_1). \qquad (1.2.11)$$

Согласно (1.2.3), истинность правого отношения в (1.2.11) противоречит принятому допущению о несправедливости $z_1 R_i z_2$. Допущение справедливости левого отношения в (1.2.11) ведет, согласно (1.2.9), к противоречию с (1.2.10). Таким образом, условия (1.2.8) необходимо выполняются для полного квазипорядка R_i. ■

Теорема 1.2. *Любой полный квазипорядок* R_i *на конечном множестве* Z *может быть представлен неотрицательной вещественной функцией* $H_i(z)$, *удовлетворяющей условиям* (1.2.8).

Доказательство проведем путем построения функции $H_i(z)$, $z \in Z$, удовлетворяющей указанным условиям. Пусть множество исходов $Z_0 = Z$ содержит N элементов. Выделим из множества Z_0 подмножество Z^1 всех исходов, удовлетворяющих условию:

$$(\forall z' \in Z^1)(\forall z'' \in Z_0) \quad z' R_i z''.$$

Заметим, что все исходы из множества Z^1 являются эквивалентными и каждый из них строго превосходит любой исход из множества $Z_1 = Z_0 \backslash Z^1$. Положим $H_i(z) = 1$, $z \in Z^1$.

Теперь построим подмножество Z^2 множества Z_1, удовлетворяющее условию:

$$(\forall z' \in Z^2)(\forall z'' \in Z_1) \quad z' R_i z''.$$

При этом все исходы из множества Z^2 являются эквивалентными, и каждый из них строго превосходит любой исход из множества $Z_2 = Z_1 \backslash Z^2$. Кроме того,

$$(\forall z' \in Z^1)(\forall z'' \in Z^2) \quad z' T_i z''.$$

Выберем число δ, $0 < \delta \le N^{-1}$, и положим $H_i(z) = 1 - \delta$, $z \in Z^2$.

Следуя описанной схеме, построим подмножество Z^{k+1} множества Z_k, $k \ge 1$, удовлетворяющее условию:

$$(\forall z' \in Z^{k+1})(\forall z'' \in Z_k) \quad z' R_i z''.$$

При этом все исходы из множества Z^{k+1} являются эквивалентными и каждый из них строго превосходит любой исход из множества $Z_{k+1} = Z_k \backslash Z^{k+1}$. Кроме того,

$$\left(\forall z' \in \bigcup_{l=1}^{k} Z^l\right)\left(\forall z'' \in Z^{k+1}\right) \quad z' T_i z''.$$

Положим $H_i(z) = 1 - k\delta$, $z \in Z^{k+1}$. Тогда

$$\left(\forall z' \in \bigcup_{l=1}^{k} Z^l\right)\left(\forall z'' \in Z^{k+1}\right) \quad H_i(z') > H_i(z'').$$

Описанный процесс построения множеств завершается при выполнении условия $Z_{k+1} = \emptyset$. При этом

$$Z = \bigcup_{l=1}^{k} Z^l$$

и функция $H_i(z)$ оказывается определенной для всех элементов $z \in Z$, причем, в силу способа построения, функция $H_i(z)$ является неубывающей по предпочтению R_i. Таким образом, любой полный квазипорядок на конечном множестве исходов, действительно, представим неотрицательной вещественной функцией. ■

Введение функций полезности $H_1(z)$ и $H_2(z)$ (которые заведомо существуют в задачах с конечными множествами исходов, а также — во многих задачах, содержащих бесконечное число исходов), фактически позволяет сторонам P_1 и P_2 иметь количественные оценки степени достижимости их целей при завершении операции в некотором исходе $z \in Z$. Указанные функции в сочетании с зависимостью (1.2.1) позволяют ввести ***критерии эффективности***

$$M_i(x, y, u) = H_i(f(x, y, u)), \quad i=1,2, \qquad (1.2.12)$$

непосредственно связывающие стратегии $x \in X$ и $y \in Y$, выбираемые сторонами P_1 и P_2, и реализующиеся в ходе операции состояния природы $u \in U$ с теми уровнями полезности, которые при этом достигаются.

Определение 1.2. Построенная модель, в которой о стратегиях x, y сторон P_1, P_2 и о состояниях природы u предполагается лишь то, что они являются элементами заданных множеств X,Y и U, на прямом произведении которых $X \times Y \times U$ заданы критерии эффективности (1.2.12), называется ***моделью операции в нормальной форме***.

Как следует из определения, модель операции в нормальной форме, представляющая собой совокупность вида:

$$M_i(x, y, u), \quad x \in X, y \in Y, u \in U, \quad i=1,2, \qquad (1.2.13)$$

не предполагает явного описания процесса реализации стратегий и необходимых для этого ресурсов. Ее основное назначение, как уже отмечалось, состоит в том, чтобы связать выбранные сторонами конкретные стратегии и реализовавшееся состояние природы (не контролируемое сторонами) с достигаемым каждой стороной уровнем полезности. Такое описание является достаточным для изучения одной из важнейших проблем теории принятия решений в условиях конфликта и неопределенности — проблемы характеризации эффективного поведения сторон в конфликте.

С одной стороны, введение критериев эффективности позволяет утверждать, что при заданной стратегии второй стороны и известном состоянии природы первая сторона заинтересована в выборе такой стратегии, которая максимизирует ее критерий, т.е. решает задачу

$$M_1(x, y, u) \underset{x\in X}{\to} \max. \qquad (1.2.14)$$

Однако сторона P_1, как уже говорилось, не контролирует выбор значений y,u и, более того, в общем случае, может не знать эти значения в момент выбора своей стратегии.

С другой стороны, сторона P_2, выбирая свою стратегию $y\in Y$, стремится максимизировать *свой* критерий эффективности, т.е. решает задачу

$$M_2(x, y, u) \underset{y\in Y}{\to} \max. \qquad (1.2.15)$$

При этом очевидно, что задачи (1.2.14) и (1.2.15), в общем случае, являются существенно различными. Поэтому необходимы подходы, позволяющие предложить сторонам (или той стороне, которую представляет исследователь операции) рекомендации, обеспечивающие эффективное поведение в условиях несовпадения интересов. Рассмотрение таких подходов (применительно к моделям вида (1.2.13), характеризующим экономические взаимодействия) составляет основное содержание настоящей книги.

Замечание 1.1 (об информированности сторон). 1) Помимо соотношений (1.2.13), описание модели должно включать указания, касающиеся степени ***информированности сторон*** об условиях операции. Эти указания определяют, в какой степени каждая из сторон осведомлена о своих возможностях и о возможностях другой стороны (т.е. в какой степени сторонам известны множества стратегий X и Y). Информированность стороны, как о «чужом», так и о «своем» критерии эффективности также может быть не полной. Как правило, это последнее обстоятельство связано не с тем, что сторона плохо осознает собственные интересы. Причина обычно состоит в том, что связи стратегий и состояний природы с определяемой ими оценкой эффективности могут быть недостаточно известны сторонам. Однако в рамках этой книги, являющейся, по существу, введением в теорию выбора решений, мы будем полагать, что обеим сторонам известны критерии (1.2.12), задающие модель (1.2.13) (при этом область определения критериев также полагается известной).

2) Как уже было отмечено, каждой стороне для решения соответствующей задачи выбора вида (1.2.14), (1.2.15) необходимы прогноз состояния природы и информация о действиях, планируемых другой стороной. Получение информации о выборе другой стороны может затрудняться ее противодействием (использованием маскировки, дезинформации и т.п.), которое диктуется различием интересов сторон. Поэтому предположение о том, что стороны проинформированы о планах друг друга, в общем случае является не реалистичным. Некоторые важные аспекты защиты собственных планов действий от попыток их раскрытия разведкой другой стороны составляют отдельный параграф этой книги. Значительное внимание будет уделено также различным подходам к оценке состояний природы.

3) Возможны, однако, задачи, в которых одна сторона получает достаточно полную информацию о намерениях другой стороны. В качестве примера рассмотрим случай, когда первая сторона, планируя закупку некоторого товара, заранее объявляет набор вариантов x, описывающих условия, в соответствии с которыми она готова осуществить указанную закупку. После полу-

чения этой информации вторая сторона (поставщик) может выбрать свой вариант предложения y. Таким образом, в этой задаче стратегия второй стороны может рассматриваться как функция вида $y(x)$. К более подробному обсуждению примера такого рода мы вернемся в следующем параграфе.

Замечание 1.2 (о числе участников операции). В общем случае в конфликт могут быть вовлечены более чем две стороны. При этом имеются в виду участники операции, каждый из которых осуществляет выбор действий, влияющих на исход операции. Т.е., например, торговая компания, осуществляющая деятельность на рынке, рассматривается как *один* из участников операции, в которой участвуют также другие торговые компании, фирмы, производящие и потребляющие продукцию, а также фирмы, предлагающие услуги по рекламе.

Рассмотрение, проводимое в этой книге, однако, охватывает лишь случай, когда число участников не превышает двух. Такой подход мотивируется тем, что, с одной стороны, поведение многих участников *бескоалиционного* конфликта во многом аналогично поведению участников в двухстороннем конфликте. Поэтому рассматриваемые ниже вопросы теории во многих случаях достаточно просто обобщаются на случай конфликта многих независимых сторон.

С другой стороны, изучение структур коалиций (если допускается, что коалиции возможны) составляет сложный и обширный самостоятельный объект теории, далеко выходящий за рамки задач и возможностей этой небольшой книги.

Замечание 1.3 (о классификации разделов теории исследования операций). Модель в нормальной форме, построенная для конкретных типов операций, может содержать не все компоненты, указанные в (1.2.13). Эта специфика может существенным образом использоваться при разработке аппарата анализа для соответствующих частных классов моделей. В связи с этим принято выделять следующие основные случаи:

1) Модели, задаваемые критериями вида

$$M_i(x, y), \quad x \in X, y \in Y, \quad i = 1,2, \tag{1.2.16}$$

в которых не учитываются состояния природы. Операции такого рода называются ***играми***, а их участники P_1 и P_2 — ***игроками***. Критерии эффективности, соответствующие играм, называют функциями выигрыша или ***платежными функциями***.

2) Задачи выбора в условиях неопределенности, характеризуемые единственным критерием вида

$$M(x, u), \quad x \in X, u \in U. \tag{1.2.17}$$

Единственная оперирующая сторона, фигурирующая в таких задачах, обычно именуется ***статистиком***. Подобные операции принято называть ***статистическими играми***. При этом вместо критерия эффективности $M(x, u)$ принято рассматривать функцию $L(u, x) = -M(x, u)$, интерпретируемую как ***потери*** статистика. Кроме того, для именования стратегий статистика в статистической игре обычно используется термин ***статистический критерий***.

3) Задачи оптимизации, которым соответствуют операции, задаваемые ***целевыми функциями*** $M(x)$, определенными на множествах возможных решений $x \in X$. Поскольку в таких задачах исход операции полностью определяется действиями единственного участника, то, согласно (1.2.14), выбор оптимальной стратегии $x^* \in X$ сводится к решению задачи максимизации вида

$$M(x^*) = \max\{M(x): x \in X\}. \tag{1.2.18}$$

Как следствие, центр исследований в таких задачах уходит от проблемы формирования представлений о рациональном (или о «наилучшем») поведении и смещается в область разработки численных (и аналитических) методов определения экстремумов из правой части (1.2.18). Уже упоминавшиеся методы оптимизации, а также методы линейного и нелинейного программирования составляют этот обширный раздел. Таким образом, рассмотрение, проводимое ниже, будет ограничено моделями вида (1.2.13), (1.2.16), (1.2.17).

Пример 1.1 (подготовка к участию в тендере[14]). Органы управления некоторой территорией планируют выполнение специальных работ (таких как, например, прокладка путепровода, возведение спортивного комплекса и т.п.) силами подрядчика, выбираемого на основе конкурса. Финансирование работ предусмотрено местным бюджетом.

Примем, что сроки проведения конкурса не утверждены (например, в силу их зависимости от обстоятельств, определяемых интересами различных групп влияния). Однако известно, что конкретный момент t проведения конкурса после его утверждения будет укладываться в отрезок времени, который мы обозначим как $[0,2]$ (например, два ближайших месяца или два квартала). Известно также, что определяющим критерием при выборе победителя конкурса является показатель качества, которое может обеспечить претендент при проведении работ. Для количественной оценки этого показателя (в таких единицах как, например, баллы и доли баллов, пункты и подпункты и т.п.) органами управления утверждена соответствующая методика.

Условия конкурса предусматривают ситуацию, когда уровни качества работ, заявленные и обоснованные участниками, оказываются одинаковыми (в рамках принятой системы оценки показателей). Для такого случая правила предусматривают согласительную процедуру, допускающую предложение сторонам совместно создать некоторое предприятие, которому и будет дан подряд на выполнение работ. Кроме того, конкурсная комиссия может отказать всем участникам, если предлагаемый ими уровень качества оказывается ниже некоторой отметки, также предусмотренной правилами.

Две фирмы, обозначаемые в дальнейшем, как P_1 и P_2, планируют участвовать в конкурсе. Примем, что оценка W_i качества работ, которую фирма P_i сможет подтвердить в случае проведе-

---

[14] *Тендер* — предложение поставить товары, услуги, заключить контракт (с конкретной ценой и прочими условиями), представляемое после объявления торгов в конкуренции с другими фирмами.

ния конкурса в момент t, зависит от объема ресурса x_i, вложенного этой фирмой за период $[0,t]$ в освоение более эффективных технологий ведения работ. Пусть обсуждаемая зависимость имеет вид:

$$W_i(x_i, t)=x_i(t-1)+1, \quad 0\le x_i\le 1, \quad i=1,2, \qquad (1.2.19)$$

где максимально доступный объем ресурса принят за единицу (см. рис. 1.1).

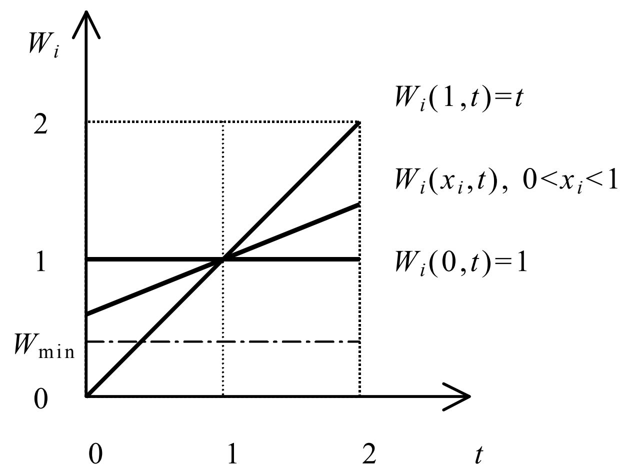

Рис. 1.1

Замечание 1.4 (об отложенном потреблении). Если фирма P_i не осуществляет инвестиций в освоение новых технологий (т.е., если P_i выбирает вариант $x_i=0$) и использует имеющиеся средства, например, для немедленного укрепления материальной базы, обеспечивающей ведение работ традиционным способом, то уровень качества $W_i(0, t)$ остается постоянным в течение всего периода [0,2]. При этом $W_i(0, t) =1$.

В случае вложения всех ресурсов в освоение новых технологий (т.е. при выборе варианта $x_i=1$), к концу периода [0,2] достигается более высокий уровень качества $W_i(1,2)=2$. Однако при этом в начальный момент $t=0$ уровень качества остается таким же, каким он был до начала подготовки к тендеру. Это значение принято за нулевую отметку — см. рис. 1.1.

В остальных случаях (т.е. при $0< x_i<1$) отрезок, представляющий график $W_i(x_i, t)$ на рис. 1.1, лежит в конусе, образованном графиками зависимостей $W_i(0, t) =1$ и $W_i(1, t) = t$. Следовательно, инвестирование части средств в новые технологии, а оставшихся средств — в укрепление технологии, использовавшейся ранее, позволяет, уже в начальный момент добиться превышения прежнего уровня качества. Это обстоятельство может быть существенным, поскольку, как уже было отмечено, условия конкурса предполагают, что параметр качества в любом случае должен быть не ниже некоторого значения $W_{\min}$ (см. рис. 1.1). С другой стороны, выбор положительного значения x_i обеспечивает последовательное наращивание показателя качества и гарантирует в периоде [1,2] превышение единичного уровня. Таким образом, при всей простоте зависимости (1.2.19) она правильно (хотя и схематично) отражает роль параметра x_i как показателя объема отложенного потребления.

Критерии эффективности сторон, соответствующие моменту $t\in[0,2]$ проведения конкурса, определяются различием уровней качества, которые стороны могут обеспечить в этот момент, т.е.

$$\mathrm{M}_1(x_1, x_2,t)=W_1(x_1, t)-W_2(x_2, t)=-\mathrm{M}_2(x_1, x_2, t). \qquad (1.2.20)$$

Таким образом, рассмотренному примеру соответствует модель операции в нормальной форме вида (1.2.13), причем роль стратегий $x=x_1$ и $y=x_2$ играют выбираемые сторонами объемы ресурса, инвестированного в развитие. Момент t проведения конкурса сторонам заранее не известен и может интерпретироваться как состояние природы. Т.е. $u=t$ и $U=[0,2]$, где, как уже отмечалось, само множество U является заданным.

Целью операции для каждой стороны является обеспечение максимального превосходства показателя качества, достигаемого *на момент конкурса*, над уровнем качества, достигаемого на тот же момент другой стороной. При этом мы будем полагать, что обеим сторонам известны как зависимости (1.2.19), (1.2.20), так и доступные объемы ресурсов $X=[0,1]$, $Y=[0,1]$.

Замечание 1.5 (о *противоположности интересов* сторон). То обстоятельство, что конкурсное соревнование уже само по себе определяет противоположность интересов сторон P_1 и P_2 находит свое отражение в вытекающем из (1.2.20) равенстве

$$\mathrm{M}_1(x_1, x_2, t)+\mathrm{M}_2(x_1, x_2, t)=0. \qquad (1.2.21)$$

Как следует из (1.2.21), всякое преимущество одной стороны достигается за счет потерь другой стороны. Ясно, что этот факт будет иметь место и в случае, когда сумма критериев M_1 и M_2 будет равна константе, отличной от нуля. При этом ненулевая константа, имеющая место в правой части (1.2.21), всегда может быть приведена к нулевому значению введением соответствующей нормировки критериев.

Заметим, что в случае, когда число сторон превышает две и допустимо объединение участников в коалиции, постоянная сумма всех критериев эффективности еще не означает противоположности интересов сторон, поскольку члены одной и той же коалиции могут находиться в кооперации, а не в противостоянии друга с другом. Следовательно, случай операции с двумя сторонами (говорят еще с двумя ***лицами***) и нулевой суммой критериев является в поведенческом отношении особым.

Определение 1.3. Операции двух лиц, характеризуемые нулевой суммой критериев эффективности сторон, называются ***антагонистическими***.

Замечание 1.6 (о *пороговых критериях*). Рассмотренный пример представляет собой частный случай задачи соревнования двух сторон. В задачах такого рода зачастую рассматривается не столько количественное различие достижений сторон, сколько факт превосходства показателей, достигнутых одной стороной, над показателями другой стороны. При этом все возникающие исходы можно классифицировать как «победы», «ничьи» и «поражения». Если принять, что победам, ничьим и поражениям соответствуют оценки 2, 1 и 0 «очков», то в рассматриваемой задаче можно ввести критерий эффективности вида:

$$\mathrm{N}_1(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 2, & W_1(x_1, t) > W_2(x_2, t), \\ 1, & W_1(x_1, t) = W_2(x_2, t), \\ 0, & W_1(x_1, t) < W_2(x_2, t). \end{cases} \qquad (1.2.22)$$

При этом

$$\mathrm{N}_2(x_1, x_2, t) = 2 - \mathrm{N}_1(x_1, x_2, t)$$

и, следовательно, задача остается антагонистической, хотя сумма критериев и не является нулевой.

Критерий (1.2.22) относится к числу так называемых ***пороговых критериев*** (результат, достигаемый другой стороной, рассматривается как порог, который нужно превысить). Мы, однако, будем рассматривать случай, когда критерий задается условиями (1.2.20), полагая, что стороны (допускающие несовершенство методики оценки качества) заинтересованы в достижении максимального возможного превосходства над конкурентом.

1.3 Устойчивость и эффективность поведения сторон

Проблема сравнения стратегий

Вернемся к рассмотрению описанного выше примера и рассмотрим вопрос о выборе стратегии, которую целесообразно использовать первой стороне для подготовки к участию в конкурсе. Очевидно, что формирование представления о *лучшей* стратегии x_1^* стороны P_1 предполагает либо возможность определения лучшего варианта для любой пары стратегий x_1', x_1'' этой стороны, либо — возможность установления *равноценности* стратегий, входящих в эту пару. Однако на множестве стратегий стороны P_1 не существует отношения предпочтения, позволяющего ответить на эти вопросы для любой пары x_1', x_1''.

Проиллюстрируем это важное обстоятельство путем сравнения уровней эффективности, обеспечиваемых соответственно стратегиями x_1=0 и x_1=1. Согласно (1.2.19) и (1.2.20),

$$\mathrm{M}_1(x_1, x_2, t)=(x_1-x_2)(t-1), \tag{1.3.1}$$

откуда вытекает, что

$$\triangle_1(x_2, t) = \mathrm{M}_1(x_1{=}0, x_2, t)-\mathrm{M}_1(x_1{=}1, x_2, t)=1-t \tag{1.3.2}$$

и, следовательно,

$$\triangle_1(x_2, t)>0,\ 0\le t<1; \quad \triangle_1(x_2, t)<0,\ 1<t \le 2;$$

и, $\triangle_1(x_2,1)=0$ (см. рис. 1.2). Таким образом, при неизвестном состоянии природы стратегии x_1=0 и x_1=1 оказываются ***несравнимыми***.

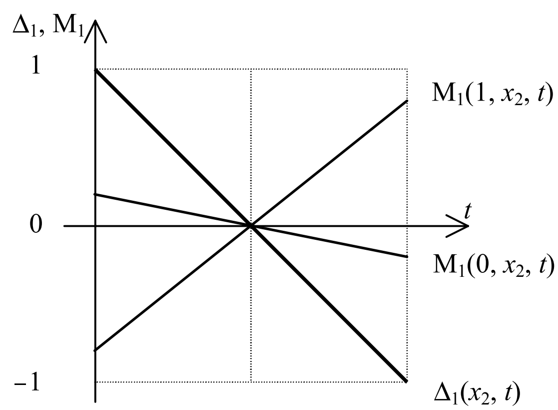

Рис. 1.2

Следовательно, введенная в модели упорядоченность всех исходов операции, с помощью которой мы описали интересы первой стороны, не порождает полного отношения предпочтений на множестве стратегий этой стороны. Причина состоит в том, что неопределенность значения параметра t вызывает неопределенность самого исхода. Поэтому возможность оценки эффективности конкретной стратегии, которая необходима для определения наилучшего выбора, оказывается фундаментально связанной с информированностью стороны о состоянии природы и (в общем случае) о действиях другой стороны.

Принцип максимума гарантированного результата

Как следует из предшествующего рассмотрения, для обеспечения сравнимости стратегий принципиально необходимо принять некоторую *гипотезу* о неизвестном состоянии природы. В рассматриваемом примере вся имеющаяся у стороны P_1 информация о сроке t проведения конкурса сводится к знанию интервала [0,2], заведомо содержащего этот неизвестный срок. В связи с указанной *неопределенностью* состояния природы, в качестве оценки эффективности любой стратегии можно принять тот уровень эффективности, который *гарантируется* использованием этой стратегии.

Замечание 1.7 (об ориентации на худший случай). Фактически, принятие гарантируемого стратегией уровня эффективности в качестве оценки, на которой будет основано сравнение этой стратегии с другими, означает *ориентацию на худший случай*.

Принятие такой оценки в качестве *прогноза* результатов планируемых действий является рекомендацией, основанной на обширном опыте принятия решений в практической деятельности. К этому «правилу худшего случая» приходят многочисленные исследователи опыта принятия решений, относящегося к самым различным областям человеческой деятельности. Приведем несколько примеров.

Известный американский специалист в области создания больших программных систем Ф.П.Брукс отмечает, что «наши методы оценки весьма несовершенны. Строго говоря, они отражают некоторое неявно высказываемое и в корне неверное допущение, что все будет идти хорошо, ... выполнение каждого задания займет ровно столько времени, сколько оно «должно» занять». И далее: «Планируйте неудачу: она вас, так или иначе, найдет»[15].

Можно даже говорить о возникновении своего рода «фольклора», вызванного к жизни необходимостью ориентации на худший случай в практике принятия решений. К числу таких новых жанров относятся, например, так называемые «законы Мэрфи»[16]:

- *Все сложнее, чем кажется.*
- *Все тянется дольше, чем можно ожидать.*
- *Все оказывается дороже, чем планировалось.*
- *Если что-то может испортиться, оно обязательно испортиться.*

По поводу этих законов некто Каллаген сделал следующее замечание[17]: «Мэрфи был оптимистом». Действительно, например, второй из «законов» неявно предполагает, что планируемая работа, в конце концов, все-таки завершится. Но этого успешного завершения может и не быть. В книге Дж.Фокса[18] сообщается, что «военно-воздушные силы США затратили более 300 млн. долларов на тщетную попытку автоматизировать комплексную систему перевозок и снабжения».

Вернемся к рассматриваемому примеру и построим оценку эффективности, которую гарантирует стратегия x_1 стороны P_1 при неизвестном сроке t проведения конкурса. Эта оценка худшего случая, очевидно, определяется величиной

---

[15] Брукс Ф.П. Как проектируются и создаются программные комплексы. М.: Наука, 1978.

[16] См., например, Хьюз Дж., Мичтом Дж. Структурный подход к программированию. М.: Мир, 1980.

[17] См. там же.

[18] Фокс Дж. Программное обеспечение и его разработка. М.: Мир, 1985.

$$M_1(x_1, x_2) = \min\{\mathrm{M}_1(x_1, x_2, t)\colon 0 \le t \le 2\}. \tag{1.3.3}$$

Подставляя в (1.3.3) правую часть выражения (1.3.1) для функции $\mathrm{M}_1(x_1, x_2, t)$, приводим оценку (1.3.3) к виду:

$$\min_{0\le t\le 2}(x_1 - x_2)(t-1) = \min_{0\le t\le 2}\begin{cases}|x_1 - x_2|(t-1), & x_1 \ge x_2,\\ |x_1 - x_2|(1-t), & x_1 \le x_2.\end{cases} \tag{1.3.4}$$

Теперь из (1.3.3), (1.3.4) следует, что

$$M_1(x_1, x_2) = -|x_1 - x_2|, \tag{1.3.5}$$

причем эта гарантированная величина реализуется либо в случае проведения конкурса в момент $t^*=0$, либо в случае проведения этого конкурса в момент $t^*=2$.

Первый случай соответствует ситуации, когда $x_1 \ge x_2$, а второй — ситуации, когда $x_1 \le x_2$, т.е.

$$M_1(x_1, x_2) = \begin{cases}\mathrm{M}_1(x_1, x_2, 0), & x_1 \ge x_2,\\ \mathrm{M}_1(x_1, x_2, 2), & x_1 \le x_2.\end{cases} \tag{1.3.6}$$

Теперь проведем аналогичное рассмотрение, руководствуясь интересами второй стороны. Определим уровень эффективности, который может быть обеспечен стороне P_2 выбором стратегии x_2 при некоторой известной стратегии x_1 первой стороны и неизвестном сроке проведения конкурса, т.е. вычислим величину

$$M_2(x_1, x_2) = \min\{\mathrm{M}_2(x_1, x_2, t)\colon 0 \le t \le 2\}. \tag{1.3.7}$$

Из (1.2.20), (1.3.1) и (1.3.7) следует, что

$$M_2(x_1, x_2) = -|x_1 - x_2|. \tag{1.3.8}$$

При этом справедливо следующее соотношение, являющееся аналогом выражения (1.3.6),

$$M_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{M}_2(x_1, x_2, 2), & x_1 \geq x_2, \\ \mathrm{M}_2(x_1, x_2, 0), & x_1 \leq x_2. \end{cases} \qquad (1.3.9)$$

Таким образом, согласно (1.3.5) и (1.3.8),

$$-1 \leq M_1(x_1, x_2) = M_2(x_1, x_2) \leq 0. \qquad (1.3.10)$$

Следовательно, при ориентации обеих сторон на худший случай (т.е. при использовании ими оценок гарантированного уровня эффективности) *противоположность* интересов сторон, характеризуемая нулевой суммой критериев (1.2.21), сменяется ситуацией полного *совпадения интересов.*

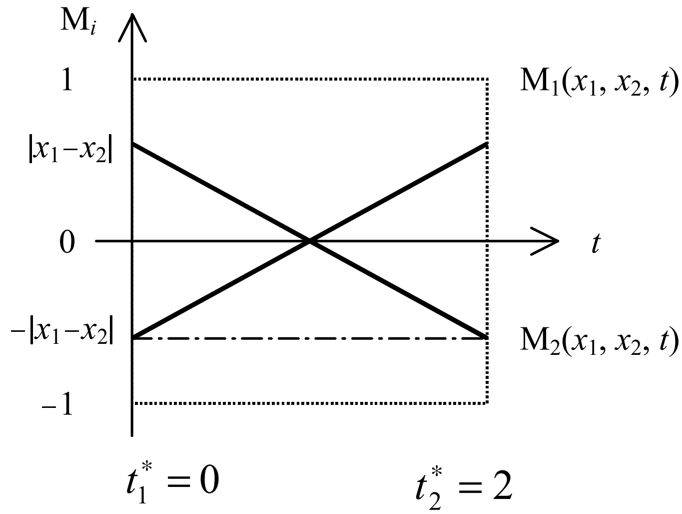

Рис. 1.3

Замечание 1.8 (о прогнозных оценках и оценках, реализующихся в ходе операции). Отмеченное совпадение интересов сторон при прогнозировании последствий выбора на основе оценок худшего случая не меняет факта (1.2.21) равенства нулю суммы их критериев в момент проведения конкурса. Дело в том, что, худшая оценка (1.3.5), прогнозируемая стороной P_1, например, для случая $x_1>x_2$ соответствует проведению конкурса в момент $t_1^*=0$. Что же касается худшей оценки (1.3.8), прогнозируемой стороной P_2 при том же условии $x_1>x_2$, то ей соответствует момент $t_2^*=2$. Рассмотренную ситуацию иллюстрирует рис. 1.3.

Таким образом, худшие опасения сторон не могут реализоваться одновременно. Если конкурс произойдет, например, в момент t=0, то при выполнении условий $x_1>x_2$, эффективность стороны P_1 действительно характеризуется величиной (1.3.5). Однако реализующаяся при этом оценка

$$\mathrm{M}_2(x_1, x_2, 0) = |\,x_1 - x_2\,|$$

для стороны P_2 существенно превышает величину (1.3.8) поскольку момент t=0 проведения конкурса не совпадает со сроком $t_2^*=2$, определяющим наступление худшего случая.

Совпадение интересов сторон при ориентации выбора стратегий на достижение *максимального гарантированного результата* позволяет им вступить в кооперацию и договориться о выборе некоторого одинакового уровня инвестиций α, который задает стратегическую пару $\left(x_1^*, x_2^*\right)$, удовлетворяющую условию

$$x_1^* = x_2^* = \alpha, \quad \alpha \in [0,1], \tag{1.3.11}$$

и обеспечивающую каждой из сторон максимальную оценку

$$M_i(x_1^*, x_2^*) = \max_{0 \le x_1, x_2 \le 1} M_i(x_1, x_2) = 0; \tag{1.3.12}$$

ср. с правым неравенством в (1.3.10).

Правила конкурса предполагают, что уровень качества, обеспечиваемый участниками, в любом случае должен быть не ниже, чем заданный порог $W_{\min}$, где $0 \le W_{\min} \le 1$. Поэтому, учитывая (1.2.19) и (1.3.11), получаем, что совместно выбираемый сторонами P_1 и P_2 уровень инвестиций α должен удовлетворять условиям

$$\min_{0\le t\le 2} W_i(x_i^*,t)=\min_{0\le t\le 2}\left[\alpha(t-1)+1\right]\ge W_{\min},\quad i=1,2.$$

Следовательно, параметр α должен удовлетворять неравенствам

$$0\le\alpha\le 1-W_{\min}. \qquad (1.3.13)$$

Замечание 1.9 (о *лексикографически упорядоченных критериях*). Выбор сторон, отвечающий условиям (1.3.11), (1.3.13) и максимизирующий гарантированные сторонам (одинаковые) уровни эффективности, приводит к ситуации, когда конкурсная комиссия не сможет назвать победителя. При этом сторонам, в соответствии с правилами проведения конкурса, будет предложено реализовать подряд совместно. Однако, как следует из (1.3.11), (1.3.13), полученное решение является не единственным, если справедливо неравенство $W_{\min}<1$. В связи с этим стороны могут использовать остающийся выбор для улучшения показателей своей деятельности. Фактически, рассмотрение этих дополнительных возможностей представляет собой определенное *расширение* исходной модели.

Например, стороны могут договориться об экономии средств за счет сокращения инвестиций в новые технологии. Решение, отвечающее этому дополнительному требованию, определяется условием $\alpha=0$, которое совместимо с неравенствами (1.3.13). Введенный новый критерий можно дополнить условием достижения заданного уровня качества $W_{\max}\ge 1$ к концу периода [0,2]. Такое требование может быть следствием планов сторон на будущее. Этому дополнительному условию удовлетворяет значение

$$\alpha=W_{\max}-1, \qquad (1.3.14)$$

которое, в случае справедливости неравенства

$$W_{\min}+W_{\max}\le 2, \qquad (1.3.15)$$

совместимо с (1.3.13). Графики на рис. 1.4 представляют показатели качества сторон, соответствующие решениям вида (1.3.11), удовлетворяющим дополнительным условиям (1.3.13), (1.3.14) в предположении справедливости неравенства (1.3.15).

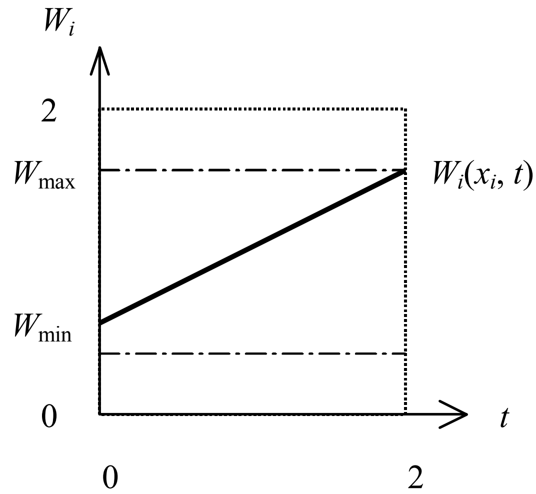

Рис. 1.4

Проведенное рассмотрение, как уже отмечено, дополняет критерий $M_i(x_1,x_2)$ стороны P_i, i=1,2, максимум которого достигается на множестве решений, удовлетворяющих условиям (1.3.11), вторым критерием. Этот второй критерий, отражающий необходимость экономии ресурса, можно формально задать, как $\mu_i(x_i)=-x_i$, и считать определенным лишь на указанном выше множестве (т.е. при $x_1=x_2$). Вводимое при этом дополнительное требование состоит в максимизации $\mu_i(x_i)$ при условии $\alpha \geq W_{max}-1$. Таким образом, в результате расширения модели задача выбора для стороны P_i включает два критерия, упорядоченных по важности (или, как говорят, ***лексикографически упорядоченных***). Еще раз отметим, что указанное упорядочение предполагает максимизацию второго критерия на множестве стратегий, обеспечивающих максимизацию первого критерия.

Устойчивость и эффективность решений

Использование в рассмотренном выше примере оценок гарантированной эффективности стратегий (по отношению к возможным значениям неопределенного состояния природы) привело к тому, что проблема выбора стратегий

$$x = x_1 \in X=[0,1], \quad y=x_2 \in Y=[0,1] \tag{1.3.16}$$

сторонами P_1 и P_2 оказалась связана с анализом некоторой *игры* вида (1.2.16) с *функциями выигрыша* соответственно (1.3.3) для игрока P_1 и вида (1.3.7) для игрока P_2. При этом решения вида (1.3.11), максимизирующие, согласно (1.3.12), платежные функции участников этой игры, обладают двумя исключительно важными свойствами.

Во-первых, игроки P_1 и P_2 *не заинтересованы в отклонении* от поведения, определяемого этими стратегиями, поскольку любые такие отклонения могут лишь уменьшить уровень полезности, гарантируемый им стратегиями

$$x^* = x_1^*, \quad y^* = x_2^*, \quad x^* = y^* \tag{1.3.17}$$

из (1.3.11). Действительно, как следует из (1.3.12),

$$\begin{aligned} &(\forall x \in X)\ M_1(x^*, y^*) \geq M_1(x, y^*), \\ &(\forall y \in Y)\ M_2(x^*, y^*) \geq M_2(x^*, y). \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

При этом характеризуемое отношениями (1.3.18) свойство *устойчивости поведения* (1.3.17) игроков P_1 и P_2 диктуется их собственными интересами и этим определяется *реализуемость* такого поведения.

Определение 1.4 (*Равновесие по Нэшу*). Пара стратегий (x^*, y^*) из множества $X \times Y$, удовлетворяющая неравенствам (1.3.18) для платежных функций $M_i(x,y)$, $i=1,2$, некоторой игры вида

(1.2.16), называется *устойчивой стратегической точкой* или ***стратегической точкой равновесия*** (по Нэшу[19]) в этой игре.

Второе важное свойство решения (1.3.17) определяется невозможностью улучшить гарантируемые этим решением уровни полезности (1.3.12) одновременно для обоих игроков. Таким образом, если свойство (1.3.18) устойчивости решения определяет отсутствие у каждой из сторон P_1 и P_2 каких-либо *индивидуальных* мотивов для смены поведения, то обсуждаемое второе свойство указывает на отсутствие стимулов для смены поведения, реализуемой на основе каких-либо *взаимных договоренностей* между сторонами. Т.е. решение (1.3.17) оказывается ***не улучшаемым*** для обеих сторон.

Определение 1.5 (*Оптимальность по Парето*[20]). Стратегии (x^*, y^*), составляющие пару из множества $X\times Y$, называются ***эффективным*** или ***оптимальным по Парето*** решением игры вида (1.2.16), если в указанном множестве не существует другой пары (x', y') такой, что соответствующие ей выигрыши $M_i(x', y')$, i=1,2, превышают платежи $M_i(x^*, y^*)$, i=1,2, гарантируемые игрокам P_1 и P_2 стратегической парой (x^*, y^*). При этом указанное превышение должно быть строгим хотя бы для одной из сторон. Таким образом, стратегическая пара (x^*, y^*) является оптимальной по Парето, если она удовлетворяет условиям

$$\neg(\exists(x', y')\in X\times Y)\ \ [M_i(x', y')\geq M_i(x^*, y^*),\quad i=1,2], \qquad (1.3.19)$$

где хотя бы одно из неравенств является строгим.

Как уже было отмечено, в рамках описанной модели у игроков P_1 и P_1 нет ни индивидуальных, ни коллективных стимулов для отклонения от поведения, предписываемого *эффективной* парой стратегий (x^*, y^*), обладающей свойствами *равновесия по*

---

[19] Нэш Джон (р.1928) — американский экономист, лауреат Нобелевской премии (1994).

[20] Парето Вильфредо (1848–1923) — итальянский экономист и социолог.

Нэшу. В связи с этим стратегические пары (x^*, y^*) из множества $X \times Y$, обладающие указанными двумя свойствами, будем называть ***оптимальными решениями*** для игр вида (1.2.16). Следует, однако, заметить, что описанные выше свойства устойчивости и эффективности могут оказаться не совместимыми.

Проблема совместимости свойств устойчивости и эффективности решений

Пример 1.2 (*Дуополия*[21] Курно[22]). Рассмотрим один из вариантов модели рынка однородного товара, согласно которой на рынке действуют две фирмы P_1 и P_2, предлагающие для продажи в рассматриваемом периоде соответственно q_1 и q_2 единиц указанного товара (который мы будем считать сколь угодно *дробимым*). Таким образом, любое решение производителей P_1 и P_2, задаваемое парой (q_1,q_2), определяет общее количество товара

$$Q=q_1+q_2, \quad q_1\geq 0,\, q_2\geq 0, \tag{1.3.20}$$

предлагаемого для продажи в данный период. Примем, что *клиринговая цена p* (т.е. цена, по которой осуществляются расчеты по сделкам) зависит от количества поступившего на рынок товара и эта зависимость определяется выражением:

$$p(Q)=\begin{cases}\gamma(a-Q), & Q<a,\\ 0, & Q\geq a.\end{cases} \tag{1.3.21}$$

Замечание 1.10 (о выборе *диапазона цен*). Как следует из (1.3.21), с ростом объема Q товара, поступающего на рынок, цена p линейно убывает до нулевого значения и остается на этой нулевой отметке при дальнейшем увеличении объемов поступле-

---

[21] *Дуополия* — рынок, на котором действуют всего два продавца, которые не могут игнорировать друг друга.

[22] Курно Антуан Огюстен (1801–1877) — французский математик и экономист, предшественник математической школы в экономике.

ний. Разумеется, что производители не будут расширять производство при падении цен до нулевого уровня. Т.е. на любом реальном рынке заведомо выполняется условие $Q<a$ и, следовательно, графический образ множества *стратегических пар* (q_1,q_2), которые могут реализоваться, заведомо ограничен треугольником

$$q_1+q_2\leq a,\quad q_1\geq 0,\, q_2\geq 0, \qquad (1.3.22)$$

изображенным (жирными линиями) на рис. 1.5. Однако если ограничить решения сторон парами (q_1,q_2) из треугольника (1.3.22), то возможности выбора одной стороны оказываются связанными с фактическим выбором, осуществленным другой стороной. Это обстоятельство затрудняет непосредственное использование введенных выше понятий равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето, поскольку их определения предполагают, что стороны независимы в выборе своих стратегий (см. стр. 36).

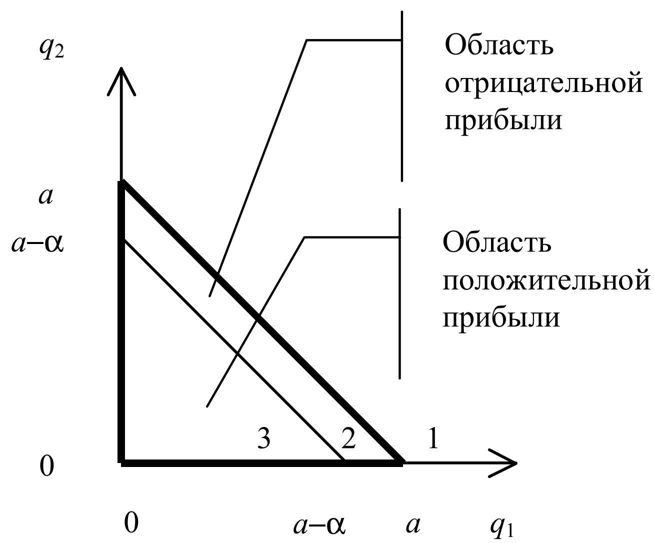

Рис. 1.5

Поэтому мы будем полагать, что определяемые сторонами P_1 и P_2 объемы предложения q_1 и q_2 могут соответствовать любой точке (q_1, q_2) из квадранта (1.3.20). Т.е. мы принимаем, что множества X и Y стратегий сторон P_1 и P_2 есть

$$X=[0,\infty), \quad Y=[0,\infty). \tag{1.3.23}$$

Множества стратегий сторон, задаваемые условиями (1.3.23), допускают использование произведения $X\times Y$ в определениях равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето.

Примем, для простоты рассмотрения, что условия производства на обеих фирмах являются одинаковыми и не предполагают постоянных затрат. Тогда общие затраты C_i, осуществляемые фирмой P_i для производства товара в количестве q_i, определяются величиной

$$C_i(q_i)=cq_i, \quad i=1,2, \tag{1.3.24}$$

где параметр c является константой (фактически, мы также дополнительно предположили линейную зависимость затрат от объемов выпуска).

Пусть π_i есть прибыль, получаемая фирмой P_i и представляющая собой разность дохода этой фирмы и осуществленных ею затрат (1.3.24). При сделанных предположениях зависимость прибыли π_i фирмы P_i от объемов выпуска обеих фирм, имеет вид:

$$\pi_i(q_1,q_2) = q_i\ p(Q)-cq_i.$$

Отсюда (после подстановки (1.3.21)) получаем выражение:

$$\pi_i(q_1,q_2) = -cq_i + \begin{cases} \gamma q_i(a-q_1-q_2), & q_1+q_2 < a, \\ 0, & q_1+q_2 \geq a, \end{cases} \tag{1.3.25}$$

которое в треугольнике (1.3.22) описывается более простой формулой

$$\pi_i(q_1,q_2)=\gamma q_i(a-\alpha-q_1-q_2),\ q_1+q_2\leq a,\ q_1\geq 0,\ q_2\geq 0,\ \alpha=c\gamma^{-1}. \tag{1.3.26}$$

При этом согласно (1.3.26), в подобласти треугольника (1.3.22), описываемой условиями

$$q_1+q_2\leq a-\alpha,\quad q_1\geq 0,\; q_2\geq 0, \tag{1.3.27}$$

прибыль является неотрицательной (см. рис. 1.5).

Соотношения (1.3.23) и (1.3.25) задают нормальную форму игры двух лиц, причем выражения (1.3.25) для прибыли, получаемой сторонами P_1 и P_2 в результате продажи товара, играют роль критериев эффективности, в максимизации которых заинтересованы эти стороны. Заметим, что интересы сторон в построенной игре являются несовпадающими и не противоположными (см. определение на стр. 26 и предшествующее ему замечание).

Исследуем вопрос о существовании устойчивых (по Нэшу) решений в рассматриваемой игре. Определим условия, при которых достигается максимум по q_i от прибыли $\pi_i(q_1,q_2)$, получаемой стороной P_i в предположении, что объем товара q_j, продаваемого другой стороной P_j $(i\neq j)$, является фиксированным. С этой целью рассмотрим производную

$$\frac{d\pi_i(q_1,q_2)}{dq_i}=\begin{cases}-c, & q_1+q_2>a,\\ \gamma\left[(a-\alpha)-2q_i-q_j\right], & q_1+q_2<a,\end{cases} \tag{1.3.28}$$

которая определена в квадранте (1.3.20) всюду, кроме точек, лежащих на прямой $q_1+q_2=a$. Допустим, что

$$q_j\leq a-\alpha. \tag{1.3.29}$$

Тогда производная (1.3.28) имеет нулевые значения во всех точках прямой

$$q_i=(a-\alpha-q_j)/2, \tag{1.3.30}$$

лежащих в квадранте (1.3.20). При этом условие (1.3.29) выполняется во всех таких точках и, кроме того, вторая производная по q_i от прибыли $\pi_i(q_1,q_2)$ является отрицательной.

Таким образом, на отрезке прямой (1.3.30), соответствующей случаю i=1, j=2 и лежащей в первом квадранте (1.3.20), достигается максимум прибыли стороны P_1 (при вариации объема выпуска q_1 и фиксированном объеме q_2). Указанный отрезок нанесен на рис. 1.6. Отрезок, состоящий из точек максимума прибыли стороны P_2, соответствующий случаю i=2, j=1, также нанесен на рис. 1.6. При этом, согласно (1.3.26), прибыль $\pi_i(q_1,q_2)$ стороны P_i в точках (q_1,q_2), лежащих на прямой (1.3.30), определяется выражением

$$\pi_i(q_1,q_2) = \gamma(q_i)^2, \quad q_i = (a-\alpha-q_j)/2, \quad i=1,2, \tag{1.3.31}$$

и, следовательно, растет с увеличением объема q_i. Указанные направления роста прибыли вдоль отрезков прямых линий вида (1.3.30) отмечены стрелками на рис. 1.6.

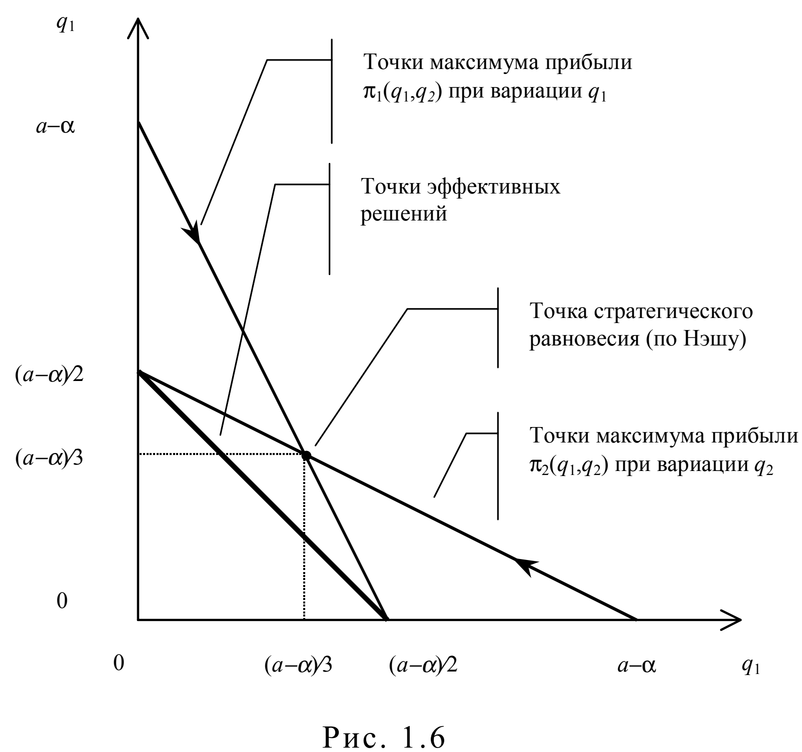

Рис. 1.6

Прямые линии (1.3.30), соответствующие случаям $i=1$, $j=2$ и $i=2$, $j=1$, пересекаются в точке с координатами

$$x^{*}=(a-\alpha)/3, \quad y^{*}=(a-\alpha)/3, \tag{1.3.32}$$

которая одновременно является точкой максимума прибыли $\pi_1(q_1,y^*)$ по q_1 и точкой максимума прибыли $\pi_2(x^*,q_2)$ по q_2. Таким образом:

$$\begin{aligned} &(\forall q_1 \in X) \;\; \pi_1(x^*,y^*) \geq \pi_1(q_1,y^*), \\ &(\forall q_2 \in Y) \;\; \pi_2(x^*,y^*) \geq \pi_2(x^*,q_2), \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

и, следовательно, точка (x^*,y^*) из (1.3.32) есть *стратегическая точка равновесия* (см. определение на стр.36). При этом согласно (1.3.31) и (1.3.32), уровень прибыли, достижимый в точке равновесия, оказывается одинаковым для обеих сторон и составляет величину

$$\pi^*=\pi_1(x^*, y^*)=\pi_2(x^*, y^*)=\gamma(a-\alpha)^2/9. \tag{1.3.34}$$

Замечание 1.11 (о *механизмах установления равновесия*). В рассматриваемом примере существует единственное равновесное состояние и можно поставить вопрос о возможных механизмах его установления. Исследование таких механизмов предполагает введение в модель дополнительных предположений, определяющих динамику поведения сторон. В качестве иллюстрации обсудим одну из возможных схем такого рода.

Введем дискретное время $t=1,2,\ldots$ и примем, что его единичное изменение соответствует переходу к новому циклу торгов и, следовательно, к новому предложению товара на рынке. Т.е. будем рассматривать объемы предложения товара как функции времени $q_i=q_i(t)$, $i=1,2$. При этом будем считать, что характеризуемое парой $(q_1(t),q_2(t))$ текущее состояние предложения на рынке ограничено треугольником (1.3.27).

Пусть сторона P_i полагает, что другая сторона (P_j) выведет на рынок в следующий период времени тот же объем товара, что и в предыдущем периоде. Т.е. прогноз поведения стороны P_j, принятый стороной P_i, дает оценку

$$q_j(t+1) = q_j(t). \tag{1.3.35}$$

При этом условии сторона P_i максимизирует свою прибыль π_i в следующем периоде, если выпуск ее продукции составит

$$q_i(t+1) = [a-\alpha-q_j(t)]/2, \tag{1.3.36}$$

ибо точка с координатами из (1.3.35) и (1.3.36) лежит на прямой линии (1.3.30).

Поскольку мы допустили (см. п.1 замечания об информированности сторон на стр. 20), что сторонам известны критерии эффективности, то можно также принять, что каждый игрок P_i (i=1,2) располагает информацией о множестве пар (q_1, q_2), в которых достигается максимум его прибыли π_i. Напомним, что это множество представляет собой один из обсуждавшихся выше линейных отрезков, изображенных на рис. 1.6. Поэтому предложенная *схема поведения*, определяемая планом (1.3.36), основанным на прогнозе (1.3.35), является возможной для обеих сторон.

Описанный механизм переводит текущее состояние $(q_1(t),q_2(t))$ в следующее состояние $(q_1(t+1),q_2(t+1))$, которому соответствуют значения координат

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= [a-\alpha-q_2(t)]/2, \\ q_2(t+1) &= [a-\alpha-q_1(t)]/2. \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

Введем пару величин

$$\delta_i(t) = (a-\alpha)/3-q_i(t), \quad i=1,2, \tag{1.3.38}$$

для оценки *отклонения* текущего состояния $(q_1(t),q_2(t))$ от точки равновесия (1.3.32). Из (1.3.37) и (1.3.38) следует, что

$$\delta_1(t+1) = -2^{-1}\delta_2(t), \quad \delta_2(t+1) = -2^{-1}\delta_1(t), \tag{1.3.39}$$

откуда выводим зависимость

$$\delta_i(t+2k) = 4^{-k}\delta_i(t), \quad k \ge 1, \quad i=1,2. \tag{1.3.40}$$

Теперь из (1.3.39) и (1.3.40) вытекает, что при любом начальном состоянии $(q_1(0),q_2(0))$ из треугольника (1.3.27)

$$(q_1(t),q_2(t)) \to (x^*, y^*) \text{ при } t\to\infty.$$

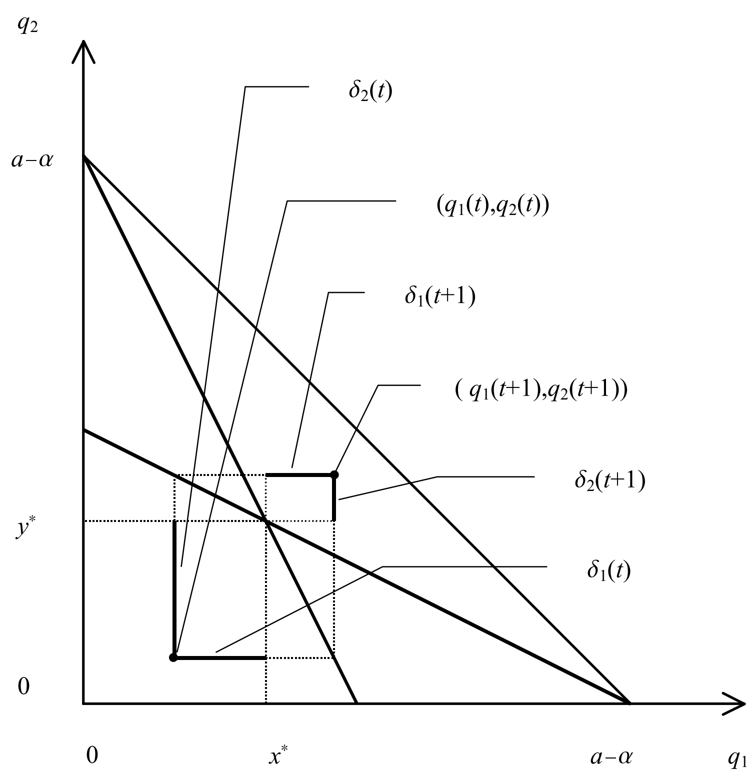

Рис. 1.7

Следовательно, предложенная схема независимого поведения сторон, стремящихся к максимизации своей прибыли, обеспечивает стабилизацию уровней производства фирм P_1 и P_2. На рис. 1.7, иллюстрирующем проведенное рассмотрение[23], указаны два последовательных состояния $(q_1(t), q_2(t))$ и $(q_1(t+1), q_2(t+1))$, а также пары $(\delta_1(t), \delta_2(t))$ и $(\delta_1(t+1), \delta_2(t+1))$ отклонений этих точек от равновесного состояния (x^*, y^*).

Продолжим рассмотрение дуополии Курно. Определим множество всех стратегических пар (q_1,q_2), обладающих свойством *оптимальности по Парето* (см. определение на стр. 37). С этой целью построим *образ* первого квадранта плоскости решений (q_1,q_2) (т.е. образ множества всех возможных в модели стратегических пар) на ***плоскости критериев*** (π_1,π_2).

Начнем с рассмотрения точек (q_1,q_2), удовлетворяющих условиям:

$$q_1+q_2\geq a, \quad q_1\geq 0,\ q_2\geq 0. \qquad (1.3.41)$$

Множество таких точек составляет неограниченную подобласть, отмеченную цифрой 1 на рис. 1.5. Согласно (1.3.25), прибыль стороны P_i в точках из (1.3.41) определяется выражением $\pi_i=-cq_i$. Следовательно, при $Q\geq a$ линейный отрезок

$$q_1+q_2=Q, \quad q_1\geq 0,\ q_2\geq 0, \qquad (1.3.42)$$

лежащий в плоскости (q_1,q_2), отображается на линейный отрезок

$$\pi_1+\pi_2=-cQ, \quad \pi_1\leq 0,\ \pi_2\leq 0,$$

лежащий в плоскости (π_1,π_2). При этом образом области (1.3.41) является множество точек, удовлетворяющих условиям

---

[23] Описанная схема поведения сторон называется также процедурой «нащупывания» по Курно.

$$\pi_1+\pi_2 \le -ca, \quad \pi_1 \le 0, \pi_2 \le 0. \tag{1.3.43}$$

Часть плоскости (π_1,π_2), содержащая решения неравенств (1.3.43), отмечена цифрой 1 на рис. 1.8.

Теперь рассмотрим пары (q_1,q_2), удовлетворяющие условиям

$$q_1+q_2 \le a, \quad q_1 \ge 0, q_2 \ge 0.$$

Согласно (1.3.26), при $Q \le a$ линейный отрезок (1.3.42), лежащий в плоскости (q_1,q_2), отображается на отрезок прямой

$$\pi_1+\pi_2 = \gamma Q(a-\alpha-Q). \tag{1.3.44}$$

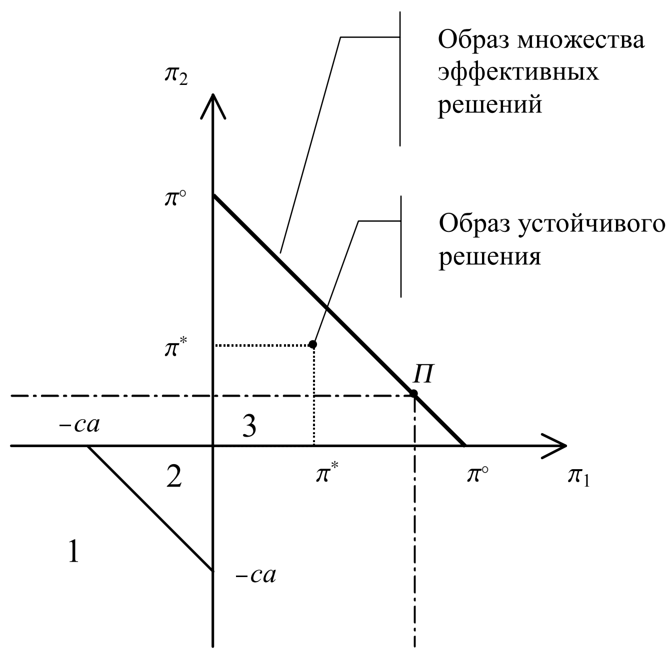

Рис. 1.8

При этом случаю $Q \ge a-\alpha$ соответствует отрезок прямой (1.3.44), определяемый условиями $\pi_1 \le 0$, $\pi_2 \le 0$ (см. рис. 1.5). Следовательно, часть плоскости (q_1,q_2), точки которой удовлетворяют неравенствам

$$a-\alpha \le q_1+q_2 \le a, \quad q_1 \ge 0, q_2 \ge 0,$$

имеет образ на плоскости (π_1,π_2), определяемый условиями

$$-ca \le \pi_1+\pi_2 \le 0, \quad \pi_1 \le 0, \pi_2 \le 0.$$

Указанные области помечены цифрой 2 соответственно на рис. 1.5 и на рис. 1.8.

Отрезок прямой (1.3.44), соответствующий случаю $0 \le Q \le a-\alpha$, определяется дополнительными условиями $\pi_1 \ge 0, \pi_2 \ge 0$. При этом

$$\pi^\circ = \max\{\pi_1+\pi_2 \colon 0 \le Q \le a-\alpha\} = \gamma(a-\alpha)^2/4, \qquad (1.3.45)$$

причем указанному в (1.3.45) максимальному значению π° соответствует случай, когда

$$q_1+q_2 = (a-\alpha)/2. \qquad (1.3.46)$$

Таким образом, часть плоскости (q_1,q_2), точки которой удовлетворяют неравенствам

$$0 \le q_1+q_2 \le a-\alpha, \quad q_1 \ge 0, q_2 \ge 0, \qquad (1.3.47)$$

имеет образ на плоскости критериев, определяемый условиями

$$0 \le \pi_1+\pi_2 \le \pi^\circ, \quad \pi_1 \ge 0, \pi_2 \ge 0. \qquad (1.3.48)$$

Указанные области (1.3.47) и (1.3.48) помечены цифрой 3 соответственно на рис. 1.5 и рис. 1.8.

Рассмотрим некоторую точку $\Pi=(\Pi_1,\Pi_2)$, лежащую на границе

$$\pi_1+\pi_2=\pi^\circ, \quad \pi_1 \ge 0, \pi_2 \ge 0, \qquad (1.3.49)$$

выделенной жирной линией на рис. 1.8. Очевидно, что все точки $\pi=(\pi_1,\pi_2)$, лежащие под отрезком (1.3.49) в пределах прямоугольного конуса с вершиной в точке Π, ***доминируются*** этой точкой, т.е. $\Pi_1 \geq \pi_1$, $\Pi_2 \geq \pi_2$. При этом сама точка Π является *не улучшаемой* в пределах образа первого квадранта плоскости решений (q_1,q_2) на плоскости критериев (π_1,π_2). Следовательно, точки отрезка (1.3.49) составляют множество *образов всех оптимальных по Парето решений* для рассматриваемого примера.

Согласно (1.3.45) и (1.3.46), множество всех эффективных решений, являющееся прообразом отрезка (1.3.49), составляет отрезок

$$q_1+q_2=(a-\alpha)/2, \quad q_1 \geq 0,\, q_2 \geq 0; \qquad (1.3.50)$$

см. рис. 1.6. Этот отрезок не содержит точки равновесия (x^*,y^*) из (1.3.32). Соответственно, определяемый условиями (1.3.34) образ этой точки, отмеченный на рис. 1.8, не принадлежит *«паретовской» части границы* (1.3.49).

Замечание 1.12 (*о стимулах к кооперации*). Рассмотренный пример показывает, что свойство устойчивости по Нэшу и свойство оптимальности по Парето могут *не совмещаться* ни в одном решении. Например, лежащая на отрезке эффективных решений (1.3.50) точка с координатами

$$q_1=(a-\alpha)/4, \quad q_2=(a-\alpha)/4, \qquad (1.3.51)$$

образ которой на плоскости критериев принадлежит паретовской границе (1.3.49) и имеет координаты

$$\pi_1=\pi_2=\gamma(a-\alpha)^2/8, \qquad (1.3.52)$$

обеспечивает обеим фирмам большую прибыль, чем устойчивое решение (1.3.32); ср. (1.3.34) и (1.3.52). Однако решение (1.3.51) является неустойчивым при *независимом поведении* сторон.

Указанное обстоятельство определяет заинтересованность этих сторон в обеспечении согласованности действий, направленных на увеличение прибыли. Анализ практики коллективных действий производителей одного и того же товара обнаруживает существование многих различных форм такого сотрудничества, к математическому исследованию проблем которого мы вернемся в гл.4.

Картели[24], *синдикаты*[25] и *тресты*[26] могут интерпретироваться как организационные формы, создаваемые в указанных целях.

1.4 Распределение информации и устойчивость решений

Продолжим обсуждение проблемы устойчивости решений. В следующем примере[27] рассматривается игра двух лиц, в роли которых выступают два *разнотипных* участника рынка — производитель и потребитель товара. При этом оказывается, что отношения таких разнотипных участников не могут быть приведены в состояние, отвечающее рассмотренной выше концепции равновесия по Нэшу. Вместе с тем эта модель позволяет обнаружить существование другого типа устойчивого поведения сторон, называемого *равновесием по Штакельбергу.* Источником этой новой формы устойчивости является (как и в случае равновесия по Нэшу) стремление сторон к обеспечению своих интересов путем

---

[24] *Картель* — объединение фирм, участники которого договариваются о рынках сбыта, условиях продажи, ценах, сроках платежа, размерах производства, совместном финансировании, сохраняя производственную и коммерческую самостоятельность.

[25] *Синдикат* — объединение предпринимателей, осуществляющее всю коммерческую деятельность при сохранении юридической и производственной самостоятельности участников (одна из форм монополии).

[26] *Трест* — объединение, при котором участники теряют самостоятельность.

[27] Пример взят из работы: П.Р.Стронгин. Моделирование некоторых механизмов ценообразования// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: ВЦ РАН, 1997.

максимизации соответствующих критериев эффективности. Однако при этом учитываются последствия разнородности участников. Предполагается, что производитель P_2 (выбирая стратегию y своего поведения) быстро приспосабливается к существующим условиям спроса (определяемым стратегией x потребителя P_1). Как следствие, любая ситуация, возникающая в такой модели, может быть охарактеризована парой стратегий вида $(x,y(x))$. Взаимодействие сторон в таких моделях, характеризуемых несимметричным распределением информации, часто интерпретируют как отношения «*лидера*» и «*ведомого*»[28] (роль которых в нашем случае играют соответственно потребитель и производитель).

Пример 1.3 (отношения производителя и потребителя на рынке одного товара). Примем, что зависимость ***спроса*** D на (бесконечно дробимый) однородный товар от цены p за единицу этого товара описывается функцией вида:

$$D(p) = \begin{cases} A(p_{\max} - p), & 0 \le p \le p_{\max}, \\ 0, & p > p_{\max}, \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

где коэффициент A является строго положительным. Как следует из (1.4.1), спрос на товар линейно убывает с ростом цены и полностью исчезает, если цена превышает значение $p_{\max}$. Максимально возможный спрос составляет величину

$$D_{\max}=Ap_{\max} \qquad (1.4.2)$$

и соответствует нулевой цене.

Примем также, что поступление товара на рынок характеризуется *функцией предложения*:

---

[28] Взаимодействия такого типа впервые рассматривались экономистом Г.Штакельбергом, изучавшим в начале XX века стратегии фирм, конкурирующих на одном и том же рынке.

$$S(p)=\begin{cases}0, & p<p_{\min},\\ B(p-p_{\min}), & p\ge p_{\min},\end{cases} \qquad (1.4.3)$$

где коэффициент B является строго положительным. Согласно (1.4.3), ***предложение*** товара линейно возрастает с ростом цены, однако при ценах, не достигающих уровня $p_{\min}$, товар не предлагается. Для простоты рассмотрения условимся, что цена $p_{\min}$ совпадает с удельными издержками c на производство единицы товара, которые будем считать постоянными. Полагая, что $c<p_{\max}$, ограничим дальнейшее рассмотрение диапазоном цен

$$0<c=p_{\min}\le p\le p_{\max}, \qquad (1.4.4)$$

в котором функции спроса и предложения являются линейными (см. рис. 1.9).

Замечание 1.13 (о *функциях спроса и предложения*). 1. Понятия функций спроса и предложения являются достаточно старыми (см., например, книгу[29] А.Маршалла[30]). Они широко используются для анализа различных рынков таких, например, как рынки нефти, зерна, автомобилей и др. Эти понятия нашли применение и в анализе различных финансовых рынков. К их числу относятся, например, рынки кредитов, капиталов, ценных бумаг, активов, страховок и др. При этом построение функций спроса и предложения для каждой конкретной задачи может потребовать достаточно сложных исследований.

2. В ряде актуальных задач, касающихся рынков одного товара со многими потребителями и производителями, можно использовать *агрегированные* функции спроса и предложения, сводя множество всех участников к единственному продавцу и

---

[29] Маршалл А. Принципы экономической науки. Т. I–III. М.: ПРОГРЕСС, УНИВЕРС. 1993.

[30] Маршалл Альфред (1842–1924) — английский экономист, основатель Кембриджской школы политэкономии.

единственному покупателю. Возможность такого агрегирования требует специального изучения в каждом конкретном случае. К числу первых примеров успешного анализа взаимодействий на рынке со многими участниками, основанного на сведении этих взаимодействий к отношениям двух сторон, относятся рынки с *совершенной конкуренцией*, характеризуемые следующими допущениями[31]:

- *Помимо того, что товар, выпускаемый разными производителями, считается однородным, все потребители считаются идентичными с точки зрения продавцов и для них (продавцов) нет никакого преимущества (или потери преимущества) при продаже товара тому или иному конкретному потребителю.*

- *Производители и потребители считаются многочисленными и продажа или покупка, осуществляемые любым из них, полагаются малыми по сравнению с общим объемом продаж на рынке.*

- *Производители и потребители обладают полной информацией относительно цены, превалирующей в текущих торгах; при этом интересы производителей состоят в том, чтобы увеличить прибыль, а интересы потребителей характеризуются стремлением закупить возможно большее количество товара.*

- *Выход на рынок и оставление его являются свободными и для производителей, и для потребителей.*

Первое условие подразумевает анонимность производителей и потребителей. Товар одних производителей считается неотличимым от товара других производителей (т.е. торговые марки и метки качества не используются) и, следовательно, потребители не имеют оснований предпочесть продукт одного производителя продукту другого. С другой стороны, однородность потребите-

---

[31] См., например, работу: Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат. 1996.

лей ведет к тому, что производитель заинтересован продать товар тому из них, кто предложил большую цену. При этом другие критерии выбора покупателя такие, например, как первоочередное обслуживание пришедших первыми, не рассматриваются.

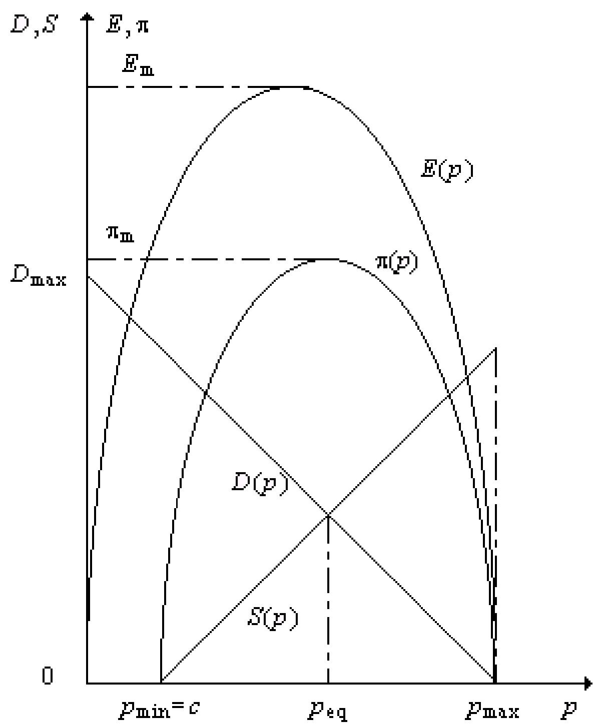

Рис. 1.9

3. Существуют реальные рынки, для которых справедлива принятая в (1.4.1) и (1.4.3) линейная зависимость соответственно спроса и предложения от цены p за единицу товара (при ва риациях цены в пределах диапазона (1.4.4)). К их числу относятся, например, некоторые рынки пшеницы[32].

[32] Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. М.: Экономика, Дело. 1992.

Однако в общем случае указанное допущение линейных функций спроса и предложения является некоторым упрощением реально наблюдаемых взаимосвязей. Применимость предположения о линейном характере обсуждаемых зависимостей существенно расширяется, если рассматриваются малые колебания цены относительно некоторого значения. Именно этот случай мы и будем рассматривать.

4. В экономической литературе при описании функций спроса и предложения цена p обычно откладывается по оси ординат, а ось абсцисс служит для задания количества товара. Для целей рассмотрения, проводимого ниже, удобнее связать цену с осью абсцисс (как это и сделано на рис. 1.9). Такое использование координатных осей также встречается в литературе.

Продолжим рассмотрение модели. Цена p_{eq}, при которой имеет место *баланс спроса и предложения* и, следовательно, весь произведенный товар покупается, формально определяется как решение уравнения

$$S(p_{eq}) = D(p_{eq}). \qquad (1.4.5)$$

При этом p_{eq} обычно называется ***равновесной ценой***. Согласно (1.4.1) и (1.4.3)–(1.4.5), ее единственное значение определяется выражением

$$p_{eq} = (Ap_{max}+Bc)/(A+B) \qquad (1.4.6)$$

и принадлежит диапазону (1.4.4). В рамках рассматриваемого примера мы будем связывать интересы потребителя и производителя с результатами купли-продажи товара в условиях баланса спроса и предложения, т.е при цене p_{eq}.

Квадратичная функция $E(p)$, где

$$E(p) = pD(p),$$

характеризует ***затраты*** потребителя на приобретение товара в объеме, соответствующем спросу при цене p. Эта функция обращается в ноль при p=0 и $p=p_{\max}$ и достигает максимального значения

$$E_m=A(p_{\max})^2/4 \tag{1.4.7}$$

в точке

$$p_m=p_{\max}/2; \tag{1.4.8}$$

см. рис. 1.9 (шкала затрат нанесена на оси ординат справа). При этом спрос в объеме $D(p)$ не может быть удовлетворен при цене p, не достигающей равновесного значения p_{eq}. Однако интересующие нас значения $D(p_{\text{eq}})$ и $E(p_{\text{eq}})$, соответствующие объему закупки в состоянии баланса спроса и предложения и связанными с этой закупкой затратами, являются реализуемыми.

Из (1.4.2) и (1.4.7) следуют оценки

$$A=4E_m/(p_{\max})^2,\ D_{\max}=4E_m/p_{\max}, \tag{1.4.9}$$

которые в сочетании с (1.4.1) позволяют представить функцию спроса в виде:

$$D(p)=4E_m(p_{\max}-p)/(p_{\max})^2; \tag{1.4.10}$$

при этом предполагается, что цена p принадлежит диапазону (1.4.4). Будем интерпретировать величину E_m как (заданные) *максимально-возможные затраты* потребителя.

Теперь введем квадратичную функцию

$$\pi(p)=(p-c)D(p)=4E_m(p_{\max}-p)(p-c)/(p_{\max})^2, \tag{1.4.11}$$

которую при цене $p=p_{\text{eq}}$ можно интерпретировать как прибыль, получаемую производителем от продажи товара в количестве $S(p_{\text{eq}})=D(p_{\text{eq}})$. Согласно (1.4.11), $\pi(c)=\pi(p_{\max})=0$ и

$$\pi_m=\max\{\pi(p):c\le p\le p_{\max}\}=E_m(1-c/p_{\max})^2, \tag{1.4.12}$$

причем указанный максимум достигается при цене

$$p_\pi=(p_{\max}+c)/2 \qquad (1.4.13)$$

(рис. 1.9 представляет кривую $\pi(p)$ для случая, когда $p_\pi=p_{\text{eq}}$).

Симметричное распределение информации и проблема равновесия по Нэшу

Рассмотрим поведение участников рынка, представленного описанной моделью, как некоторую *игру* двух лиц, в которой роль первой стороны (P_1) играет потребитель, а роль второй стороны (P_2) — производитель. При этом стратегии сторон P_1 и P_2 состоят соответственно в выборе потребителем цены $p_{\max}>c$ из (1.4.10), при которой исчезает спрос на товар, и в выборе производителем параметра $B>0$ из (1.4.3).

Примем, что интересы потребителя состоят в *максимизации объема товара* $D(p_{\text{eq}})$, который ему удается закупить по цене p_{eq}, не превышая затрат E_m. Таким образом, критерий эффективности потребителя имеет вид:

$$M_1(p_{\max},B)=D(p_{\text{eq}}),\ \ c<p_{\max}<\infty. \qquad (1.4.14)$$

Критерий эффективности производителя в предположении, что его интересы состоят в *максимизации прибыли* при $p=p_{\text{eq}}$, имеет вид:

$$M_2(p_{\max},B)=\pi(p_{\text{eq}}),\ \ 0<B<\infty. \qquad (1.4.15)$$

Согласно (1.4.6), (1.4.9) и (1.4.10),

$$D(p_{\text{eq}})=4E_m(p_{\max}-c)B/[4E_{\text{m}}+B(p_{\max})^2] \qquad (1.4.16)$$

и, в соответствии с (1.4.6), (1.4.11),

$$\pi(p_{\text{eq}})=(4E_m)^2(p_{\max}-c)^2B/[4E_m+B(p_{\max})^2]^2. \qquad (1.4.17)$$

Теперь из (1.4.16), (1.4.17) вытекает, что

$$B\pi(p_{\rm eq})=D^2(p_{\rm eq}), \tag{1.4.18}$$

откуда, учитывая (1.4.14), (1.4.15), выводим равенство

$$M_1(p_{\max},B)=[BM_2(p_{\max},B)]^{1/2}. \tag{1.4.19}$$

Как следует из (1.4.19), интересы сторон не являются ни совпадающими, ни противоположными.

Исследуем вопрос о существовании ситуации стратегического равновесия по Нэшу (см. стр. 36) в предположении, что стороны, осуществляющие независимо друг от друга выбор своих стратегий, располагают одинаковой информацией. Полагая параметр $B\in(0,\infty)$ заданным, определим стратегию $p_{\max}$ потребителя, обеспечивающую максимальную закупку $D(p_{\rm eq})$ из (1.4.16). Из выражения

$$\frac{dD(p_{eq})}{dp_{\max}}=\frac{4E_mB\left[4E_m-Bp_{\max}(p_{\max}-2c)\right]}{\left[4E_m+Bp_{\max}^2\right]^2} \tag{1.4.20}$$

следует, что при $p_{\max}>2c$ производная (1.4.20) имеет нулевое значение в точках плоскости $(p_{\max},B)$, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$B=4E_m/p_{\max}(p_{\max}-2c). \tag{1.4.21}$$

Указанным точкам соответствует верхняя кривая на рис. 1.10. Поскольку в точках этой кривой вторая производная

$$\frac{d^2D(p_{eq})}{dp_{\max}^2}=\frac{8E_mB^2\left[Bp_{\max}^2(p_{\max}-3c)-4E_m(3p_{\max}-c)\right]}{\left[4E_m+Bp_{\max}^2\right]^3}$$

является отрицательной, то при $p_{\max}>2c$ объем закупки $D(p_{\rm eq})$ достигает максимума по $p_{\max}$ в точках из (1.4.21).

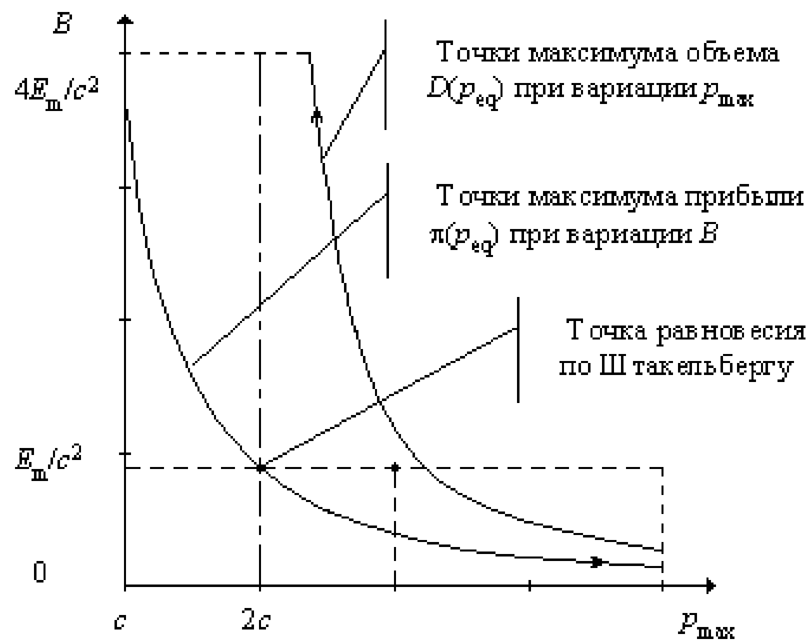

Рис. 1.10

При $c<p_{max} \le 2c$ производная (1.4.20) является положительной. Следовательно, кривая (1.4.21) есть геометрическое место точек, в которых достигается максимум $D(p_{eq})$ по p_{max} из диапазона (c,∞). Подставляя выражение для B из (1.4.21) в правую часть формулы (1.4.16), выводим, что объем закупки $D(p_{eq})$ в точках кривой (1.4.21) определяется соотношением

$$D(p_{eq})=2E_m/p_{max}.$$

Отсюда вытекает, что объем закупки растет с уменьшением цены p_{max}, стремясь к величине E_m/c при $p_{max}\to 2c$. Стрелка, нанесенная на верхнюю кривую, представленную на рис. 1.10, указывает направление перемещения, сопровождаемого отмеченным выше ростом объема закупки.

Теперь определим стратегию B производителя, максимизирующую его прибыль $\pi(p_{eq})$ из (1.4.17) при заданном значении параметра $p_{\max}\in(c,\infty)$. Согласно (1.4.12), (1.4.13), максимум $\pi(p_{eq})$ достигается при условии $p_{eq}=p_{\pi}$. Из этого равенства и из определяющих его левую и правую части выражений (1.4.6) и (1.4.13) выводим, что максимальное значение прибыли $\pi(p_{eq})$ достигается при выполнении условия

$$B=4E_m/(p_{\max})^2. \tag{1.4.22}$$

Точки, удовлетворяющие указанному условию, представлены нижней кривой на рис. 1.10. Значение прибыли $\pi(p_{eq})$ в точках этой кривой определяется выражением (1.4.12). Следовательно, величина $\pi(p_{eq})=\pi(p_{\pi})$ растет с увеличением параметра $p_{\max}$, приближаясь к значению E_m при $p_{\max}\to\infty$. Указанное направление роста прибыли отмечено стрелкой на нижней кривой, изображенной на рис. 1.10.

Из (1.4.21) и (1.4.22) следует, что при всех значениях $p_{\max}\in(2c,\infty)$ кривая, соответствующая первому из этих выражений, лежит выше кривой, соответствующей второму выражению. Т.е. эти кривые не имеют точек пересечения. Следовательно, в данной задаче нет стратегических пар, удовлетворяющих условиям (1.3.18) равновесия по Нэшу для критериев (1.4.14) и (1.4.15).

Несимметричное распределение информации и устойчивость по Штакельбергу

Примем, что производитель (P_2) адаптирует свое поведение к условиям рынка значительно быстрее, чем изменяется поведение потребителя (P_1). Т.е. производитель успевает максимизировать прибыль $\pi(p_{eq})$ по параметру B столь быстро, что при этом стратегию $p_{\max}$ потребителя можно считать неизменной. Принятое допущение можно интерпретировать как фиксирование последовательности действий сторон. Первый ход делает потребитель, выбирая стратегию $x=p_{\max}$, а затем свой ход делает производитель, что позволяет ему выбирать стратегию $y=B$ как функцию известного значения $x=p_{\max}$.

При сделанных предположениях производитель имеет возможность использовать стратегию-функцию $y^*(x)=B^*(p_{\max})$, максимизирующую его критерий-прибыль из (1.4.15), т.е. обеспечивающую выполнение условия:

$$M_2(x,y^*(x)) = \max\{M_2(x,y)\colon 0<y<\infty\}. \quad (1.4.23)$$

Все возможные при таком поведении стратегические пары

$$(x, y^*(x)) = (p_{\max}, B^*(p_{\max})) \quad (1.4.24)$$

необходимо удовлетворяют равенству (1.4.22), поскольку оно определяет значение параметра B, доставляющее максимум критерию M_2 при заданном значении параметра $p_{\max}$. Следовательно, выбор потребителем стратегии $x=p_{\max}$ определяет конкретную точку вида (1.4.24), лежащую на нижней кривой, изображенной на рис. 1.10. При этом потребитель заинтересован в выборе стратегии x^*, которой соответствует точка указанной кривой, характеризуемая максимальным (на кривой) значением критерия M_1 из (1.4.14). Т.е.

$$M_1(x^*, y^*(x^*)) = \max\{M_1(x, y^*(x))\colon c<x<\infty\}. \quad (1.4.25)$$

Определение 1.6 (*равновесие по Штакельбергу*). Пара стратегий $(x^*, y^*(x^*))$, удовлетворяющая условиям (1.4.23), (1.4.25), называется стратегической точкой ***равновесия по Штакельбергу***[33].

Определим точку равновесия по Штакельбергу в рассматриваемом примере. Как следует из (1.4.22) (с учетом введенных обозначений $x=p_{\max}$ и $y=B$),

$$y^*(x) = 4E_m/x^2. \quad (1.4.26)$$

[33] См., например, работу: Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

Далее, из (1.4.14) и (1.4.16) вытекает, что

$$M_1(x, y^*(x)) = 2E_m(x-c)/x^2, \tag{1.4.27}$$

причем производная по x от этой величины обращается в ноль при

$$x^*=2c. \tag{1.4.28}$$

Поскольку вторая производная от величины (1.4.27) в точке (1.4.28) является отрицательной, то значение x из правой части (1.4.28) обеспечивает максимум критерия (1.4.27). Следовательно, согласно (1.4.26) и (1.4.28), точка с координатами

$$(p_{\max}, B) = (2c, E_m/c^2) \tag{1.4.29}$$

соответствует ситуации равновесия по Штакельбергу (см. рис. 1.10). При этом, как следует из (1.4.27) и (1.4.12),

$$D^*=M_1(x^*, y^*(x^*))=E_m / 2c, \tag{1.4.30}$$

$$\pi^*=M_2(x^*, y^*(x^*))=E_m/4. \tag{1.4.31}$$

В заключение сравним решение (1.4.29) с точкой

$$(p_{\max}, B) = (3c, E_m/c^2), \tag{1.4.32}$$

отмеченной темным кружком на рис. 1.10. Согласно (1.4.16) и (1.4.17), этой точке соответствуют значения

$$M_1(3c, E_m/c^2) = 8E_m/13c > D^*, \tag{1.4.33}$$

$$M_2(3c, E_m/c^2) = 64E_m/169 > \pi^*, \tag{1.4.34}$$

где D^* и π^* соответственно из (1.4.30) и (1.4.31). Как следует из (1.4.33) и (1.4.34), устойчивая по Штакельбергу точка (1.4.29) не является эффективным решением, поскольку ее превосходит не устойчивое решение, определяемое точкой (1.4.32).

Об устойчивости баланса спроса и предложения

В рамках рассмотренного примера интересы потребителя и производителя связывались с результатами купли-продажи товара в условиях баланса спроса и предложения, т.е. при цене p_{eq} из (1.4.6). В связи с этим возникает вопрос об устойчивости этого баланса.

Отметим, что вопрос о балансе спроса и предложения, будучи, с одной стороны, вопросом уже классическим, остается, тем не менее, одним из дискуссионных вопросов. Этот сохраняющийся интерес определяется тем обстоятельством, что реальные процессы в экономике могут демонстрировать как тенденции приближения к балансу спроса и предложения, так и различные формы отклонения от него, не связанные с действием внешних факторов.

Обсуждение устойчивости предполагает принятие некоторых допущений, характеризующих динамику спроса и предложения. В этой связи введем дискретное время t (t=0,1,…) и положим, что объем товара S_t, поступающего на рынок в момент t, определяется ценой, имевшей место на рынке в предшествующий период, т.е.

$$S_t = S(p_{t-1}).$$

Введенная зависимость отражает наличие временной задержки (обычно называемой *временным лагом*) между моментом принятия решения об изготовлении товара и фактическим выпуском этого товара. Приняв дополнительное предположение, что весь поставленный на рынок товар покупается, получим условие

$$D(p_t) = S(p_{t-1}), \tag{1.4.35}$$

определяющее цену p_t. При этом мы исходили из того, что не существует каких-либо запасов товаров на складах.

Принятое условие баланса фактически вводит понятие *временного равновесия* на рынке товара. Это равновесие в момент t

характеризуется клиринговой ценой p_t, сменяемой в следующий момент t+1 другой клиринговой ценой p_{t+1}, также соответствующей временному равновесию. Из (1.4.1), (1.4.3) и (1.4.35) следует, что при ценах из диапазона (1.4.4)

$$p_t = p_{\max}+\lambda(c-p_{t-1}),$$

где параметр λ определяется выражением

$$\lambda=B/A. \tag{1.4.36}$$

Учитывая выражение (1.4.6), определяющее равновесную цену p_{eq}, представим полученное разностное уравнение в виде равенства

$$p_t-p_{\mathrm{eq}} = \lambda\,(p_{\mathrm{eq}}-p_{t-1}). \tag{1.4.37}$$

Это равенство позволяет вывести оценку

$$|(p_t-p_{\mathrm{eq}})/(\,p_{\mathrm{eq}}-p_{t-1})| =\lambda,$$

из которой следует, что при значениях $\lambda<1$ цены p_t, соответствующие временным равновесиям, будут с течением времени приближаться к равновесной цене p_{eq}. Левая диаграмма на рис. 1.11 иллюстрирует колебания значений цены p_t, соответствующие этому случаю (при $\lambda=\frac{2}{3}$).

Вертикальные стрелки, обозначенные на диаграмме, указывают объемы предложения, соответствующие текущей цене. Горизонтальные стрелки указывают объемы спроса, при которых имеет место временный баланс (1.4.35). Изображенная на рисунке последовательность горизонтальных и вертикальных стрелок получила название *паутины*. Левая диаграмма на рис. 1.11 представляет случай «скручивающейся паутины», соответствующей устойчивому балансу спроса и предложения.

При значениях $\lambda>1$ равновесие спроса и предложения, определяемое ценой p_{eq}, является неустойчивым. Правая диаграмма на рис. 1.11 иллюстрирует раскручивающуюся паутину (для случая, когда значение λ=1,5).

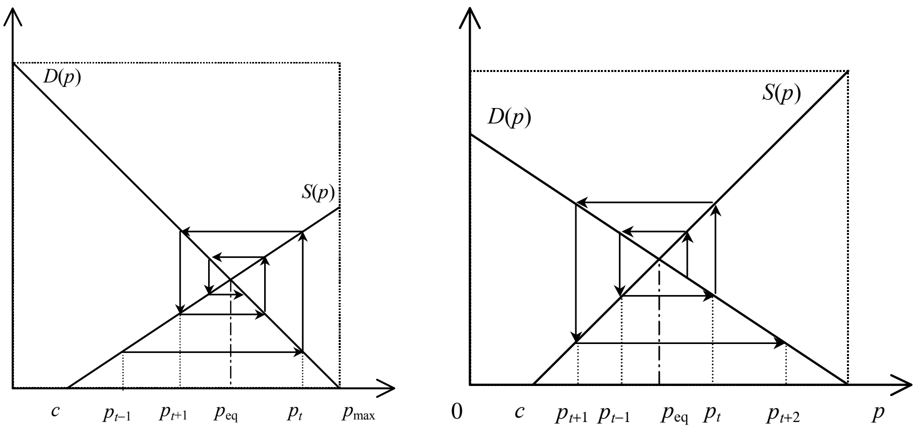

Рис. 1.11

Роль посредников в стабилизации баланса спроса и предложения

Примем, что рассматриваемый рынок включает еще одного участника — *спекулянта*, который при понижении цены закупает Δ единиц товара (т.е. выступает в роли дополнительного потребителя) и позже продает эти Δ единиц (выступая уже в роли поставщика). Заметим, что эти функции может выполнять и сам производитель путем организации временного складирования части товара.

Ситуации, в которой спекулянт закупает товар, соответствует временный баланс вида

$$D(p_t)+\Delta=S(p_{t-1}), \qquad (1.4.38)$$

а ситуации, в которой он сбывает товар, — баланс вида

$$D(p_{t+1})=S(p_t)+\Delta. \qquad (1.4.39)$$

Если цена p_{t+1}, по которой осуществляется продажа, превышает цену p_t, по которой осуществлялась закупка, то проведенная спекулянтом операция купли-продажи дает ему доход равный величине $(p_{t+1}-p_t)\Delta>0$. Получение этого дохода и составляет мотивацию поведения спекулянта. Этот случай (при $\lambda=1{,}5$) иллюстрирует рис. 1.12.

Помимо отрезков прямых, представляющих функции спроса и предложения, на рисунке нанесены также отрезки, соответствующие функциям $D(p)+\Delta$ и $S(p)+\Delta$ из (1.4.38) и (1.4.39). Как следует из рисунка, виток паутины, отвечающий последовательности временных балансов вида (1.4.35) в модели без спекулянта, является *раскручивающимся*. Два последних звена этого витка обозначены на рисунке разрывными стрелками. Однако виток, представленный сплошными линиями со стрелками и соответствующий временным балансам вида (1.4.38) и (1.4.39), оказывается *скручивающимся*.

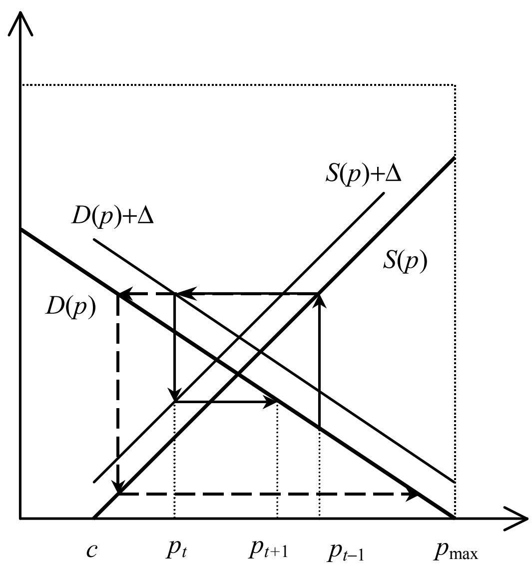

Рис. 1.12

Таким образом, операции купли-продажи, проводимые спекулянтом, могут уменьшать колебания цены. Это обстоятельство отмечалось рядом исследователей (см., например, книгу[34] П.Самуэльсона[35]). При этом подчеркивалось, что спекулянт является традиционным участником большинства реальных рынков.

Рассмотрим конкретный вариант описанной выше схемы поведения спекулянта[36]. Пусть в момент $t-1$ справедливо неравенство $p_{t-1}>p_{\text{eq}}$. Тогда согласно неравенству $p_t<p_{\text{eq}}$, вытекающему из (1.4.37), в следующий момент t имеет место снижение цены. Пусть спекулянт, ориентируясь на это снижение цены, закупает товар в объеме

$$\Delta=\gamma S(p_{t-1}),\ \ \gamma>0, \tag{1.4.40}$$

что повышает спрос в момент t; см. (1.4.38). В результате цена в момент t определяется из условия

$$D(p_t)+\gamma S(p_{t-1})=S(p_{t-1}). \tag{1.4.41}$$

В случае падения цены, т.е. при выполнении условия $p_t<p_{t-1}$, будет иметь место снижение предложения, которому соответствует неравенство $S(p_t)<S(p_{t-1})$. В результате произойдет повышение цены в момент $t+1$. Ориентируясь на это повышение, спекулянт выбрасывает на рынок хранимый объем товара Δ, что приводит к повышению предложения в момент $t+1$; см. (1.4.39). Поэтому цена p_{t+1}, соответствующая моменту $t+1$, определяется из условия

---

[34] Самуэльсон П. Экономика. Т.2. М.: НПО АЛГОН ВНИИСИ, 1993.

[35] Самуэльсон Пол (р. 1915) — американский экономист, лауреат Нобелевской премии (1970).

[36] Конструкция, описываемая ниже, взята из работы: Стронгин П.Р. Моделирование спекуляций на отклонениях котировки от равновесной цены// Математическое моделирование в образовании. Программные средства 2. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета. 1994. С. 123-142.

$$D(p_{t+1})=S(p_t)+\gamma S(p_{t-1}). \qquad (1.4.42)$$

Если при этом для каждого момента времени $t\geq 1$ выполняются неравенства

$$p_{\min}=c < p_t < p_{\text{eq}} < p_{t+1} < p_{t-1} < p_{\max}\,, \qquad (1.4.43)$$

то описанная схема поведения спекулянта обеспечивает затухание колебаний цены (т.е. скручивание паутины). При этом прибыль

$$\pi_s=\Delta(p_{t+1}-p_t), \qquad (1.4.44)$$

получаемая спекулянтом в результате купли-продажи партии товара объемом Δ, является положительной на каждом витке паутины.

Следующая теорема устанавливает условия выбора значений коэффициента γ, обеспечивающие описанную стабилизацию баланса спроса и предложения.

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия*

$$0< \lambda \leq \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad (1.4.45)$$

$$p_{\text{eq}} < p_{t-1} < p_{\max}\,, \qquad (1.4.46)$$

где λ *из* (1.4.36). *Тогда закупка спекулянтом в момент* t *партии товара объемом* Δ *из* (1.4.40) *с целью продажи этой партии в момент* t+1 *по цене* p_{t+1} *обеспечивает выполнение условий* (1.4.43), *если значение коэффициента* $\gamma>0$ *лежит в интервале*

$$\Gamma_1<\gamma=\gamma(t)<\Gamma_2, \qquad (1.4.47)$$

где

$$\Gamma_1=\theta(\lambda-1)\,/\,\lambda\,, \quad \Gamma_2=\theta\lambda^2/(\lambda+1)^2, \qquad (1.4.48)$$

$$\theta=\theta(t)=1-D(p_{t-1})/S(p_{t-1}). \qquad (1.4.49)$$

Доказательство. **1**. Для выполнения входящего в (1.4.43) неравенства $p_t<p_{eq}$, где, согласно (1.4.6) и (1.4.36),

$$p_{eq}=(p_{max}+\lambda c)/(1+\lambda), \qquad (1.4.50)$$

необходимо и достаточно выполнения условия $D(p_t)>D(p_{eq})$. Последнее условие в сочетании с равенствами (1.4.5) и (1.4.41) ведет к соотношениям

$$(1-\gamma)S(p_{t-1}) = D(p_t)>D(p_{eq})=S(p_{eq}).$$

Отсюда следует неравенство

$$S(p_{t-1})-S(p_{eq})>\gamma\, S(p_{t-1}),$$

приводимое, с учетом (1.4.3), к виду

$$B(p_{t-1}-p_{eq})>\gamma\, S(p_{t-1}). \qquad (1.4.51)$$

Поскольку, согласно (1.4.1), (1.4.3), (1.4.49) и (1.4.50),

$$p_{t-1}-p_{eq}=[\lambda(p_{t-1}-c)+(p_{max}-p_{t-1})]/(1+\lambda)=$$
$$=[S(p_{t-1})-D(p_{t-1})]/(A+B)=\theta S(p_{t-1})/(A+B),$$

то требование (1.4.51) представимо в виде неравенства

$$\gamma< \theta\lambda\,/(1+\lambda), \qquad (1.4.52)$$

которое заведомо выполняется при $\gamma<\Gamma_2$; см. (1.4.47), (1.4.48). При этом согласно (1.4.46) и (1.4.49)

$$0<\theta<1, \qquad (1.4.53)$$

поскольку $D(p_{t-1})< S(p_{t-1})$ при $p_{eq} < p_{t-1}$.

2. Из (1.4.1) и (1.4.41) вытекает, что при $p_{t-1}>p_{eq}$

$$\begin{gathered} p_t=[A\,p_{\max}-(1-\gamma)S(p_{t-1})]/A= \\ =[\,D(p_{t-1})-S(p_{t-1})+\gamma\,S(p_{t-1})]/A+p_{t-1}= \\ =\lambda(\,p_{t-1}-c)(\gamma-\theta)+p_{t-1}. \end{gathered} \tag{1.4.54}$$

Отсюда следует, что для выполнения входящего в (1.4.43) неравенства $p_t>p_{\min}=c$ должно выполняться условие

$$(\,p_{t-1}-c)(\lambda(\gamma-\theta)+1)>0.$$

Это условие заведомо выполняется, если коэффициент γ удовлетворяет левому неравенству из (1.4.47), поскольку $p_{t-1}>c$ и, согласно (1.4.53),

$$\theta(\lambda-1)/\lambda>(\lambda\theta-1)/\lambda.$$

3. Условие $p_{t+1}>p_{eq}$, входящее в (1.4.43), равносильно отношению $D(p_{t+1})<S(p_{eq})$, которое, учитывая (1.4.42), приводимо к виду:

$$S(p_t)+\gamma\,S(p_{t-1})<S(p_{eq})$$

или

$$\gamma\,S(p_{t-1})<B(p_{eq}-p_t). \tag{1.4.55}$$

Из (1.4.2), (1.4.6) и (1.4.54) следует, что

$$p_{eq}-p_t=B[\,S(p_{t-1})-D(p_{t-1})]/A(A+B)-\gamma\,S(p_{t-1})/A..$$

Подставляя правую часть этого равенства в (1.4.55), выводим, что $p_{t+1}>p_{eq}$, если

$$\gamma(\lambda+1)^2\,S(p_{t-1})<\lambda^2[S(p_{t-1})-D(p_{t-1})].$$

Последнее условие эквивалентно требованию $\gamma<\Gamma_2$.

4. Условие $p_{t+1}<p_{t-1}$, входящее в (1.4.43) и обеспечивающее «скрутку» паутины, равносильно неравенству $D(p_{t+1})>D(p_{t-1})$, которое согласно (1.4.42) можно записать в виде:

$$S(p_t)+\gamma\, S(p_{t-1})> D(p_{t-1}). \tag{1.4.56}$$

Из (1.4.2), (1.4.36) и (1.4.54) выводим, что

$$S(p_t)=\lambda A p_{\max}-\lambda(1-\gamma)S(p_{t-1})-Bc=$$
$$=\lambda D(p_{t-1})+\lambda\gamma S(p_{t-1})+(1-\lambda)S(p_{t-1}).$$

Подставляя правую часть полученного выражения в (1.4.56), выводим неравенство

$$(\lambda-1)[S(p_{t-1})- D(p_{t-1})]<\gamma(\lambda+1)S(p_{t-1}),$$

для справедливости которого достаточно выполнения условия

$$\gamma>\theta(\lambda-1)\,/(\lambda+1).$$

Последнее условие заведомо выполняется при $\gamma>\Gamma_1$, где Γ_1 из (1.4.48). В заключение отметим, что интервал (1.4.47) не пуст (т.е. $\Gamma_1<\Gamma_2$) при значениях λ из диапазона (1.4.45). ■

Мотивация поведения спекулянта

Согласно (1.4.40) и (1.4.44), прибыль, получаемая спекулянтом в результате каждой описанной выше операции куплипродажи, составляет величину

$$\pi_s(\gamma)=\gamma S(p_{t-1})(\,p_{t+1}- p_t). \tag{1.4.57}$$

Максимум этой величины достигается при

$$\gamma^{*}=\lambda\theta/\,2(2+\lambda), \tag{1.4.58}$$

где λ и θ соответственно из (1.4.36) и (1.4.49).

Действительно, из (1.4.42) выводим, что

$$p_{t+1}=p_{\max}-[\,S(p_t)+\gamma S(p_{t-1})]/A.$$

Отсюда, учитывая (1.4.54), определяем разность

$$p_{t+1}-p_t=[B(p_{t-1}-p_t)-2\gamma\, S(p_{t-1})]/A.$$

Подстановка p_t из (1.4.54) в правую часть полученного равенства дает

$$p_{t+1}-p_t=[\lambda(S(p_{t-1})-D(p_{t-1}))-\gamma(\lambda+2)S(p_{t-1})]/A.$$

Используя определение (1.4.57) и обозначение θ из (1.4.49), окончательно выводим, что

$$\pi_s(\gamma)=\gamma S^2(p_{t-1})[\lambda\theta-\gamma(\lambda+2)]/A.$$

Теперь определим значение γ^* как решение уравнения

$$\frac{d\pi_s(\gamma)}{d\gamma}=S^2(p_{t-1})\left[\lambda\theta-2\gamma(\lambda+2)\right]/\,A=0.$$

Очевидно, что таким решением является значение γ^* из (1.4.58). При этом вторая производная от π_s по γ отрицательна в точке γ^*.

Непосредственной проверкой можно установить, что значение коэффициента γ^* из (1.4.58) принадлежит интервалу (Γ_1,Γ_2) из (1.4.47), если величина λ из (1.4.36) удовлетворяет условиям

$$\sqrt{2}-1<\lambda<\sqrt{5}-1.$$

При этих условиях, как следует из рассмотренной теоремы, стремление спекулянта к максимизации своей прибыли ведет к стабилизации равновесной цены p_{eq}. Отметим, что исследованная схема поведения спекулянта ведет (с каждым новым витком паутины) к уменьшению объема Δ осуществляемых им закупок.

Возможны, однако, схемы обеспечивающие стабилизацию равновесия спроса и предложения и при постоянном объеме закупок[37].

Отметим, что точке равновесия по Штакельбергу, обнаруженной в рассмотренном выше примере, соответствует единичное значение λ, поскольку для всех точек кривой (1.4.26), на которой находится точка равновесия (1.4.29), справедливо равенство $A=B$; ср. (1.4.9) и (1.4.22). Следовательно, равновесная цена

$$p_{\mathrm{eq}}=3c/2, \tag{1.4.59}$$

соответствующая точке (1.4.29), может быть стабилизирована действиями спекулянта. Далее, поскольку равновесная цена (1.4.59), соответствующая устойчивому по Штакельбергу решению (1.4.29), лишь в полтора раза превышает удельные издержки c, то введенное ранее допущение постоянства этих издержек также вполне приемлемо.

---

[37] См., например, работу: Стронгин П.Р. О стабилизации цены в модели экономического равновесия со спекулянтом//Математическое моделирование и оптимальное управление. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета. 1996. С.126-150.

1.5 Принцип максимина и устойчивость решений в антагонистических конфликтах

Рассмотренные выше примеры игр двух лиц (т.е. операций вида (1.2.16), на исход которых не влияют не управляемые сторонами состояния природы) показывают, что ситуации стратегического равновесия (по Нэшу или по Штакельбергу) могут не обладать свойством эффективности (т.е. могут не быть оптимальными по Парето).

Однако в случае, когда интересы сторон оказываются строго *противоположными* (см. замечание на стр.26), устойчивые решения всегда являются также и эффективными. Действительно, противоположность (или антагонизм) интересов сторон означает, что сумма их критериев является нулевой, т.е.

$$(\forall x\in X)(\forall y\in Y)\ M_1(x,y)+M_2(x,y)=0. \qquad (1.5.1)$$

При этом, как следует из (1.5.1), всякое увеличение значения критерия одной стороны ведет к равному по величине уменьшению критерия другой стороны. Таким образом, в антагонистической игре *любая* пара стратегий (x,y) является не улучшаемой и, следовательно, — эффективной. Поэтому в такой игре у игроков P_1 и P_2 нет ни индивидуальных, ни коллективных стимулов для отклонения от пары стратегий (x^*,y^*), являющейся стратегической точкой равновесия (см. также обсуждение на стр.37).

Заметим, что, согласно (1.5.1), для описания антагонистической игры достаточно задать критерий эффективности лишь для одной из сторон. Обычно в качестве такого критерия, называемого ***ядром*** антагонистической игры и обозначаемого $M(x,y)$, выбирается платежная функция первого игрока, т.е.

$$M(x,y)=M_1(x,y)=-M_2(x,y). \qquad (1.5.2)$$

При этом неравенства (1.3.18) можно переписать в виде:

$$(\forall x\in X)\; M(x^*,y^*)\geq M(x,y^*),$$

$$(\forall y\in Y)\; -M(x^*,y^*)\geq -M(x^*,y),$$

или

$$(\forall x\in X)(\forall y\in Y)\; M(x,y^*)\leq M(x^*,y^*)\leq M(x^*,y). \qquad (1.5.3)$$

Определение 1.7 (*седловой точки*). Точка (x^*,y^*) из произведения множеств X×Y, удовлетворяющая неравенствам (1.5.3), называется ***седловой точкой*** функции $M(x,y)$.

Замечание 1.14 (о термине седловая точка). В седловой точке (x^*,y^*) из (1.5.3) одновременно достигается и максимальное (по $x\in X$) значение

$$M(x^*,y^*)=\max\{M(x,y^*):\, x\in X\}, \qquad (1.5.4)$$

и минимальное (по $y\in Y$) значение

$$M(x^*,y^*)=\min\{M(x^*,y):\, y\in Y\} \qquad (1.5.5)$$

функции $M(x,y)$. Для иллюстрации рассмотрим случай, когда множества $X=[a,b]$ и $Y=[c,d]$ являются числовыми интервалами. Примем также, что кривые $M(x,y')$, $x\in X$, и $M(x',y)$, $y\in Y$, являются выпуклыми соответственно вверх и вниз функциями (при любых фиксированных значениях $y'\in Y$ и $x'\in X$). Этот случай представлен на рис. 1.13. При этом начало координат помещено в точку (x^*,y^*). Рисунок иллюстрирует как отношения (1.5.4) и (1.5.5), так и мотивы выбора термина «седловая» для точки (x^*,y^*) из (1.5.3).

Как следует из проведенного рассмотрения, существование устойчивых решений антагонистической игры определяется существованием седловых точек ядра этой игры. Следующие утверждения устанавливают ряд важных свойств таких точек.

Теорема 1.4 (о сравнении минимаксного и максиминного значений ядра игры). *Максиминное значение ядра игры всегда не больше его минимаксного значения, т.е.*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x,y). \qquad (1.5.6)$$

При этом предполагается, что левая и правая части неравенства (1.5.6) существуют и являются конечными.

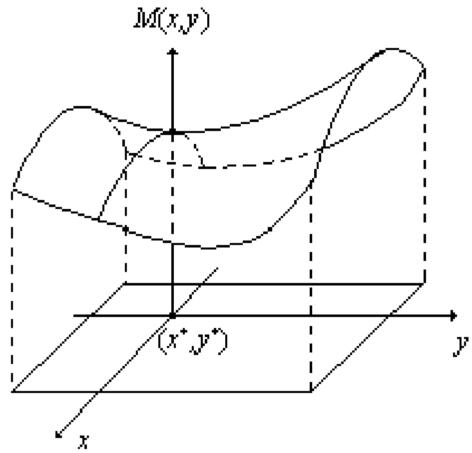

Рис. 1.13

Замечание 1.15 (о связи переменных, являющихся указателями стратегий сторон, с операциями максимума и минимума). Поскольку (см. (1.5.2)) интересы игрока P_1 могут интерпретироваться как стремление максимизировать (по $x\in X$) критерий $M(x,y)=M_1(x,y)$, а интересы игрока P_2 — как стремление минимизировать (по $y\in Y$) тот же критерий $M(x,y)=-M_2(x,y)$, то в моделях антагонистических игр операция максимизации критерия всегда предполагает вариацию стратегий первого игрока, а операция минимизации — вариацию стратегии второго игрока.

Доказательство. По определению максимума и минимума,

$$(\forall x\in X)(\forall y\in Y)\min_{y\in Y} M(x,y) \le M(x,y) \le \max_{x\in X} M(x,y),$$

или

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \min_{y \in Y} M(x, y) \le \max_{x \in X} M(x, y) \ ,$$

где левая часть не зависит от параметра y. Отсюда следует, что

$$(\forall x \in X) \min_{y \in Y} M(x, y) \le \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y).$$

В последнем отношении правая часть не зависит от x и, следовательно, имеет место неравенство (1.5.6), справедливость которого и требовалось доказать. ■

Теорема 1.5 (о необходимых и достаточных условиях существования седловой точки ядра). *Пусть существуют и являются конечными минимаксное и максиминное значения ядра* $M(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, *антагонистической игры. Тогда необходимым и достаточным условием существования седловой точки* $(x^*,y^*) \in X \times Y$ *этого ядра является справедливость равенства указанных выше минимаксного и максиминного значений, т.е.*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y). \qquad (1.5.7)$$

При этом в случае выполнения равенства (1.5.7), *значения его левой и правой частей совпадают со значением ядра в седловой точке, т.е. совпадают с величиной* $M(x^*,y^*)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть (x^*,y^*) есть седловая точка ядра $M(x,y)$. Тогда из (1.5.3) следуют неравенства:

$$\max_{x \in X} M(x, y^*) \le M(x^*, y^*) \le \min_{y \in Y} M(x^*, y), \qquad (1.5.8)$$

для левой и правой части которых справедливы оценки:

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) \le \max_{x \in X} M(x, y^*), \qquad (1.5.9)$$

$$\min_{y\in Y} M(x^*, y) \le \max_{x\in X} \min_{y\in Y} M(x, y). \tag{1.5.10}$$

Теперь из (1.5.8)–(1.5.10) выводим отношение

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} M(x, y) \le \max_{x\in X} \min_{y\in Y} M(x, y),$$

находящееся в противоречии с утверждением (1.5.6) предшествующей теоремы. Следовательно, в выражениях (1.5.8)–(1.5.10) возможны лишь отношения типа точных равенств. Таким образом, справедливость утверждения (1.5.7) доказана. При этом значения его левой и правой частей совпадают с величиной $M(x^*,y^*)$.

Достаточность. Пусть функция

$$\min\{M(x, y): y\in Y\}, \ x\in X, \tag{1.5.11}$$

достигает максимума (по x) в точке $x^*\in X$, а функция

$$\max\{M(x, y): x\in X\}, \ y\in Y, \tag{1.5.12}$$

достигает минимума (по y) в точке $y^*\in Y$, т.е.

$$\min_{y\in Y} M(x^*, y) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} M(x, y), \tag{1.5.13}$$

$$\max_{x\in X} M(x, y^*) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} M(x, y). \tag{1.5.14}$$

Покажем, что точка (x^*, y^*), определяемая условиями (1.5.13), (1.5.14), является седловой точкой ядра $M(x, y)$. Поскольку, согласно предположению (1.5.7), правые части выражений (1.5.13), (1.5.14) совпадают, то должны совпадать и их левые части, т.е.

$$\max_{x\in X} M(x, y^*) = \min_{y\in Y} M(x^*, y). \tag{1.5.15}$$

В силу свойств максимума, левая часть из (1.5.15) не меньше, чем величина $M(x,y^*)$, $x\in X$. Аналогично, в силу свойств минимума, правая часть из (1.5.15) не больше, чем величина $M(x^*,y)$, $y\in Y$. Следовательно, справедливо неравенство

$$(\forall x\in X)(\forall y\in Y)\; M(x, y^*)\le M(x^*, y),$$

из которого вытекает справедливость условий (1.5.3) для определенной выше точки (x^*, y^*). ■

Определение 1.8 (*максиминных и минимаксных стратегий*). Стратегия x^*, определяемая условиями (1.5.13), называется ***максиминной*** стратегией игрока P_1, а стратегия y^*, определяемая условиями (1.5.14), — ***минимаксной*** стратегией игрока P_2. Нетрудно заметить, что выбор этих терминов находится в прямом соответствии с типом вложенных операций взятия экстремума из правых частей выражений (1.5.13) и (1.5.14).

Следствие 1.1 (*отношения на множестве седловых точек ядра*). *Пусть $X^*\subset X$ есть множество всех максиминных стратегий игрока P_1, а $Y^*\subset Y$ — множество всех минимаксных стратегий игрока P_2, т.е.*[38]

$$X^* = Arg\max_{x\in X}\left[\min_{y\in Y} M(x,y)\right], \tag{1.5.16}$$

$$Y^* = Arg\min_{y\in Y}\left\lfloor\max_{x\in X} M(x,y)\right\rfloor. \tag{1.5.17}$$

Тогда:

1) *любая пара стратегий (x',y'), где $x'\in X^*$* и *$y'\in Y^*$, является седловой точкой ядра $M(x,y)$;*

---

[38] Символ *Arg* обозначает множество *всех* значений аргумента, при которых достигается записанный справа от этого символа экстремум функции (по этому аргументу).

2) *если существуют две несовпадающие пары стратегий* (x',y') *и* (x'',y'') *такие, что* x', $x''\in X^*$ *и* y', $y''\in Y^*$, *то точки* (x',y''), (x'',y') *также являются седловыми точками ядра*;

3) *значения ядра во всех седловых точках являются одинаковыми.* ■

Доказанная теорема определяет конструктивный путь поиска устойчивых решений антагонистической игры с заданным ядром. В соответствии с этим подходом следует вычислить правые части выражений (1.5.13), (1.5.14) и провести их сравнение. В случае совпадения указанных величин, точка (x^*,y^*), компоненты которой определяются левыми частями выражений (1.5.13), (1.5.14), является седловой точкой ядра $M(x,y)$ и, следовательно, представляет собой устойчивое по Нэшу и оптимальное по Парето решение. Это решение допускает следующую интерпретацию.

Выбор стороной P_1 стратегии $x\in X$ *гарантирует* ей, что ее *выигрыш* (т.е. полезность, обеспечиваемая выбранным решением) будет не ниже, чем величина (1.5.11). Следовательно, максиминная стратегия x^*, определяемая условием (1.5.13), обеспечивает стороне P_1 *максимальный гарантированный выигрыш.* Фактически, принятие этой стратегии соответствует ориентации игрока P_1 на худший для него вариант поведения игрока P_2. Такая ориентация является вполне естественной для рассматриваемого случая антагонистических отношений сторон (см. также замечание на стр.29).

Аналогично, выбор стороной P_2 стратегии $y\in Y$ *гарантирует*, что ее *проигрыш* не превысит величины (1.5.12). Следовательно, минимаксная стратегия y^*, определяемая условием (1.5.14), минимизирует максимальные возможные потери этой стороны.

Заметим, что в случае не единственности максиминных (для P_1) и минимаксных (для P_2) стратегий у сторон нет необходимости согласовывать друг с другом реализуемые ими выборы. Согласно следствию из теоремы, любые сочетания выбранных сторонами P_1 и P_2 соответственно максиминных и минимаксных стратегий образуют седловую точку ядра и гарантируют сторонам один и тот же уровень полезности.

Замечание 1.16 (о *ценах игры*). Существование максиминных стратегий x^* из (1.5.16) и минимаксных стратегий y^* из (1.5.17) еще не гарантируют совпадения величин

$$\underline{v} = \min_{y\in Y} M(x^*, y) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} M(x, y) \tag{1.5.18}$$

и

$$\overline{v} = \max_{x\in X} M(x, y^*) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} M(x, y), \tag{1.5.19}$$

называемых соответственно ***нижней ценой игры*** и ***верхней ценой игры*** (используются также термины *нижнее значение игры* и *верхнее значение игры*). Согласно (1.5.6), нижняя цена игры всегда не выше, чем верхняя цена. Как мы уже установили, совпадение верхнего и нижнего значений игры является необходимым и достаточным условием существования в этой игре устойчивых по Нэшу пар стратегий. В этом случае общее значение

$$v = \underline{v} = \overline{v} \tag{1.5.20}$$

называется ***ценой игры***.

Определение 1.9 (*решения* антагонистической игры). Пусть ядро $M(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, имеет седловую точку (x^*,y^*). Тогда тройку величин

$$(x^*, y^*, v), \tag{1.5.21}$$

где v есть цена игры из (1.5.18)–(1.5.20), называют ***решением*** антагонистической игры.

Как уже было отмечено выше, стратегии x^* и y^* из (1.5.21) соответствуют устойчивому поведению сторон, поскольку свойства равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето исключают стимулы к изменению решений. При этом каждая из сторон может независимо определять свое поведение, руководствуясь принципом максимального гарантированного результата. Отметим также, что цена игры v является объективной характеристикой свойств ядра игры. Игрок P_1 не может гарантировать себе выигрыш, превышающий эту величину. Однако для реализации этой гарантии он должен придерживаться своей максиминной стратегии. Аналогичные замечания справедливы и для игрока P_2.

Пример 1.4 (поиск решения антагонистической игры путем вычисления максимального гарантированного результата). Рассмотрим региональный рынок, на котором спрос на некоторый товар носит сезонный характер. Таким товаром может, в частности, быть посевной материал, не допускающий длительного хранения (например, рассада для выращивания овощей в открытом грунте). Будем полагать, что покупателями этого товара являются многочисленные независимые производители соответствующей сельхозпродукции, приобретающие материал непосредственно перед посевными работами и традиционно не имеющие *фьючерских*[39] соглашений на поставку материала.

Рассмотрим ситуацию, когда некоторая фирма P_1 ставит задачу захвата данного регионального рынка путем проведения единовременной массированной рекламной кампании. Такая кампания может, например, включать демонстрации образцов, встречи с известными экспертами, показы фильмов, публикации в средствах массовой информации, проведение конкурсов и т.п. Стержнем кампании является демонстрация преимуществ предлагаемого материала и технологии ведения работ по сравнению с существующими (при тех же затратах).

Руководство фирмы решает вопрос о том, за какое время x до начала массовых закупок посевного материала следует запустить указанную единовременную кампанию. Будем называть соответствующую величину x *временем упреждения* и примем масштаб

[39] *Фьючерские операции* — срочные сделки, представляющие собой куплю-продажу по фиксируемой в момент заключения сделки цене с исполнением операции через определенный промежуток времени.

времени, при котором максимальное упреждение не превышает единицы, т.е. $x \in [0,1]$.

Положим, что фирма P_1 имеет значительный опыт продвижения своей продукции на региональные рынки и это позволяет ей оценить вероятность $p_1(x)$ успешного захвата рынка в случае проведения рекламной кампании с упреждением, равным времени x. Естественно принять, что эта вероятность (строго) монотонно возрастает, приближаясь к значению $p_1(0)=1$, по мере уменьшения упреждения x (см. рис. 1.14). Т.е. проведение рекламной кампании непосредственно перед периодом массовых закупок (когда вопрос о посевном материале оказывается в фокусе интересов и внимания покупателей) гарантирует захват рынка в силу действительных достоинств новой продукции.

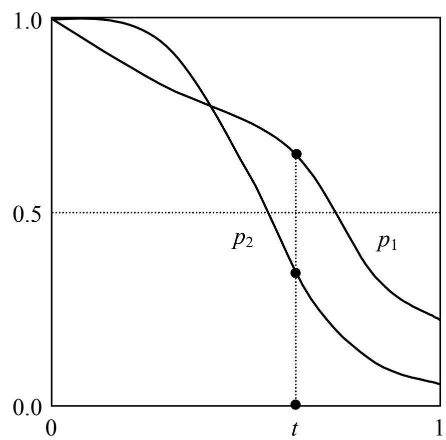

Рис. 1.14

Теперь примем, что этот же региональный рынок пытается захватить другая фирма P_2, которая также планирует проведение единовременной рекламной кампании за некоторое время y (из уже рассмотренного интервала [0,1]) до начала массовых закупок. Фирма P_2, как и фирма P_1, строит свою кампанию, опираясь на превосходство предлагаемого ею товара над традиционно продаваемым материалом. Опыт фирмы позволяет ей оценить вероятность $p_2(y)$ захвата рынка как некоторую (строго) монотонно убывающую функцию времени упреждения y. При этом $p_2(0)=1$. Указанная оценка $p_2(y)$ основана на предположении, что конкурирующая фирма P_1 не захватила рынок в более ранний момент (т.е. при $x>y$), закрепив этот захват заключением договоров на поставку своей продукции. Последнее обстоятельство относится и к оценке $p_1(x)$, которая справедлива лишь при условии, что фирма P_2 еще не захватила рынок, начав свою кампанию с большим упреждением $y>x$. Таким образом, с одной стороны, каждая фирма заинтересована задержать начало рекламной кампании, чтобы увеличить вероятность успеха. С другой стороны, существует риск поплатиться за ожидание утратой всякой возможности захватить рынок.

Условимся, что момент принятия решения настолько удален от времени начала закупок, что

$$p_1(1)+p_2(1)<1. \tag{1.5.22}$$

Перейдем к описанию полезностей, характеризующих исходы операции. Примем, что успешный захват рынка фирмой P_i обеспечивает ей единичную полезность ($i=1,2$). При этом значение полезности для фирмы, уступившей рынок, полагается отрицательным и равным -1.

Рассмотрим ситуацию, когда рекламные акции обеих сторон проводятся одновременно (т.е. при равных упреждениях $x=y$). При этом возможно (вероятность этого случая равна величине $(1-p_1(x))(1-p_2(y))$, $x=y$), что ни одна из фирм не сможет захватить рынок (или его часть) и он останется за традиционным поставщиком. Такая ситуация полагается более предпочтительной, чем победа конкурента, и мы примем, что ей соответствуют нулевые полезности для обеих сторон.

Возможен (с вероятностью, равной величине $p_1(x)p_2(y)$, $x=y$) случай, когда каждая из сторон сможет захватить некоторый сегмент рынка. При этом обе фирмы могут быть как самостоятельными производителями товара (возможно, разного качества), так и *дилерами*[40] одного и того же производителя. Они могут также быть производителями, действующими на основе *франшизы*[41] от одной и той же компании. В этих случаях их рекламная акция будет сфокусирована на лучших условиях доставки и сопровождения товара (т.е. на качестве соответствующих услуг), что может иметь не одинаковую привлекательность для разных категорий покупателей. Эти и другие обстоятельства могут влиять на характер раздела рынка фирмами P_1,P_2 и традиционным поставщиком. Описанные случаи также предпочтительнее, чем полная победа конкурента, и мы примем, как и выше, что им соответствуют нулевые полезности для обеих сторон.

Замечание 1.17 (об *усреднении* полезностей). Описанная операция, фактически, содержит неконтролируемые сторонами параметры (хотя эти параметры и не указаны явно). Выбор сторонами P_1 и P_2 решений x и y еще не определяет исхода операции. Прогнозирование этого исхода на основе оценки для худшего случая будет означать отказ от важной информации, которую дают вероятности $p_1(x)$ и $p_2(y)$ захвата рынка. Возможный способ учета такой информации состоит в том, чтобы оценивать выбираемые решения на основе математических ожиданий полезностей сторон, соответствующих этим решениям. Этот прием использования математических ожиданий для исключения из рассмотрения неконтролируемых состояний природы называется ***усреднением полезностей***.

Определим математическое ожидание полезности для стороны P_1 как функцию решений x, y и будем рассматривать эту величину как ядро обсуждаемой антагонистической игры. При $x>y$ сторона P_1 с вероятностью $p_1(x)$ захватывает рынок, обеспечивая себе полезность, равную $+1$. В случае неудачи, вероятность которой равна $1-p_1(x)$, сторона P_2 захватывает рынок, проведя свою

---

[40] *Дилер* — оптовый покупатель товаров и услуг для розничной перепродажи их потребителям.

[41] *Франшиза* — право на производство продукции другой компании.

рекламную акцию накануне периода закупок. При этом полезность такого исхода для стороны P_1 составляет -1. Таким образом,

$$M(x, y)=p_1(x)-[1-p_1(x)]=2p_1(x)-1,\ 0\le y<x\le 1.$$

Аналогично, при $x<y$ стороны P_1 и P_2 захватывают рынок с вероятностями, равными соответственно $1-p_2(y)$ и $p_2(y)$. Поэтому

$$M(x, y)=[1-p_2(y)]-p_2(y)=1-2p_2(y),\ 0\le x<y\le 1.$$

В случае одновременных рекламных акций (т.е. при $x=y$) захват рынка сторонами P_1 и P_2 имеет место с вероятностями равными соответственно:

$$p_1(x)[1-p_2(x)] \text{ и } p_2(x)[1-p_1(x)].$$

Следовательно,

$$M(x, y)=p_1(x)[1-p_2(x)]-p_2(x)[1-p_1(x)]=p_1(x)-p_2(x),\ x=y,$$

поскольку в случае неудачи обеих сторон, а также в случае раздела ими рынка соответствующие полезности определены как нулевые. В результате получаем функцию

$$M(x, y)=\begin{cases} 2p_1(x)-1, & 0\le y<x\le 1, \\ p_1(x)-p_2(x), & 0\le x=y\le 1, \\ 1-2p_2(y), & 0\le x<y\le 1, \end{cases} \tag{1.5.23}$$

представляющую рассматриваемой игры в смешанных стратегиях и не обладающую свойством непрерывности.

Замечание 1.18 (о *бабочкообразных ядрах*). Рассмотрим частный случай, когда

$$p_1(x)=1-x,\ \ p_2(y)=1-y,$$

и, следовательно,

$$M(x,y)=\begin{cases}1-2x, & 0\le y<x\le 1,\\ 0, & 0\le x=y\le 1,\\ 2y-1, & 0\le x<y\le 1.\end{cases} \tag{1.5.24}$$

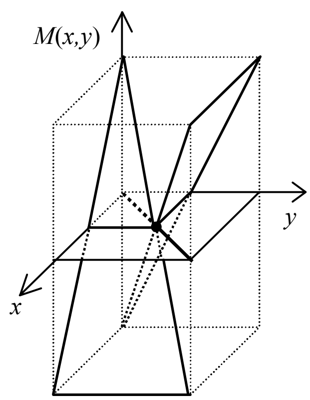

Рис. 1.15

Разрывная поверхность, соответствующая функции $M(x,y)$ из (1.5.24), определенной на единичном квадрате $0\le x,y\le 1$, представлена на рис. 1.15. Указанная поверхность составлена из трех частей, включающих два плоских треугольника и (изображенный жирной линией) отрезок, лежащий на прямой $x=y$. Все части имеют общую точку (отмеченную темным кружком). Форма поверхности напоминает бабочку и этим определяется использование термина «бабочкообразные ядра» применительно к функциям вида (1.5.23).

Оценим нижнюю цену игры и максиминную стратегию игрока P_1. Воспользуемся представлением

$$\underline{v}=\max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}M(x,y)=\max_{0\le x\le 1}\mu(x), \tag{1.5.25}$$

$$\mu(x)=\min\left\{\inf_{0\le y<x}M(x,y),\, M(x,x),\, \inf_{x<y\le 1}M(x,y)\right\}.$$

При этом, согласно (1.5.23),

$$\inf\{M(x,y):\, 0\le y< x\}=2p_1(x)-1,$$

$$M(x,x)=p_1(x)-p_2(x),$$

$$\inf\{M(x,y):\, x< y\le 1\}=1-2p_2(x)$$

и, следовательно,

$$\mu(x)=\min\{2p_1(x)-1,\, p_1(x)-p_2(x),\, 1-2p_2(x)\}. \tag{1.5.26}$$

Определим вещественное число t как решение уравнения (см. рис. 1.14)

$$p_1(t)+p_2(t)=1. \tag{1.5.27}$$

Заметим, что в силу (1.5.22), условий

$$p_1(0)=1,\ \ p_2(0)=1$$

и условия монотонности функций p_1, p_2, решение уравнения (1.5.27) существует и является единственным. Теперь, согласно (1.5.25), можно оценить нижнюю цену игры как

$$\underline{v}=\max\left\{\sup_{0\le x<t}\mu(x),\, \mu(t),\, \sup_{t<x\le 1}\mu(x)\right\}. \tag{1.5.28}$$

Из (1.5.27) и условия монотонности функций p_1, p_2 вытекает, что

$$p_1(t)+p_2(t)\ge 1,\ \ 0\le x\le t. \tag{1.5.29}$$

Прибавив к каждой части этого неравенства величину $p_1(x)$, получим левое неравенство из записи (1.5.30):

$$2p_1(x)-1\ge p_1(x)-p_2(x)\ge 1-2p_2(x). \tag{1.5.30}$$

Вычитая величину $2p_2(x)$ из левой и правой частей неравенства (1.5.29), получим правое неравенство из (1.5.30). Теперь из (1.5.26) и (1.5.30) следует, что

$$\mu(x)=1-2p_2(x),\ \ 0\le x\le t,$$

причем

$$\sup\{\mu(x)\colon 0\le x< t\}=1-2p_2(t). \tag{1.5.31}$$

Неравенство

$$p_1(t)+p_2(t)\le 1,\ \ t\le x\le 1, \tag{1.5.32}$$

также является следствием (1.5.27) и условий монотонности функций p_1 и p_2. Сопоставляя (1.5.29) и (1.5.32), выводим, что следствием (1.5.32) являются неравенства обратные отношениям в (1.5.30), т.е.

$$2p_1(x)-1\le p_1(x)-p_2(x)\le 1-2p_2(x). \tag{1.5.33}$$

Тогда из (1.5.26) и (1.5.33) вытекает, что

$$\mu(x)=2p_1(x)-1,\ \ t\le x\le 1,$$

причем

$$\sup\{\mu(x)\colon t< x\le 1\}=2p_1(t)-1. \tag{1.5.34}$$

Пусть теперь $x=t$. Тогда из (1.5.30) и (1.5.33) следует равенство

$$2p_1(x)-1= p_1(x)-p_2(x)= 1-2p_2(x), \tag{1.5.35}$$

откуда, учитывая (1.5.28) и (1.5.31), (1.5.34), получаем, что

$$\underline{v}=\max\{\mu(x)\colon 0\le x\le 1\}= p_1(t)-p_2(t). \tag{1.5.36}$$

При этом максиминная стратегия x^* игрока P_1 определяется как решение уравнения (1.5.27), т.е. $x^*=t$.

Аналогично определяется верхняя цена игры и минимаксная стратегия игрока P_2. Запишем

$$\overline{v}=\min_{0\le y\le 1}\max_{0\le x\le 1} M(x,y)=\min_{0\le y\le 1}\eta(y), \tag{1.5.37}$$

$$\eta(y)=\max\left\{\sup_{0\le x<y} M(x,y),\, M(y,y),\, \sup_{y<x\le 1} M(x,y)\right\}.$$

При этом, согласно (1.5.23),

$$\sup\{M(x,y):\ 0\le x<y\}=1-2p_2(y),$$

$$M(y,y)=p_1(y)-p_2(y),$$

$$\sup\{M(x,y):\ y<x\le 1\}=2p_1(y)-1,$$

и, следовательно,

$$\eta(y)=\max\{2p_1(y)-1,\ p_1(y)-p_2(y),\ 1-2p_2(y)\}. \tag{1.5.38}$$

Теперь из (1.5.38), (1.5.30) и (1.5.33) выводим, что

$$\eta(y)=2p_1(y)-1,\ \ 0\le y<t,$$

$$\eta(y)=1-2p_2(y),\ \ t<y\le 1,$$

откуда следует справедливость оценок

$$\inf\{\eta(y):\ \ 0\le y<t\}=2p_1(t)-1,$$

$$\inf\{\eta(y):\ \ t<y\le 1\}=1-2p_2(t).$$

Полученные оценки в сочетании с равенством (1.5.35) приводят к выводу, что

$$\overline{v}=\min\{\eta(y)\colon 0\leq y\leq 1\}=p_1(t)-p_2(t). \qquad (1.5.39)$$

При этом минимаксная стратегия y^* игрока P_2 определяется тем же значением t, что и максиминная стратегия игрока P_1, т.е.

$$x^*=y^*=t, \qquad (1.5.40)$$

где t из (1.5.27); см. рис. 1.14.

Совпадение верхней и нижней цен игры доказывает, что пара (x^*,y^*) из (1.5.40) является седловой точкой ядра (1.5.23). Следовательно, эта пара стратегий определяет решение, обладающее свойствами равновесия по Нэшу. Полученному решению соответствует цена игры

$$v=p_1(t)-p_2(t). \qquad (1.5.41)$$

Еще раз отметим, что решение (1.5.40), (1.5.41) является также оптимальным по Парето. Следует также обратить внимание на то, что величина v из (1.5.41) есть гарантированное игроку P_1 *математическое ожидание* полезности, а не выигрыш в конкретной реализации игры (который может иметь лишь значения из множества $\{-1,0,+1\}$). В случае, когда цена игры v оказывается *положительной* (отрицательной), говорят, что игра ***поставлена*** в пользу *первого* (второго) игрока. При $v=0$ игру называют «***безобидной***».

Выражение (1.5.41) для цены игры является важной рекомендацией. Согласно этому выражению, для постановки игры в свою пользу игрок P_i (i=1,2) должен стремиться увеличить вероятность $p_i(t)$, соответствующую упреждению t из (1.5.27). Как уже отмечалось, мы полагаем, что каждая из сторон знает обе функции p_1, p_2.

Замечание 1.19 (об *играх типа дуэлей*). Модели рассмотренного выше типа первоначально использовались как средство описания боевых столкновений типа дуэлей (например, дуэли истребитель–бомбардировщик, штурмовик–наземный комплекс и т.п.). При этом функции $p_1(x)$ и $p_2(y)$ характеризуют вероятности поражения противника при выстреле, осуществленном игроком P_1 или P_2 соответственно с расстояния x или y (при естественном предположении, что стреляющая сторона не была уничтожена противником еще до своего выстрела). В теории рассмотрены случаи, когда стороны могут последовательно осуществить несколько выстрелов, обнаруживая факты промахов противника (в этом случае дуэль называется «*шумной*») или не имея возможностей для такого обнаружения (в этом случае говорят о «*бесшумной*» дуэли). Исследования таких моделей оказали определенное влияние на содержание наставлений для некоторых родов войск[42].

В этой связи пример, рассмотренный выше, может классифицироваться как шумная дуэль, в которой каждая сторона имеет один выстрел. Заметим, что интерпретация дуэлей как конкурентных взаимодействий появилась значительно позднее[43].

В заключение отметим, что успешное вычисление минимаксного и максиминного значений ядра в рассмотренном примере существенно опиралось на специфику конкретной функции (1.5.23). В общем случае такие вычисления могут оказаться гораздо более сложными. Эти трудности, однако, исчезают, если выбор стратегий (для каждой стороны) ограничен конечным числом вариантов, которые можно перебрать в процессе анализа. Этот случай рассматривается в следующей главе.

---

[42] Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Советское радио, 1964.

[43] См., например, пособие: Крушевский А.В. Теория игр. Киев: Вища школа, 1977.