Глава 2
Устойчивость решений в двухсторонних конфликтах с конечным числом стратегий

2.1 Матричные и биматричные игры

Определение 2.1 (*конечных, матричных и биматричных игр*). Игра (1.2.16) называется ***конечной***, если множества X и Y стратегий сторон P_1 и P_2 являются конечными. В конечной игре можно занумеровать стратегии сторон целыми числами и рассматривать эти числа как указатели стратегий:

$$X=\{1,\ldots,i,\ldots,m\},\ \ Y=\{1,\ldots,j,\ldots,n\}. \qquad (2.1.1)$$

Поскольку при этом критерии $M_1(i, j)$ и $M_2(i, j)$ определены на конечном множестве $X\times Y$, то их значения можно представить с помощью таблиц A и B. Строки этих таблиц (с номерами $i\in X$) соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы (с номерами $j\in Y$) — стратегиям второго игрока.

Так как пара таблиц A и B полностью описывает модель (1.2.16) конечной игры (т.е. задает множества X,Y из (2.1.1) и функции $M_1(i,j)=a_{ij}$, $M_2(i,j)=b_{ij}$), то конечная игра двух лиц называется также ***биматричной игрой*** .

В случае, когда интересы сторон являются антагонистическими и, согласно (1.5.2),

$$a_{ij}=-b_{ij}\ , \qquad (2.1.2)$$

для описания игры достаточно задания одной матрицы A. Поэтому конечные антагонистические игры называются также ***матричными играми***.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрица A</td><td colspan="5">Стратегии P_2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>…</td><td>j</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Стратегии P_1</td><td>1</td><td>a_{11}</td><td>…</td><td>a_{1j}</td><td>…</td><td>a_{1n}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>i</td><td>a_{i1}</td><td>…</td><td>a_{ij}</td><td>…</td><td>a_{in}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>m</td><td>a_{m1}</td><td>…</td><td>a_{mj}</td><td>…</td><td>a_{mn}</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрица B</td><td colspan="5">Стратегии P_2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>…</td><td>j</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Стратегии P_1</td><td>1</td><td>b_{11}</td><td>…</td><td>b_{1j}</td><td>…</td><td>b_{1n}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>i</td><td>b_{i1}</td><td>…</td><td>b_{ij}</td><td>…</td><td>b_{in}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>m</td><td>b_{m1}</td><td></td><td>b_{mj}</td><td>…</td><td>b_{mn}</td></tr>
</table>

Пример 2.1 (соглашение об ограничениях при ловле рыбы). Пусть две страны, осуществляющие лов рыбы в одних и тех же водах, согласились на взаимное ограничение добычи с целью сохранения рыбных запасов. При этом каждая из сторон не имеет реальных средств, чтобы контролировать соблюдение соглашения другой стороной. Это обстоятельство исключает возможность применения санкций за нарушения.

Возможные стратегии сторон состоят в том, чтобы соблюдать или не соблюдать принятые соглашения. Доходы сторон (в некоторых условных единицах), соответствующие различным выборам стратегий, представлены парами целых чисел (разделенных запятыми) в следующей таблице. При этом первый коэффициент каждой пары соответствует элементу матрицы A, а второй коэффициент — элементу матрицы B.

Как следует из определения равновесия по Нэшу (см. стр. 36), в задаче существует единственная пара стратегий

$$i^*=2,\ j^*=2, \tag{2.1.3}$$

обладающая свойством устойчивости. Таким образом (единственно возможное) устойчивое поведение сторон состоит в том, что каждая из них не соблюдает соглашение.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрицы A и B</td><td colspan="2">Стратегии P_2</td></tr>
<tr><td>Соблюдать соглашение</td><td>Не соблюдать соглашение</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Стратегии P_1</td><td>Соблюдать соглашение</td><td>10, 10</td><td>5, 11</td></tr>
<tr><td>Не соблюдать соглашение</td><td>11, 5</td><td>6, 6</td></tr>
</table>

При этом, например, решение $i=j=1$, предполагающее взаимное соблюдение соглашения, обеспечивает каждой из сторон больший доход, чем решение (2.1.3). Однако решение $i=j=1$ не является устойчивым. Итак, (2.1.3) есть единственное устойчивое решение в рассматриваемой задаче и оно не эффективно (т.е. улучшаемо — см. определение на стр. 37). Все остальные решения эффективны (оптимальны по Парето), но не устойчивы.

Определение 2.2 (*седлового значения матрицы*). В случае матричных игр определение (1.5.3) седловой точки $(\mu,\nu)\in X\times Y$ ядра игры может быть переписано в виде:

$$a_{i\nu} \le a_{\mu\nu} \le a_{\mu j},\ \ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\ . \tag{2.1.4}$$

При этом коэффициент $a_{\mu\nu}$, соответствующий значению ядра в седловой точке, называется ***седловым значением матрицы игры***. Заметим, что этот коэффициент (если он существует) является минимальным числом в содержащей его строке и — максимальным числом в содержащем его столбце.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую таблицу, которая соответствует матрице некоторой игры (описание этой игры будет дано ниже). Как следует из таблицы и из условий (2.1.4), пары стратегий (μ=3,ν=2) и (μ=4,ν=2) соответствуют седловым точкам ядра и, следовательно, устойчивы по Нэшу. Заметим, что отвечающие им седловые значения a_{32} и a_{42} являются одинаковыми, что согласуется с третьим утверждением следствия из теоремы об условиях существования седловой точки ядра (см. стр. 79).

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Случай, когда матричная игра не имеет устойчивых решений, иллюстрирует следующий пример, который можно считать классическим.

Пример 2.2 (игра в орлянку). Пусть каждый из игроков независимо выбирает одну из двух сторон монеты, соответственно именуемых «Герб» и «Решка». Если выборы сторон совпали, то игрок P_2 отдает монету игроку P_1. В противном случае монету получает игрок P_2 (за счет игрока P_1). Если принять номинал монеты за единицу, то этой антагонистической игре соответствует матрица из табл. 2.1.

Матрица этой игры не содержит седловых значений, поскольку максимальные элементы первого и второго столбцов не являются минимальными числами в содержащих их строках. Заметим, что указанное отсутствие устойчивых стратегических пар ведет к недостаточности принципа максимального гарантированного результата для выбора решений. Т.е. этот принцип не может быть удовлетворительной основой для рекомендаций, определяющих поведение.

Таблица 2.1

Матрица игры в орлянку		Стратегии P_2	
		Герб	Решка
Стратегии P_1	Герб	$+1$	-1
	Решка	-1	$+1$

Согласно (1.5.18) и (1.5.19), нижняя и верхняя цены игры в орлянку равны соответственно числам -1 и $+1$. Сторона P_1, соглашаясь на гарантированный уровень полезности, который обеспечивается применением ее максиминной стратегией (см. определение на стр. 79), получает доход, равный нижней цене игры (т.е. -1). При этом она отдает другой стороне величину $+1$, существенно превышающую тот уровень дохода, который сторона P_2 может гарантировать себе сама. В связи с этим представляет интерес более полное раскрытие условий, при которых обеспечивается существование устойчивых решений. Необходимо также определение эффективных способов поведения сторон в условиях, когда отсутствуют решения, отвечающие понятию устойчивости введенному на стр. 36.

2.2 Задание конечной игры в позиционной (или развернутой) форме

Примеры операций, рассмотренные выше, были непосредственно представимы моделями в нормальной форме (см. определение на стр. 18). При этом каждая сторона однократно осуществляла свой выбор, и совокупный выбор сторон определял полезность (для каждой из них) соответствующего исхода. В тех случаях, когда содержащиеся в задаче неуправляемые параметры (состояния природы) порождали неопределенность исхода, эта неопределенность могла быть исключена либо путем перехода к оценкам, основанным на гарантированном результате, либо путем перехода к математическим ожиданиям оценок.

Существуют, однако, операции, в ходе которых стороны многократно осуществляют выбор своих решений, т.е. процесс принятия решений *развертывается во времени* и не сводится к единственному выбору. Типичным (и хорошо известным) примером такого рода является игра в шахматы. Т.е. исходное описание операции, возникающее в приложениях, может отличаться от нормальной формы. Рассмотрим один из примеров такого рода.

Пример 2.3 (погоня за конкурентом). Пусть торговая фирма P_1 обеспечивает населенные пункты П2, П4 и П5 некоторым потребляемым продуктом с ограниченным сроком хранения (например, свежей рыбой, перевозимой в цистернах с водой). При этом товар (от достаточно удаленного поставщика) поступает в пункт П4, который является исходной точкой двух маршрутов, используемых фирмой P_1. Первый маршрут включает последовательные переезды из П4 в П2 и затем из П2 в П5 с последующим возвращением из П5 в П4. Будем обозначать этот маршрут символом МП2. Второй (более короткий) маршрут предполагает переезд из П4 в П5 с возвращением в П4. Обозначим его МП5. Указанные населенные пункты и связывающие их маршруты изображены на схеме, представленной на рис. 2.1 (варианты путей, возможных для фирмы P_1, отмечены на рисунке жирными линиями).

Примем теперь, что некоторая другая фирма P_2, создающая свою собственную производственную базу (например, на прудах) в малонаселенном пункте П3 и еще не имеющая значительных объемов производства, планирует подготовку потребителей к положительному восприятию своего продукта. Планируемая акция состоит в проведении продаж ограниченного объема, нацеленных на демонстрацию исключительно высокого качества предлагаемого товара (при прочих равных условиях). Заметим, что в случае торговли свежей рыбой, указанное преимущество может определяться близостью источника поставки, создаваемого фирмой P_2, и удаленностью такого источника у фирмы P_1.

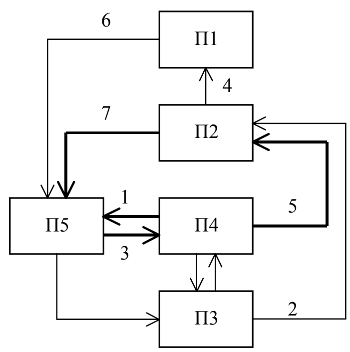


Рис. 2.1

Фирма P_2 ставит задачу продавать малые партии своего товара *одновременно и одноместно* с продажами, которые осуществляет давно действующая на рынке фирма P_1. Ожидается, что такой подход усилит рекламный эффект за счет непосредственной демонстрации уже упомянутого превосходства качества. Для этой цели фирма P_2 может воспользоваться следующими двумя маршрутами, отмеченными тонкими линиями на рис. 2.1. Первый маршрут включает последовательные переезды из П3 в П2, затем из П2 в П1 и далее из П1 в П5. Маршрут завершается возвращением в П3. Обозначим его МП2. Включенный в этот маршрут пункт П1 (см. верхнюю часть схемы на рис. 2.1) является новостройкой и фирма P_1, продающая большие партии товара, еще не торгует в П1. В связи с этим новая фирма P_2 полагает важным зафиксировать свое присутствие в этом пункте. Второй маршрут предполагает доставку и продажу товара в П4 с возвращением в П3. Обозначим его МП4.

Заметим, что конфигурация возможных маршрутов может быть следствием характера транспортной сети. Например, возможно, что пункты П1, П2 и пункты П3-П5 находятся на разных берегах реки и при этом мостовые переправы, ведущие в П2 из

П3, П4 и в П5 из П1, П2, временно открыты лишь в одну сторону.

Принятая P_2 линия поведения состоит в том, чтобы, установив факт получения товара фирмой P_1 (свидетельством чего могут быть начавшиеся продажи этого товара в пункте П4), реализовать продажи на одном из собственных маршрутов. Будем полагать, что большой объем партии товара, получаемой фирмой P_1, допускает неоднократное возвращение в пункт П4 с последующим выбором маршрута продолжения продаж. При этом ограниченный объем каждой пробной партии товара, реализуемой фирмой P_2, позволяет ей осуществить описанную рекламную акцию лишь на одном из маршрутов.

Следующее важное обстоятельство касается того, *информирована* ли фирма P_2 в момент выбора своего маршрута о том маршруте, по которому товар фирмы P_1 покинет пункт П4. В этой связи мы будем рассматривать два случая. Первый из них связан с предположением о том, что каждый раз, когда фирма P_1 покидает пункт П4, фирма P_2 информирована о маршруте, выбранном P_1 (до принятия своего решения). Во втором случае мы будем полагать такую информацию отсутствующей.

Время перемещения продаж из одного населенного пункта, лежащего на маршруте, в другой населенный пункт (лежащий на том же маршруте) примем за единицу. Будем считать его одинаковым для обеих фирм. Примем также, что время самих продаж в населенном пункте тоже составляет единицу. Дополним это предположение условием, что фирма P_2 начинает реализацию выбранного маршрута из пункта П3 в момент, когда товар фирмы P_1 покинул П4 и появился в другом пункте. Т.е. временное запаздывание, необходимое P_2 для получения информации о поступлении товара для фирмы P_1 и для подготовки своей рекламной акции, составляет две единицы времени.

При принятых допущениях можно считать, что фирмы P_1 и P_2 совершают переходы между пунктами по очереди. Схема на рис. 2.1 иллюстрирует возможную последовательность таких переходов, соответствующую случаю, когда фирма P_1 сначала реализует маршрут МП5, а затем (после возвращения в П4) — маршрут МП2. Целые числа, нанесенные около дуг маршрутов P_1 и P_2, соединяющих населенные пункты, есть порядковые номера периодов времени, в которые совершались соответствующие переходы.

Как следует из диаграммы, в первый единичный период фирма P_1 перевозит свой товар из П4 в П5. Затем (пока P_1 осуществляет продажи в П5) фирма P_2 перевозит свой товар из П3 в П2 (второй единичный период). В третьем периоде P_1 возвращается в П4 (в это время P_2 торгует в П2). В четвертом периоде P_2 перемещается из П2 в П1. Далее P_1 переходит из П4 в П2 (пятый период). В шестом периоде P_2 переходит в пункт П5, куда (в седьмом периоде) прибывает и товар фирмы P_1. Будем интерпретировать этот случай как *окончание погони*, поскольку при этом P_2 имеет возможность торговать одновременно и одноместно с P_1.

Случай, когда сторона P_2 возвращается в пункт П3, распродав свой товар и не столкнувшись (одновременно и одноместно) с товаром другой стороны ни в одном из населенных пунктов на своем маршруте, будем также интерпретировать как *окончание погони*.

Примем, что интересы P_2 требуют реализовать одновременную и одноместную с P_1 продажу (как и вообще все свои продажи) как можно раньше. При этом в большей степени сохраняется свежесть товара (предлагаемого P_2), определяющая его конкурентные преимущества.

Интересы стороны P_1 полагаются *противоположными* интересам стороны P_2. Будем оценивать полезность, которую обеспечивает себе сторона P_1 в любой реализации рассматриваемого конфликта, как число периодов времени, которые прошли до окончания погони.

Условия рассмотренной операции допускают следующее наглядное (графическое) описание.

Дерево игры

Ситуации в развитии операции, в которых одна из сторон осуществляет свой выбор (т.е. принимает решение), будем называть *позициями* (и обозначать q_i, $1 \le i \le L$). Множество всех позиций обозначим Q, т.е.

$$Q=\{q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_L\}.$$

Ситуации, завершающие какую-либо реализацию операции, будем называть *исходами* и обозначать t_k, $1 \le k \le K$. Множество всех исходов обозначим

$$T=\{t_1,\ldots,t_k,\ldots,t_K\}.$$

Конкретный выбор, осуществляемый стороной P_l в позиции $q_i \in Q$, будем называть *ходом* этой стороны. Поскольку каждый такой выбор переводит развитие операции либо в некоторую ситуацию $q_j \in Q$, в которой осуществляет свой ход другая сторона, либо в некоторую ситуацию $t_k \in T$ завершения операции, то каждый возможный ход может быть охарактеризован либо парой вида (q_i,q_j), либо парой вида (q_i,t_k).

Множества Q,T и множества всех возможных в данной операции пар вида (q_i,q_j) и (q_i,t_k) допускают наглядное графическое изображение (на плоскости). Элементы множеств Q и T изображаются точками. Образы элементов первого множества называются *узлами*, а второго — *вершинами*. Пары вида (q_i,q_j) и (q_i,t_k) изображаются отрезками прямых линий, соединяющих соответствующие точки. Эти отрезки будем называть *дугами* или *ребрами*.

Каждому узлу поставим в соответствие номер стороны, осуществляющей ход в позиции, образом которой является узел. Условимся ставить этот номер над точкой, соответствующей узлу. Будем выполнять графическое построение таким образом, чтобы узлы последующих позиций (порядок следования определяется переходами по ребрам из одних позиций в другие) лежали на графике выше, чем узлы предшествующих позиций. Точки вершин также должны изображаться выше, чем точки предшествующих им узлов. Результирующий рисунок представляет собой *плоский граф* типа *дерева*. Исходная точка ветвления такого дерева (нижний узел) называется *корнем дерева*.

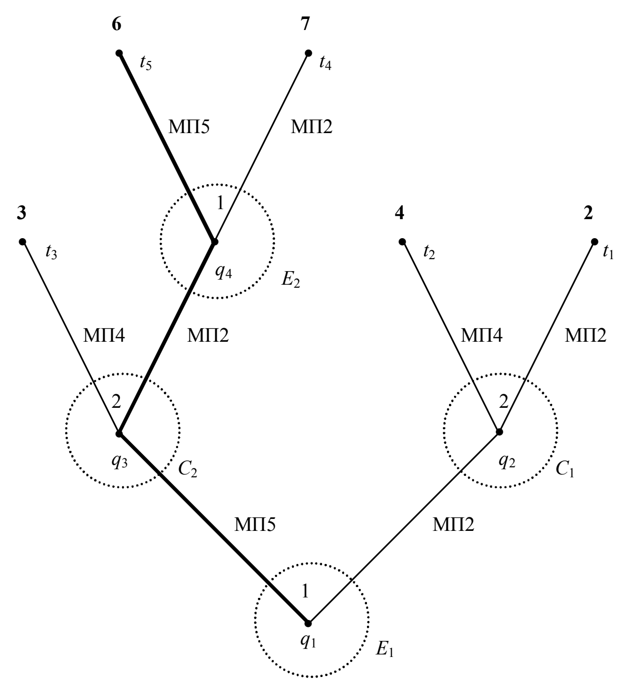


Рис. 2.2

Построим дерево, соответствующее рассмотренному примеру. В исходной позиции (см. корневой узел на рис. 2.2) сторона P_1 выбирает маршрут (МП2 или МП5), на котором она будет осуществлять продажи своего товара. Двум возможным вариантам выбора соответствуют два ребра графа, начинающихся в корневом узле q_1 (символы вариантов нанесены справа от соответствующих ребер). Концевые узлы (q_2 и q_3) указанных ребер соответствуют двум возможным ситуациям, в которых свой выбор делает сторона P_2 (номер второго игрока нанесен над точками этих узлов). В позиции q_2 фирма P_2 выбирает свой маршрут в условиях, когда первая фирма реализует маршрут МП2. Вторая позиция (образом которой является узел q_3) отвечает условиям, когда P_1 реализует маршрут МП5. Обе эти ситуации существуют независимо от того, знает ли сторона P_2 маршрут, реализуемый стороной P_1. Различия, определяемые наличием или отсутствием этого знания, будут рассмотрены ниже.

Рассмотрим последствия выбора, осуществляемого стороной P_2 в позиции q_2 (т.е. выбора в условиях, когда сторона P_1 реализует маршрут МП2). В случае, если P_2 выбирает маршрут МП2, погоня оканчивается в пункте П2, спустя два периода времени. Такому исходу отвечает правая вершина t_1 на рис. 2.2. Две единицы времени, составляющие полезность этого исхода для стороны P_1, отмечены (жирным шрифтом) над точкой этой вершины. Левая схема на рис. 2.3 иллюстрирует перемещения сторон между пунктами, результатом которых является исход t_1. Целые числа, нанесенные на этом рисунке около дуг маршрутов, указывают номера периодов времени, в которые проходятся соответствующие дуги (такие обозначения уже использовались на рис. 2.1). Прямоугольник, соответствующий пункту П2, в котором стороны одновременно и одноместно осуществляют продажу своего товара, выделен на рис. 2.3 толстыми линиями.

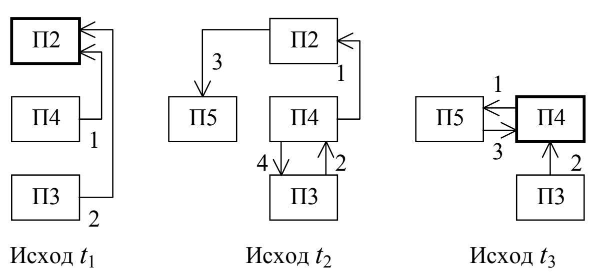


Рис. 2.3

Выбор стороной P_2 (в позиции q_2) маршрута МП4 переводит операцию в исход t_2. Этому случаю соответствует средняя схема на рис. 2.3, согласно которой погоня завершается в связи с возвращением P_2 в исходный пункт П3 через 4 периода времени. Соответствующая вершина дерева, в которую ведет ребро (q_2,t_2), отмечена точкой на рис. 2.2 (4 единицы полезности, которые получает в этом исходе сторона P_1, нанесены жирным шрифтом над вершиной).

Перейдем к рассмотрению последствий выбора в позиции q_3. Выбор стороной P_2 маршрута МП4 (напомним, что в этом случае сторона P_1 реализует маршрут МП5) ведет в исход t_3 (за 3 периода времени). Соответствующие переходы иллюстрируются правой схемой на рис. 2.3. Контур прямоугольника, обозначающего пункт П4 на этой схеме (в котором завершается погоня), выделен толстыми линиями.

Выбор в позиции q_3 маршрута МП2 переводит операцию в позицию q_4, где выбор вновь осуществляет сторона P_1. Возможные варианты развития операции в зависимости от конкретного выбора иллюстрируются схемами на рис. 2.4. Выбор маршрута МП2 (левая схема) ведет в исход t_4 за 7 периодов времени (при этом погоня завершается в пункте П5). Альтернативный выбор (маршрут МП5) имеет результатом исход t_5. Соответствующие переходы, занимающие 6 периодов времени, изображены на правой схеме на рис. 2.4. Дуги маршрутов стороны P_1 изображены более широкими линиями, чем дуги маршрутов, проходимых стороной P_2.

Построенное дерево (см. рис. 2.2), называемое также ***деревом игры***, описывает последовательность выборов, осуществляемых сторонами, и достигаемые ими (в исходах) значения полезностей. В рассмотренном примере (в силу предположения о противоположности интересов сторон) достаточно указать значения полезностей лишь для стороны P_1. В общем случае следует сопоставить вершинам дерева (исходам операции) значения полезностей для каждой из сторон.

Теперь введем средства описания *информированности сторон*. Путь из корня дерева игры, проходимый по ребрам дерева и ведущий в какую-либо вершину, соответствует некоторой возможной реализации операции (т.е. соответствует некоторой *партии игры*). Для иллюстрации на рис. 2.2 выделен (толстыми линиями) путь, проходящий через точки q_1,q_3,q_4,t_5.

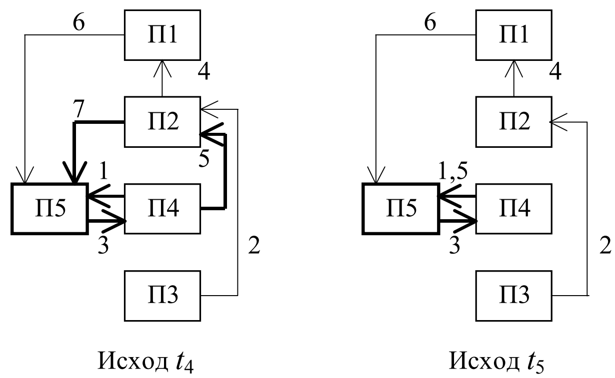


Рис. 2.4

Нетрудно заметить, что если на каждом своем ходе каждая сторона точно знает, в какой позиции дерева она осуществляет свой выбор, то ей известна вся предыстория игры, ибо в каждый узел дерева ведет единственная последовательность ребер, начинающаяся в корне. В случае, когда информация о предыстории не является полной, игрок может установить лишь некоторое множество позиций, к которому принадлежит ситуация текущего хода. Такое множество называется ***информационным множеством*** игрока, осуществляющего ход в одной из позиций, составляющих это множество. При этом предполагается, что каждой позиции, входящей в такое множество, соответствует один и тот же набор вариантов выбора.

Рассматриваемый пример, как уже отмечалось, включает две частных задачи. В одной из них предполагается, что фирма P_2, осуществляя выбор маршрута, информирована о выборе, реализуемом другой фирмой. В этом случае P_2, несомненно, различает позиции q_2 и q_3 и, следовательно, в дереве игры существуют два информационных множества стороны P_2:

$$C_1=\{q_2\} \text{ и } C_2=\{q_3\}.$$

Что касается стороны P_1, то она также различает позицию q_1, в которой осуществляет свой первый выбор, и позицию q_4, в которой имеет место второй (более поздний) выбор. Поэтому информированность P_1 также характеризуется двумя информационными множествами:

$$E_1=\{q_1\} \text{ и } E_2=\{q_4\}.$$

Все эти информационные множества отмечены на рис. 2.2 с помощью (разрывных) окружностей, охватывающих соответствующие узлы дерева.

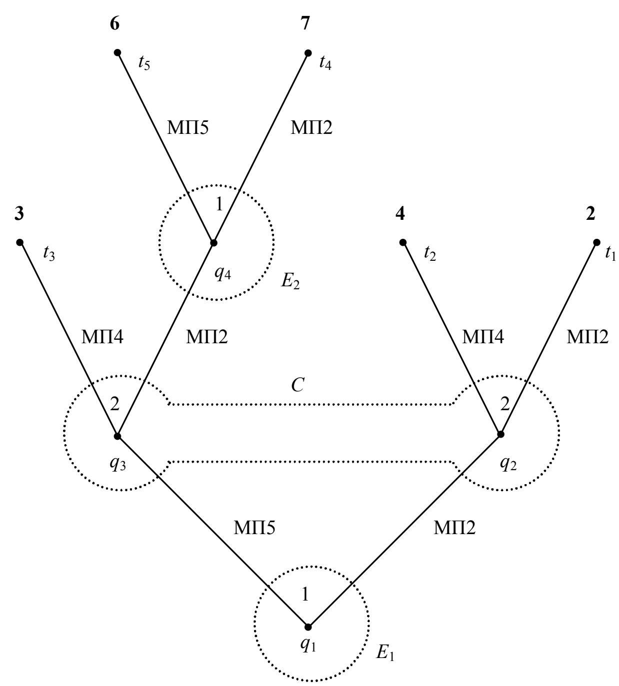


Рис. 2.5

Вторая частная задача связана с предположением, что в момент выбора маршрута сторона P_2 не имеет сведений о маршруте, реализуемом стороной P_1. В этом случае позиции q_2 и q_3 неразличимы для стороны P_2. В результате в дереве игры существует лишь одно информационное множество второй стороны:

$$C=\{q_2,q_3\}.$$

Это множество отмечено на рис. 2.5 с помощью разрывного контура, охватывающего узлы q_2 и q_3.

Определение 2.3 (*позиционной или развернутой формы игры*). Описание конечной игры двух лиц с помощью дерева, узлы (точки ветвления) которого, снабженные номерами l (l=1,2), соответствуют ситуациям, в которых стороны P_l осуществляют свои выборы (ходы), а вершины — ситуациям завершения операции (с указанием достигаемых сторонами значений полезностей), называется ***моделью игры в позиционной или развернутой форме***.

Предполагается, что понятие дерева игры включает и группирование узлов этого дерева в информационные множества, отражающие осведомленность игроков обо всех выборах, предшествующих текущему ходу. Игра в развернутой форме, в которой все информационные множества содержат ровно по одному узлу, называется ***игрой с полной информацией***.

Термин «развернутая форма» отражает то обстоятельство, что рассматриваемая модель характеризует процесс выбора решений как развертывающийся во времени. В дальнейшем игры в позиционной форме будем также называть *позиционными играми*.

Приведение позиционной *игры к игре в нормальной форме*

Как уже отмечалось, игра в позиционной форме предусматривает принятие решений в каждой (реализующейся в ходе конкретной партии) позиции игры. Однако каждая сторона может *заблаговременно* составить свой план ведения игры, предусматривающий какое решение должно быть выбрано на каждом ходе (если развитие игры приведет в позицию, соответствующую этому ходу). Принятие такого плана сводит многократные выборы решений в ходе игры к *единственному выбору* (т.е. к выбору плана, определяющего решения во всех позициях данной стороны ны). Будем называть такие планы *стратегиями* сторон в позиционной игре. Введенное понятие стратегии (плана ведения игры) допускает следующее формальное определение.

Определение 2.4 (*стратегии игрока в позиционной игре*). ***Стратегия*** стороны P_i, i=1,2, в конечной позиционной игре Γ есть *функция*, определенная на всех информационных множествах этой стороны (в дереве игры Γ). Значением этой функции на каждом таком множестве является один из выборов, имеющихся у P_i в этом множестве.

В качестве иллюстрации определим стратегии сторон в описанном выше примере погони за конкурентом. При этом начнем со случая, когда сторона P_2 заблаговременно информирована о первом выборе, осуществленном стороной P_1. Дерево игры, соответствующее этому случаю (см. рис. 2.2), содержит два информационных множества (E_1 и E_2) стороны P_1. Каждому из этих множеств соответствует один и тот же набор вариантов (МП2, МП5). Следовательно, возможны четыре стратегии стороны P_1, представляемые следующими функциями:

$$s_1(E_1)=\text{МП2},\quad s_1(E_2)=\text{МП2}, \tag{2.2.1}$$

$$s_2(E_1)=\text{МП2},\quad s_2(E_2)=\text{МП5}, \tag{2.2.2}$$

$$s_3(E_1)=\text{МП5},\quad s_3(E_2)=\text{МП2}, \tag{2.2.3}$$

$$s_4(E_1)=\text{МП5},\quad s_4(E_2)=\text{МП5}. \tag{2.2.4}$$

Замечание 2.1 (о *дублировании* стратегий). Фактически, введенные выше стратегии s_1 и s_2 описывают одно и то же поведение стороны P_1, ибо после выбора (в позиции q_1) маршрута МП2 последующее развитие операции не может привести в позицию q_4. Поэтому различие рекомендаций, касающихся выбора решения во множестве E_2 (а именно этим и разнятся стратегии s_1 и s_2), не может влиять на развитие операции. Однако мы не будем стремиться исключить возникающую при этом *избыточность* описания, чтобы сохранить *простое* определение стратегии, введенное выше.

Аналогично можно перечислить все стратегии стороны P_2, которой сопоставлены два информационных множества (C_1 и C_2), каждое из которых характеризуется одним и тем же набором вариантов решений (МП2, МП4); см. дерево игры на рис. 2.2. Множество этих стратегий составляют четыре функции:

$$g_1(C_1)=\text{МП2}, \quad g_1(C_2)=\text{МП2}, \tag{2.2.5}$$

$$g_2(C_1)=\text{МП2}, \quad g_2(C_2)=\text{МП4}, \tag{2.2.6}$$

$$g_3(C_1)=\text{МП4}, \quad g_3(C_2)=\text{МП2}, \tag{2.2.7}$$

$$g_4(C_1)=\text{МП4}, \quad g_4(C_2)=\text{МП4}. \tag{2.2.8}$$

Если принять, что информационные множества каждой стороны занумерованы, то можно характеризовать стратегии с помощью кортежей, число компонент которых соответствует числу информационных множеств (в дереве игры) для данного игрока. При этом кортеж составляется из вариантов, определяющих выбор в соответствующем множестве. Т.е. первый элемент кортежа соответствует выбору в первом информационном множестве, второй элемент — во втором множестве, и т.д. В соответствии с этим соглашением перечисленные выше стратегии сторон P_1 и P_2 можно записать в виде:

$$s_1=(\text{МП2},\text{МП2}),\ s_2=(\text{МП2},\text{МП5}),\ s_3=(\text{МП5},\text{МП2}),\ s_4=(\text{МП5},\text{МП5}),$$

$$g_1=(\text{МП2},\text{МП2}),\ g_2=(\text{МП2},\text{МП4}),\ g_3=(\text{МП4},\text{МП2}),\ g_4=(\text{МП4},\text{МП4}).$$

Пусть стороны P_1 и P_2 соответственно выбрали стратегии s и g. Прослеживая путь в дереве игры, определяемый теми выборами, которые предписывают стратегии s и g (в последовательно проходимых позициях), можно определить конкретный исход игры и уровни полезности, достигаемые сторонами в этом исходе. Тем самым определяются значения платежных функций $M_1(s,g)$ и $M_2(s,g)$. Например, в случае, когда P_1 выбирает стратегию s_4, а P_2 — стратегию g_3, игра заканчивается в исходе t_5 и

$$M_1(s_4,g_3)=-M_2(s_4,g_3)=6.$$

При этом реализованной партии игры соответствует путь, выделенный на рис. 2.2 и содержащий точки q_1, q_3, q_4, t_5. Действительно, согласно выбранным стратегиям s_4 и g_3:

- выбор стороны P_1 (в исходной позиции q_1) есть МП5 и этот выбор переводит игру в позицию q_3;
- выбор стороны P_2 в позиции q_3 есть МП2 и в результате следующей позицией становиться q_4;
- выбор P_1 в позиции q_4 есть МП5, что переводит игру в исход t_5 (см. дерево игры на рис. 2.2).

Описанный способ определения значений для платежных функций сторон по заданным стратегиям и дереву игры позволяет привести позиционную игру к нормальной форме. Выполним такое приведение для рассмотренного примера. Начнем со случая, когда сторона P_2 заблаговременно информирована о результатах первого выбора, осуществленного стороной P_1. Соответствующие значения критерия $M_1(s, g)$ сведем в табл. 2.2.

Таблица такого вида уже рассматривалась как иллюстрация к определению седлового значения матрицы игры (см. стр.95). При этом было установлено существование двух устойчивых (и эффективных) решений, определяемых парами стратегий (s_3,g_2) и (s_4,g_2). Цена этой антагонистической игры (т.е. седловое значение матрицы) равна 3.

В случае, когда сторона P_2 в момент выбора своего маршрута не имеет информации о маршруте, реализуемом стороной P_1, соответствующее дерево игры (см. рис. 2.5) содержит лишь одно информационное множество $C=\{q_2,q_3\}$ стороны P_2. Следовательно, в этой частной задаче сторона P_2 имеет лишь две стратегии:

$$g_1(C)=\text{МП}2, \quad g_2(C)=\text{МП}4.$$

Матрица игры, соответствующая этому последнему случаю, представлена в табл. 2.3.

Таблица 2.2

Матрица игры «погоня» (с полной информацией)		Стратегии P_2			
		МП2,МП2	МП2,МП4	МП4,МП2	МП4,МП4
Стратегии P_1	МП2,МП2	2	2	4	4
	МП2,МП5	2	2	4	4
	МП5,МП2	7	3	7	3
	МП5,МП5	6	3	6	3

Таблица 2.3

Матрица игры «погоня» (при неполной информации)		Стратегии P_2	
		МП2	МП4
Стратегии P_1	МП2,МП2	2	4
	МП2,МП5	2	4
	МП5,МП2	7	3
	МП5,МП5	6	3

Замечание 2.2 (о роли полной информации). Полученная 4×2 матрица игры не содержит седловых значений (т.е. в ней нет элементов, которые будучи максимальными значениями в своих

столбцах были бы одновременно и минимальными значениями в своих строках). Следовательно, в рассмотренном примере не существует решений, обладающих свойствами равновесия по Нэшу. При этом сторона P_1, выбрав стратегию s_3 или s_4, может (как и в случае полной информированности) гарантированно уклоняться от одновременных и одноместных с P_2 продаж своего товара в течение 3 периодов времени. Однако другая сторона (т.е. P_2) уже не может гарантировать завершение погони через 3 периода времени. Время, необходимое ей для этого, составляет уже 4 периода. Таким образом, устойчивое и эффективное решение, существовавшее в условиях, когда каждая сторона выбирала свои решения, имея полную информацию обо всех уже осуществленных выборах, исчезает, как только утрачивается полная информированность сторон. Ниже будет показано, что полная информированность является достаточным условием существования устойчивых решений. Поэтому в тех случаях, когда обе стороны заинтересованы в существовании устойчивых форм взаимодействия, они могут вводить механизмы взаимных проверок, гарантирующие полную информированность.

2.3 Условия существования стратегического равновесия в конечной игре двух лиц

Теорема 2.1 (достаточные условия существования устойчивых решений). *Пусть Γ есть конечная игра двух лиц с полной информацией и пусть S и G есть множества стратегий, имеющихся у сторон P_1* и *P_2 в этой игре. Тогда произведение $S\times G$ содержит устойчивую стратегическую пару* (s^*,g^*).

Доказательство. 1. Поскольку Γ есть конечная игра с полной информацией, то (см. определение на стр.108) каждое информационное множество, входящее в описание ее развернутой формы, содержит ровно один узел (точку ветвления) дерева игры. При этом любой узел дерева, помеченный (сверху) номером первого игрока, является точкой определения каждой стратегии $s \in S$, а любой узел, помеченный (сверху) номером второго игрока, — точкой определения стратегии $g \in G$.

Каждой конкретной паре стратегий (s,g) дерево игры сопоставляет (определенную этими стратегиями) последовательность переходов по ребрам дерева, начинающуюся в корневой точке и заканчивающуюся в одной из вершин. Тем самым определяются значения платежных функций сторон $M_1(s,g)$ и $M_2(s,g)$, соответствующие этой паре стратегий, поскольку вершинам дерева, представляющим исходы игры, сопоставлены значения полезностей для обоих игроков.

Напомним, что реализацию операции, соответствующую заданной последовательности переходов по ребрам дерева (т.е. пути в дереве игры), мы назвали ***партией игры***. В качестве иллюстрации, на рис. 2.2 (широкими линиями) отмечен путь, соединяющий точки q_1, q_3, q_4, t_5. Число позиций (узлов) в самой длинной партии игры условимся называть ***длиной игры***. Нетрудно подсчитать, что длина игры, представленной деревом на рис. 2.2, равна 3 (причем указанный выше путь соответствует самой длинной партии игры). Проведем доказательство теоремы индукцией по длине игры.

Для игр нулевой длины будем считать теорему справедливой. Это допущение можно интерпретировать следующим образом. Поскольку в дереве такой игры нет ни одного узла (т.е. игра не предполагает совершение ходов игроками), то области определения функций s и g пусты. Примем, что в этом случае у каждой из сторон есть ровно одна стратегия и эта стратегия не предполагает принятие каких-либо решений. При этом дерево игры необходимо представлено некоторой вершиной, которой сопоставлены выигрыши игроков. Следовательно, платежные функции M_1 и M_2 существуют и определены в единственной точке множества $S \times G$. Заметим, что какие-либо отклонения от этой единственной точки являются невозможными (в силу ее единственности). Будем считать ее точкой равновесия в игре нулевой длины.

2. Предположим, что теорема справедлива для всех конечных игр двух лиц с полной информацией длины меньшей, чем k. Пусть Γ есть игра с полной информацией длины k и ее первому ходу (т.е. позиции q_1) соответствуют r возможных выборов, которые переводят игру из позиции q_1 соответственно в точки $p_1,\dots,p_r$ дерева игры (которые могут быть узлами или вершинами дерева).

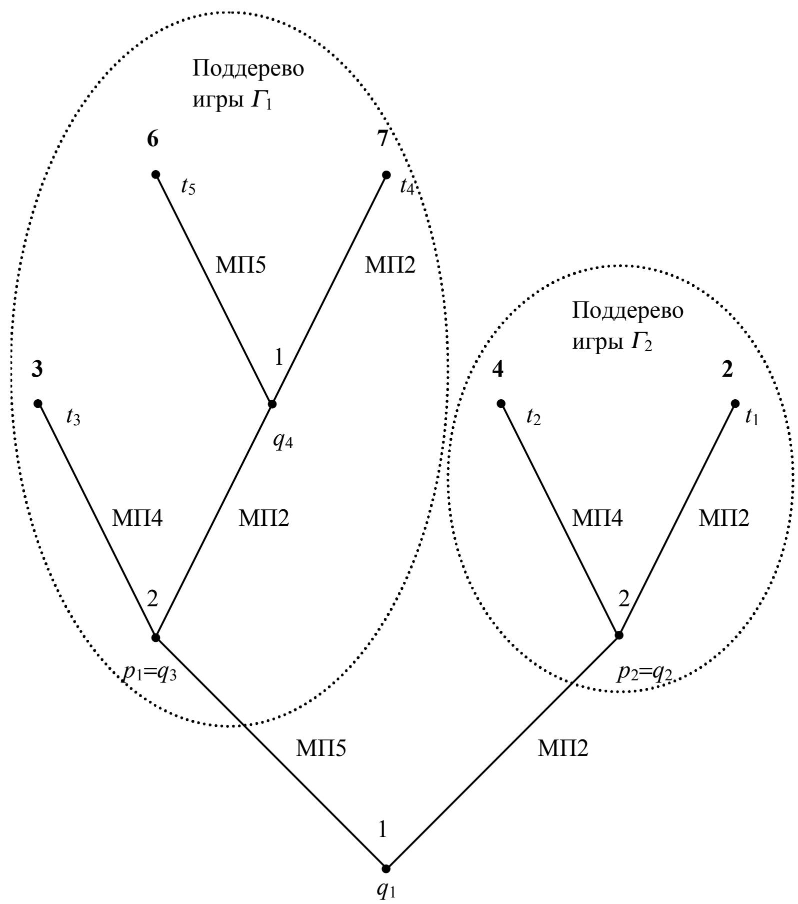


Рис. 2.6

В результате дальнейшее развитие игры будет описываться переходами в поддереве, корнем которого является одна из точек

p_i, $1 \le i \le r$. Поддерево с корнем в точке p_i является описанием некоторой конечной подыгры Γ_i с полной информацией, имеющей длину меньшую, чем k. Будем называть игру Γ_i *усечением* исходной игры. Заметим, что длина Γ_i окажется нулевой, если точка p_i есть вершина исходного дерева. В качестве иллюстрации рис. 2.6 воспроизводит дерево игры, представленное на рис. 2.2, на котором (овальными разрывными контурами) выделены поддеревья игр Γ_1 и Γ_2 с корнями соответственно в точках $p_1=q_3$ и $p_2=q_2$. При этом длины этих подыгр соответственно равны 2 (для Γ_1) и 1 (для Γ_2). Заметим, что разрывные окружности, выделяющие информационные множества сторон на рис. 2.2, опущены на рис. 2.6 (поскольку известно, что в игре с полной информацией каждый узел дерева составляет отдельное информационное множество).

Сужение области определения функций s и g (определенных на соответствующих узлах дерева игры Γ) до подмножеств узлов, входящих в поддерево игры Γ_i, определяет стратегии сторон P_1 и P_2 в этой подыгре. Будем называть их *усечениями стратегий* s, g и обозначать s_i, g_i. Множества таких стратегий обозначим соответственно S_i, G_i. В целях иллюстрации отметим, что усечения стратегий s_1 и s_3 первого игрока в игре Γ (см. (2.2.1), (2.2.3)), дают одну и ту же стратегию $s_1^{'}(q_4) = МП2$ этого игрока в подыгре Γ_1. Сужения двух других стратегий P_1 (s_2 и s_4 — см. (2.2.2), (2.2.4)) в исходной игре дают его стратегию $s_1^{''}(q_4) = МП5$ в подыгре Γ_1. Аналогично, сужения стратегий (2.2.5)–(2.2.8) второго игрока в игре Γ дают множество стратегий

$$G_1 = \left\{ g_1^{'}(q_3) = МП2,\ g_1^{''}(q_3) = МП4 \right\}$$

этого игрока в подыгре Γ_1.

Таким образом, исходной игре Γ сопоставляются r усеченных игр Γ_i с полной информацией, имеющих длину меньшую, чем k, и характеризуемых множествами стратегий S_i, G_i, $1 \le i \le r$. Причем любая пара стратегий сторон $(s_i, g_i) \in S_i \times G_i$ задает некоторый исход в поддереве игры Γ_i и, тем самым, определяет значения платежей $M_1^i(s_i, g_i), M_2^i(s_i, g_i)$ как значения полезностей, сопоставленных соответствующей вершине дерева. При этом

$$M_j^i(s_i, g_i) = M_j(s, g), \quad j = 1,2, \tag{2.3.1}$$

если s_i и g_i есть усечения стратегий s и g. Для иллюстрации, платежная функция $M_1^1(s_1, g_1)$, соответствующая игре Γ_1, поддерево которой изображено на рис. 2.6, представлена в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Матрица подыгры Γ_1		Стратегии P_2 в игре Γ_1	
		МП2	МП4
Стратегии P_1 в игре Γ_1	МП2	7	3
	МП5	6	3

По условию индукции, каждое произведение $S_i \times G_i$ содержит устойчивую стратегическую точку (s_i^*, g_i^*), для которой справедливы неравенства:

$$(\forall s_i \in S_i)\; M_1^i(s_i^*, g_i^*) \geq M_1^i(s_i, g_i^*), \tag{2.3.2}$$

$$(\forall g_i \in G_i)\; M_2^i(s_i^*, g_i^*) \geq M_2^i(s_i^*, g_i), \tag{2.3.3}$$

$1 \leq i \leq r$. Заметим, что эти условия остаются справедливыми и для подыгр нулевой длины. Соответствующие им множества S_i и G_i содержат по одному элементу, а значения M_1^i, M_2^i определяются, как и в общем случае, значениями полезностей в соответствующем исходе.

3. Пусть в исходной игре Γ первый ход (в позиции q_1) делает игрок P_1. Определим целое число l, $1 \le l \le r$, такое что

$$M_1^l(s_l^*, g_l^*) = \max\{M_1^i(s_i^*, g_i^*) : 1 \le i \le r\}, \quad (2.3.4)$$

и определим стратегию s^* игрока P_1 в исходной игре Γ, задав ее условиями:

$$s^*(q_1) = l, \quad (2.3.5)$$

$$s^*(q) = s_i^*(q), \quad (2.3.6)$$

если узел q есть один из узлов в поддереве усеченной игры Γ_i, $1 \le i \le r$. Введенная стратегия допускает следующую интерпретацию.

На первом ходе игрок P_1 решает, в какой подыгре Γ_l он будет участвовать на последующих ходах. При этом в соответствии с (2.3.4), он выбирает ту подыгру Γ_l, в которой его выигрыш, соответствующий устойчивой по Нэшу паре стратегий (s_l^*, g_l^*) этой подыгры, является максимальным. Все последующие ходы (в этой подыгре) он осуществляет в соответствии со стратегией s_l^*. Однако формальное определение стратегии (см. стр. 109) предполагает, что выборы игрока P_1 должны быть определены для всех его позиций в дереве игры Γ. Такое определение обеспечивается условиями (2.3.6).

Теперь определим стратегию g^* игрока P_2 в игре Γ. Примем, что его выбор в позиции q из поддерева Γ_i (помеченной номером этого игрока) совпадает с выбором, предписываемым стратегией g_i^*, входящей в устойчивую пару (s_i^*, g_i^*) из (2.3.2), (2.3.3). То есть

$$g^*(q) = g_i^*(q), \quad 1 \le i \le r. \quad (2.3.7)$$

Покажем, что введенная пара (s^*, g^*) есть устойчивая стратегическая точка в $S\times G$. Из (2.3.1), (2.3.5)-(2.3.7) и из (2.3.2) следует, что

$$M_2(s^*, g^*) = M_2^l(s_l^*, g_l^*) \geq M_2^l(s_l^*, g_l) = M_2(s^*, g),$$

где $g\in G$ есть любая стратегия, усечение которой в подыгре Γ_l есть g_l. Таким образом,

$$(\forall g\in G)\ M_2(s^*,g^*)\geq M_2(s^*,g). \qquad (2.3.8)$$

Аналогично, из (2.3.1), (2.3.5)-(2.3.7) и из (2.3.3), (2.3.4) выводим, что

$$M_1(s^*, g^*) = M_1^l(s_l^*, g_l^*) \geq M_1^i(s_i^*, g_i^*) \geq M_1^i(s_i, g_i^*) = M_1(s, g^*),$$

где индекс i соответствует выбору $i=s(q_1)$, предписанному стратегией $s\in S$ игрока P_1, переводящей продолжение игры в подыгру Γ_i. Таким образом,

$$(\forall s\in S)\ M_1(s^*,g^*)\geq M_1(s,g^*),$$

что в сочетании с (2.3.8) доказывает устойчивость стратегической пары (s^*,g^*).

4. Случай, когда первый ход делает игрок P_2, рассматривается аналогично. ■

Следствие 2.1. *Матрица, представляющая нормальную форму конечной антагонистической игры с полной информацией, всегда имеет седловое значение.*

Замечание 2.3. Примером конечной антагонистической игры с полной информацией является игра в шахматы (при условии ведения протокола). Однако чрезмерно большое число возможных позиций в шахматной игре затрудняет как построение дерева игры, так и приведение ее к нормальной форме для определения седлового значения соответствующей матрицы. Тем не менее, именно для этой игры в 1913 году Э.Цермело[44] поставил и положительно решил вопрос о существовании наилучших возможных ходов в каждой позиции (заметим, что понятия нормальной и развернутой форм игры в то время еще не были введены)[45].

2.4 Смешанные стратегии и проблема устойчивости решений

Защитная роль смешанных стратегий

Как следует из последней рассмотренной теоремы (см. стр. 113), наличие у сторон полной информации о развитии игры гарантирует существование стратегических решений, обладающих свойством устойчивости по Нэшу. Вместе с тем, когда такая информация отсутствует, устойчивые решения могут не существовать. Рассмотренная выше игра «погоня за конкурентом» (см. стр. 98) является примером такого рода, если принять что сторона P_2, принимает свои решения, не имея информации о первом выборе стороны P_1 (см. также замечание на стр. 112). Рассмотрим еще один подобный пример.

Пример 2.4 (борьба реклам). Фирмы P_1 и P_2 планируют организовать продажу нового однотипного товара (имеющего, однако, разные фирменные наименования) в супермаркетах двух удаленных друг от друга населенных пунктов П1 и П2. При этом с целью заблаговременного формирования положительного мнения о своем товаре, который должен потеснить некоторые другие (близкие по характеру использования) товары, фирмы проводят серию рекламных акций, включающих продажу пробных партий в супермаркетах. Фирма P_1 располагает большим рекламным

---

[44] Цермело Эрнест (1871-1953) — немецкий математик, автор *аксиомы выбора* для произвольного семейства множеств.

[45] Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С.167-172 (перевод с немецкого).

опытом и в силу этого мнение потребителей о ее товаре окажется выше, чем их мнение о товаре фирмы P_2, если рекламные акции обеих сторон будут проходить в одном и том же супермаркете в одно и то же время. Поэтому фирма P_1, стремящаяся к монополии на новом рынке, заинтересована проводить свои рекламные акции одновременно и одноместно с фирмой P_2. Интересы фирмы P_2, трезво оценивающей свои рекламные возможности, являются противоположными.

Каждая акция проводится в одном супермаркете в течение одного торгового дня. При этом ограниченность ресурсов, необходимых для рекламы, не позволяет фирмам проводить свои акции одновременно в обоих пунктах П1 и П2. Таким образом, реализация каждой акции предполагает выбор места (П1 или П2) для ее проведения.

Примем, что для фирмы P_1 полезность исхода, соответствующего одновременной и одноместной рекламной акции обеих фирм, равна +1. При этом полезность исхода, соответствующего проведению рекламных акций двух фирм в разных пунктах, фирма P_1 оценивает как −1. Поскольку, как уже отмечалось, интересы фирм являются противоположными, то описанной задаче выбора места для рекламной акции соответствует антагонистическая игра с 2×2 матрицей из табл. 2.5.

Таблица 2.5

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрица игры
«борьба реклам»</td><td colspan="2">Стратегии P_2</td></tr>
<tr><td>П1</td><td>П2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Стратегии P_1</td><td>П1</td><td>$a_{11}=1$</td><td>$a_{12}=-1$</td></tr>
<tr><td>П2</td><td>$a_{21}=-1$</td><td>$a_{22}=1$</td></tr>
</table>

Заметим, что коэффициенты этой матрицы совпадают с элементами матрицы из табл. 2.1, соответствующей игре в орлянку, рассмотренной на стр. 96. Матрица игры не содержит седловых значений. Сторона P_1 может *гарантировать* себе лишь нижнюю цену игры (т.е. полезность, равную −1). Аналогично, сторона P_2 может гарантировать, что ее проигрыш не превысит верхней цены игры (т.е. величины, равной +1). Напомним, что в антагонистической игре критерии эффективности сторон связаны отношением $M_1+M_2=0$ (см. определение на стр. 26).

В условиях рассмотренного примера фирма P_1 могла бы увеличить эффективность своей рекламы (по сравнению с гарантированным уровнем полезности равным −1), если бы ей был известен выбор стороны P_2. В этом случае, выбрав тот же пункт, что и фирма P_2, сторона P_1 обеспечивает себе положительную полезность равную +1. Заметим, что сторона P_2 находится в таком же положении. Если ей становится известным, какой именно пункт выбран стороной P_1 для проведения рекламной акции, то, выбрав другой пункт, сторона P_2 увеличивает свой выигрыш по сравнению с гарантированным уровнем.

Таким образом, в игре без устойчивых стратегических решений получение информации о действиях другой стороны может существенно увеличивать выигрыш. Утечка такой информации может быть как результатом разведывательных действий другой стороны, так и следствием того, что одна из сторон *предсказуема* в своих действиях, поскольку придерживается заранее принятого графика рекламных акций (т.е. имеет некоторый стереотип поведения, который может быть раскрыт путем наблюдений).

Возможный способ предотвращения утечки информации состоит в том, чтобы отказаться от выбора вариантов в соответствии с принятым (и допускающим раскрытие) планом. Можно предоставить этот выбор *случайному механизму* (т.е. некоторому случайному процессу, имеющему заданное число исходов с заданными вероятностями их наступления). Реализуем такой подход в рассмотренном примере борьбы реклам.

Пусть сторона P_1 выбирает стратегии П1 и П2 соответственно с вероятностями x и $1-x$, где $x\in[0,1]$. В случае, когда $x=½$, указанный случайный выбор можно реализовать, например, путем бросания симметричной монеты. При этом выбор пункта П1 можно связать с выпадением «Орла», а выбор пункта П2 — с выпадением «Решки». Случай $x=¾$ может быть реализован бросанием симметричной монеты дважды. При этом двум последовательным реализациям «Решки» сопоставляется выбор пункта П2, а во всех остальных случаях выбирается пункт П1. Для произвольных значений x, $0 \le x \le 1$, можно использовать компьютерные датчики псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в отрезке [0,1]. При этом реализация значения связывается с выбором варианта П1. В остальных случаях (т.е. при $\xi \in [x,1]$) выбирается вариант П2. Все такие случайные механизмы, используемые в задачах выбора вариантов решения, часто называют *рулетками*.[46] Применительно к целям нашего рассмотрения конкретное устройство рулетки является несущественным. Важно лишь то распределение вероятностей исходов, которое реализуется выбранным случайным механизмом.

Поскольку в рамках нового подхода выбор стороны P_1 является случайным, сторона P_2 не может предсказать его исход. Эта неопределенность является результатом искусственного введения в задачу некоторого неуправляемого параметра. При этом стороны могут ориентироваться лишь на математическое ожидание полезности

$$M(x, j)=xa_{1j}+(1-x)a_{2j},\ \ 0 \le x \le 1, j=1,2, \qquad (2.4.1)$$

исхода игры для игрока P_1, значение которого соответствует рулетке, использованной этим игроком, и стратегии с номером j, выбранной игроком P_2.

Введя случайный механизм выбора, мы фактически расширили исходную модель. В этом *расширении* игрок P_2 по-прежнему

---

[46] Термином *рулетка* первоначально называлось устройство для азартной игры. В этой игре участники делают ставки на номер лунки, в которую попадет шарик после остановки вращающегося круга.

выбирает стратегию с некоторым номером j (j=1,2). Но выбор стратегии i (i=1,2) первого игрока осуществляется случайным механизмом. Игрок P_1, задавая число x ($0\leq x\leq 1$), выбирает лишь распределение вероятностей для этого случайного механизма, но не конкретную стратегию i. Это распределение называют ***смешанной стратегией*** первого игрока, поскольку ее реализация во многих партиях игры порождает некоторую «смесь» стратегий i=1 и i=2.

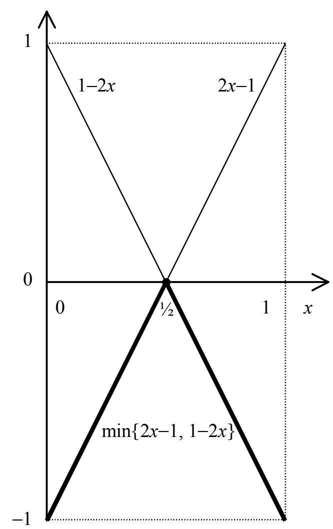


Рис. 2.7

Поскольку при x=1 случайный механизм рождает (с единичной вероятностью) выбор i=1, а при x=0 — выбор i=2, то прежние стратегии реализуются и при игре в смешанных стратегиях. Для различения смешанных стратегий игрока P_1 и стратегий i=1 и i=2, которые он использовал в исходной игре, последние обычно называют ***чистыми стратегиями***.

Проведем анализ *ядра* (2.4.1), соответствующего расширению исходной игры путем введения смешанных стратегий первого игрока. Выбирая конкретное значение $x\in[0,1]$, игрок P_1 гарантирует себе следующее значение математического ожидания полезности исхода:

$$\min\{M(x,j):j=1,2\}=\min\{x(a_{1j}-a_{2j})+a_{2j}:j=1,2\}= \\ =\min\{2x-1,1-2x\}. \tag{2.4.2}$$

Графики на рис. 2.7 представляют отрезки прямых линий $2x-1$ и $1-2x$, причем нижняя огибающая этого семейства, соответствующая правой части равенства (2.4.2), выделена толстыми линиями. Как следует из этого рисунка, при любом значении x, не совпадающем с нулем или единицей, справедливо неравенство:

$$\min\{2x-1,1-2x\}>-1,\ 0<x<1.$$

Т.е. любая *смесь* стратегий *гарантирует* стороне P_1 математическое ожидание полезности, превосходящее нижнюю цену игры. При этом выбор значения $x^*=½$ позволяет повысить этот гарантированный уровень до нулевого значения:

$$\max_{0\le x\le 1}\min_{1\le j\le 2} M(x,j)=\max_{0\le x\le 1}\{2x-1,1-2x\}=0.$$

Пусть теперь второй игрок также выбирает свою чистую стратегию с помощью рулетки, задаваемой распределением вероятностей $(y,1-y)$, где $0\le y\le 1$. Математическое ожидание выигрыша первого игрока (т.е. ядро игры) в этом (полном) смешанном расширении исходной игры определяется выражением:

$$M(x,y)=(2x-1)y+(1-2x)(1-y)=(2x-1)(2y-1),$$

при вычислении которого учтена независимость случайных выборов, осуществляемых сторонами. При этом очевидна справедливость неравенств:

$$(\forall x,y\in[0,1])\ M(x,½)\le M(½,½)\le M(½,y), \tag{2.4.3}$$

из которых следует, что ядро *смешанного расширения* исходной игры имеет седловую точку

$$(x^*,y^*)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

(см. определение седловой точки на стр. 75), которой соответствует нулевая цена игры. Заметим, что указанная цена игры есть математическое ожидание полезности исхода. Конкретное значение выигрыша игрока P_1 в любой партии игры может быть равно либо +1, либо −1.

Таким образом, смешанное расширение рассмотренной игры, не имевшей устойчивых решений в чистых стратегиях, имеет устойчивое (и эффективное) решение в смешанных стратегиях. Как будет показано в следующем параграфе, этот вывод носит общий характер (т.е. он не связан с конкретными значениями элементов матрицы из рассмотренного примера). Указанный вывод в сочетании с доказанной выше теоремой (см. стр. 113) можно интерпретировать следующим образом. Достаточным условием существования устойчивых (по Нэшу) решений матричной игры является *равная информационная обеспеченность* игроков. Либо обе стороны располагают информацией обо всех сделанных выборах (что соответствует игре с полной информацией), либо обе стороны не могут достоверно прогнозировать решения друг друга (что обеспечивается использованием смешанных стратегий). Как мы увидим ниже, этот вывод справедлив и для биматричных игр.

Замечание 2.4. Поскольку, согласно (2.4.3)

$$(\forall x, y\in[0,1])\ M(x^*, y)=M(x, y^*)=v=0,$$

то для достижения сторонами математического ожидания полезности, равного цене игры v в смешанных стратегиях, достаточно, чтобы лишь одна из сторон использовала свою оптимальную смешанную стратегию, являющуюся компонентой седловой точки. При этом нужно, чтобы другая сторона имела гарантию, что использование этой оптимальной стратегии действительно имеет место. Именно так и происходит традиционная игра в орлянку.

Один из игроков осуществляет бросание симметричной монеты, а другой загадывает, каким будет исход бросания (т.е. использует чистую стратегию). При этом факт бросания симметричной монеты одним из игроков наблюдаем другим игроком.

Существование устойчивых решений в смешанных расширениях 2×2 игр

Обобщим результаты рассмотрения конкретного примера на случай смешанного расширения произвольной 2×2 биматричной игры. Обозначим элементы матриц первой и второй сторон соответственно через a_{ij} и b_{ij} ($1\le i, j\le 2$). Примем, что сторона P_1 использует смешанную стратегию $(x,1-x)$, $0\le x\le 1$, а сторона P_2 — смешанную стратегию $(y,1-y)$, $0\le y\le 1$. Смешанные стратегии $(x,1-x)$, $(y,1-y)$, выбранные сторонами P_1, P_2, однозначно описываются парой вещественных чисел (x, y), принадлежащей единичному квадрату

$$D = \{(x, y)\colon 0\le x, y\le 1\}. \qquad (2.4.4)$$

Математическое ожидание $M_1(x, y)$ выигрыша стороны P_1, соответствующее паре (x, y) (с учетом независимости выборов, порождаемых рулетками сторон), определяется выражением

$$M_1(x, y)=[a_{11}x+a_{21}(1-x)]y+[a_{12}x+a_{22}(1-x)](1-y)=$$
$$= xy(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})-x(a_{22}-a_{12})-y(a_{22}-a_{21})+a_{22}\ ,$$

или

$$M_1(x, y)=Axy-ax+f(y), \qquad (2.4.5)$$

где

$$A= a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22},\quad a= a_{22}-a_{12} \qquad (2.4.6)$$

$$f(y) = a_{22} - y(a_{22} - a_{21}).$$

Аналогичные вычисления дают выражение для математического ожидания $M_2(x, y)$ выигрыша стороны P_2:

$$M_2(x, y) = Bxy - by + g(x), \tag{2.4.7}$$

$$B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \quad b = b_{22} - b_{21}, \tag{2.4.8}$$

$$g(x) = b_{22} - x(b_{22} - b_{12}).$$

Таблица 2.6

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрица игрока P_1</td><td colspan="2">Смешанная стратегия P_2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$1-y$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Смешанная стратегия P_1</td><td>x</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td></tr>
<tr><td>$1-x$</td><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Матрица игрока P_2</td><td colspan="2">Смешанная стратегия P_2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$1-y$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Смешанная стратегия P_1</td><td>x</td><td>b_{11}</td><td>b_{12}</td></tr>
<tr><td>$1-x$</td><td>b_{21}</td><td>b_{22}</td></tr>
</table>

Теперь вопрос о существовании пары (x^*, y^*), определяющей устойчивое (по Нэшу) решение $(x^*, 1-x^*)$, $(y^*, 1-y^*)$ в смешанном расширении

$$M_i(x, y), \; i=1,2, \; 0 \le x, y \le 1, \tag{2.4.9}$$

исходной 2×2 биматричной игры, сводится к вопросу о существовании решения $(x^*, y^*) \in D$ системы неравенств:

$$(\forall x \in [0,1]) \; M_1(x^*, y^*) \ge M_1(x, y^*), \tag{2.4.10}$$

$$(\forall y \in [0,1]) \; M_2(x^*, y^*) \ge M_2(x^*, y). \tag{2.4.11}$$

Условия (2.4.10), (2.4.11) могут быть существенно упрощены.

Лемма 2.1. *Для выполнения соответствующего паре* (x^*, y^*) *континуума неравенств* (2.4.10) *необходима и достаточна справедливость двух неравенств*:

$$M_1(x^*, y^*) \geq M_1(0, y^*), \quad M_1(x^*, y^*) \geq M_1(1, y^*). \qquad (2.4.12)$$

Аналогично, для выполнения условий (2.4.11) *необходима и достаточна справедливость неравенств*:

$$M_2(x^*, y^*) \geq M_2(x^*, 0), \quad M_2(x^*, y^*) \geq M_2(x^*, 1). \qquad (2.4.13)$$

Доказательство. Покажем эквивалентность условий (2.4.10) и (2.4.12). Эквивалентность условий (2.4.11) и (2.4.13) доказывается аналогично. Подстановка значений $x=0$ и $x=1$ в условия (2.4.10) дает неравенства (2.4.12). Т.е. необходимость отношений (2.4.12) действительно имеет место.

Пусть выполняются условия (2.4.12). Из линейности по x выражения (2.4.5) для величины $M_1(x, y)$ следует, что при любом значении $x \in [0,1]$

$$M_1(x, y^*) = M_1[1 \cdot x + 0 \cdot (1-x), y^*] = x\, M_1(1, y^*) + (1-x)\, M_1(0, y^*).$$

Отсюда, учитывая сделанное предположение о справедливости неравенств (2.4.12), выводим истинность отношения

$$M_1(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*),$$

что и доказывает выполнение условий (2.4.10). Таким образом, достаточность также установлена. ■

Теорема 2.2 (о существовании устойчивых решений в смешанном расширении 2×2 биматричной игры). *Каждая* 2×2 *биматричная игра имеет устойчивое (по Нэшу) решение в смешанных стратегиях.*

Доказательство. **1.** Определим множество всех пар $(x, y) \in D$, удовлетворяющих неравенствам (2.4.12), которые, согласно доказанной лемме, эквивалентны условиям (2.4.10).

При x=0 из выражения (2.4.5) и из первого неравенства в (2.4.12) следует справедливость отношения

$$x^*(Ay^*-a) \geq 0\ . \qquad (2.4.14)$$

Аналогично, из второго неравенства в (2.4.12) (для случая x=1) вытекает оценка

$$(1-x^*)(Ay^*-a) \leq 0\ . \qquad (2.4.15)$$

Найдем множество всех решений системы (2.4.14), (2.4.15), лежащих в единичном квадрате D из (2.4.4).

При x^*=0 условие (2.4.14) необходимо выполняется и, следовательно, все пары вида

$$(0, y^*),\quad Ay^* \leq a,\ 0\leq y^*\leq 1, \qquad (2.4.16)$$

являются решениями системы (2.4.14), (2.4.15).

Аналогично, при x^*=1 необходимо выполняется условие (2.4.15) и все пары вида

$$(1, y^*),\quad Ay^* \geq a,\ 0\leq y^*\leq 1, \qquad (2.4.17)$$

являются решениями рассматриваемой системы (2.4.14),(2.4.15).

Наконец, при 0< x^*<1 множество решений системы (2.4.14), (2.4.15) состоит из пар вида

$$(x^*, y^*),\quad Ay^* = a,\quad 0< x^*<1,\ 0\leq y^*\leq 1. \qquad (2.4.18)$$

Теперь рассмотрим выполнимость полученных условий (2.4.16)-(2.4.18) в зависимости от значений величин a и A из (2.4.6). При a=A=0 любая пара (x^*, y^*)$\in D$ удовлетворяет условиям (2.4.16)-(2.4.18) и, следовательно, является решением (2.4.10).

При A=0 и $a\neq 0$ возможны два случая, которым соответствуют два верхних фрагмента на рис. 2.8. При a>0 все точки, лежащие на левой стороне (выделена толстой линией на левом верхнем фрагменте) квадрата D, являются решениями системы (2.4.10). При $a<0$ этим свойством обладают все точки, лежащие на правой стороне квадрата D (см. правый верхний фрагмент на рис. 2.8).

Пусть $A\neq 0$. Тогда, согласно (2.4.16), все решения вида $(0, y^*)\in D$ возможны лишь при условии, что $y^*\leq \alpha$ (если $A>0$) или $y^*\geq \alpha$ (если $A<0$), где

$$\alpha=a/A\ . \tag{2.4.19}$$

Аналогично, из (2.4.17) выводим, что все решения вида $(1, y^*)\in D$ возможны лишь при выполнении условия $y^*\geq \alpha$ (если $A>0$) или при выполнении условия $y^*\leq \alpha$ (если $A<0$). Наконец, согласно (2.4.18), решения вида $(x^*, \alpha)\in D$, $0< x^*<1$, возможны лишь в случаях, когда $0\leq\alpha\leq 1$. Случаю $A>0$ соответствует левый фрагмент второго (сверху) ряда на рис. 2.8. При этом все точки из D, удовлетворяющие условиям (2.4.10), лежат на толстой ломаной линии, составленной из трех отрезков. Два вертикальных отрезка представляют точки вида $(0, y^*)$ и $(1, y^*)$. Горизонтальный отрезок является образом точек вида (x^*,α), $0< x^*<1$. Правый фрагмент из этого же ряда соответствует случаю $A<0$, $0<\alpha<1$.

При $\alpha=0$ множество пар вида (x^*,α), $0< x^*<1$, совпадает с нижней стороной квадрата D (см. левый и правый фрагменты третьего ряда на рис. 2.8).

При $\alpha<0$ и $A>0$ решениям соответствует правая сторона квадрата D, а при $A<0$ — левая сторона этого квадрата. Такие решения уже рассматривались (их образы представлены на верхних фрагментах рис. 2.8).

Случай $\alpha=1$, когда множество пар вида (x^*,α), $0< x^*<1$, совпадает с верхней стороной квадрата D, представлен нижними фрагментами на рис. 2.8. При $\alpha>1$ получаем те же решения, что и на верхних фрагментах рис. 2.8 (левый фрагмент — при $A>0$ и правый фрагмент — при $A<0$).

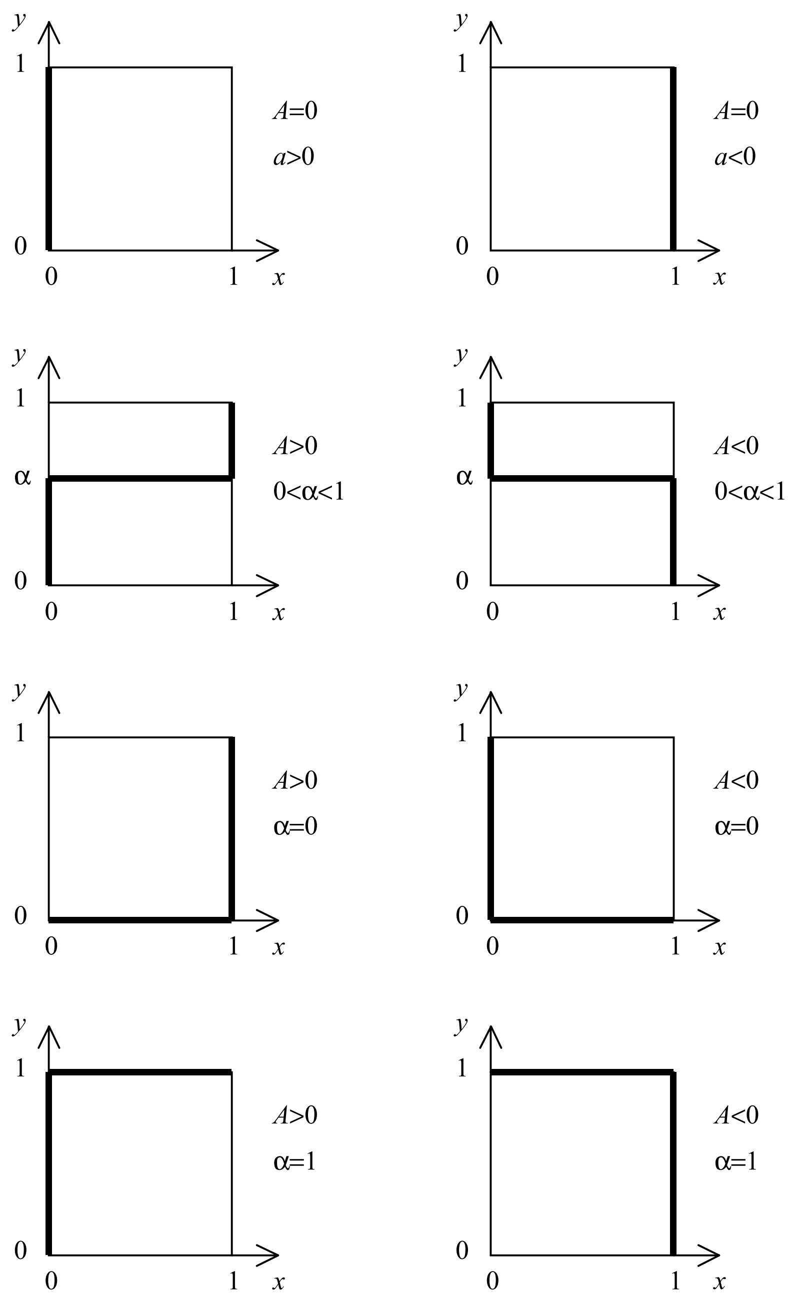


Рис. 2.8

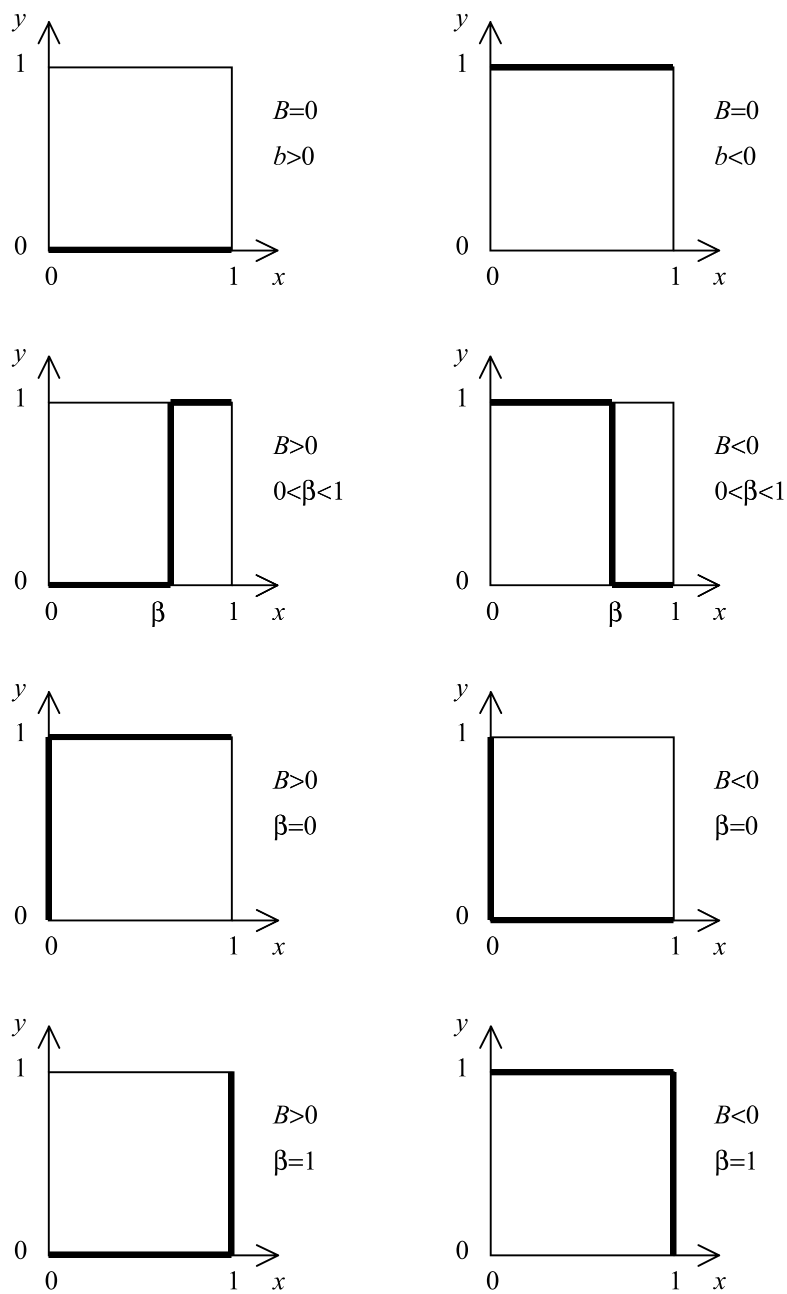


Рис. 2.9

2. Аналогично определяется множество всех пар $(x^*, y^*) \in D$, удовлетворяющих неравенствам (2.4.13), которые эквивалентны условиям (2.4.11). Результаты этого анализа представлены на рис. 2.9.

В случае, когда для значений b и B из (2.4.8) справедливо, что $b=B=0$, решениями неравенств (2.4.11) являются все точки квадрата D. Отмеченная на рисунке величина β определяется выражением

$$\beta = b/B. \tag{2.4.20}$$

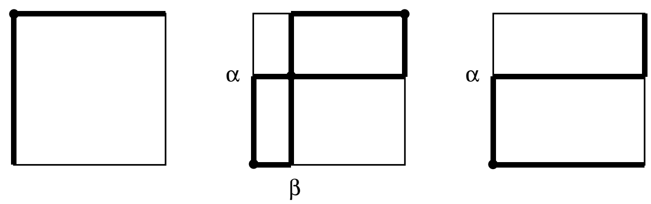
Заметим, что эти результаты можно вывести и из рис. 2.8, если изменить нумерацию игроков (при этом первый игрок становится вторым, а второй — первым), транспонировать их матрицы и поменять местами величины x^* и y^*.

3. Как следует из проведенной классификации (см. рис. 2.8), в зависимости от значений коэффициентов a и A из (2.4.6) множество решений системы (2.4.10) либо включает хотя бы одну из *боковых сторон* квадрата D, либо включает *трехзвенную* ломаную линию, соединяющую концы одной из диагоналей квадрата.

Аналогично (см. рис. 2.9), в зависимости от значений коэффициентов b и B из (2.4.8) множество решений системы (2.4.11) либо включает одну из *горизонтальных* сторон квадрата D, либо включает ломаную (*трехзвенную*) линию, соединяющую концы одной из диагоналей этого квадрата.

Покажем, что в любом из этих четырех случаев существует хотя бы одна пара (x^*, y^*), являющаяся решением одновременно для обеих систем неравенств (2.4.10), (2.4.11) и, следовательно, представляющая собой *устойчивое решение* смешанного расширения (2.4.9) исходной 2×2 биматричной игры.

Пусть решения систем (2.4.10) и (2.4.11) включают стороны квадрата D. Тогда они имеют общую точку, являющуюся вершиной этого квадрата, ибо любая боковая и любая горизонтальная стороны квадрата пересекаются в какой-либо его вершине. Левый фрагмент на рис. 2.10 иллюстрирует один из обсуждаемых случаев (A=0, a>0, B=0, b<0).



$A=0,\ a>0,$ $B=0,\ b<0$

$A>0,\ 0<\alpha<1,$ $B>0,\ 0<\beta<1$

$A>0,\ 0<\alpha<1,$ $B=0,\ b>0$

Рис. 2.10

Рассмотрим случай, когда решения систем (2.4.10) и (2.4.11) включают ломаные линии, соединяющие концы диагоналей квадрата. Как следует из рис. 2.8 и рис. 2.9 (см. фрагменты, расположенные во вторых (сверху) рядах), эти монотонные линии необходимо пересекаются в некоторой внутренней точке квадрата (независимо от того, соединяют ли обе ломаные линии концы одной и той же диагонали или концы разных диагоналей). Средний фрагмент на рис. 2.10 представляет возможный случай такого рода ($A>0,\ 0<\alpha<1,\ B>0,\ 0<\beta<1$).

Пусть теперь множество решений одной из систем (2.4.10), (2.4.11) включает сторону квадрата D, а решение другой системы — трехзвенную ломаную линию, соединяющую концы некоторой диагонали этого квадрата. Тогда одна из вершин квадрата является решением для обеих систем (2.4.10), (2.4.11), ибо каждая сторона квадрата имеет общую вершину с каждой его диагональю. Случай такого рода представлен правым фрагментом на рис. 2.10 ($A>0,\ 0<\alpha<1,\ B=0,\ b>0$). ■

Случай единственного устойчивого решения, не реализуемого в чистых стратегиях

Первый и третий случаи, рассмотренные в заключительном пункте приведенного выше доказательства теоремы, необходимо включают в число устойчивых решений некоторую пару (x^*, y^*), образом которой является одна из вершин квадрата D. Это означает, что в таком решении каждая из сторон использует *с единичной вероятностью* одну из своих чистых стратегий. Для иллюстрации отметим, что паре $(0,1)\in D$, маркированной темной точкой на левом фрагменте из рис. 2.10, соответствуют смешанная стратегия $(x^*,1-x^*)=(0,1)$ первой стороны и смешанная стратегия $(y^*,1-y^*)=(1,0)$ второй стороны. Устойчивые решения такого типа реализуемы и в *чистых* стратегиях.

Пример, рассмотренный на стр. 94 (соглашение об ограничении лова рыбы), иллюстрирует этот случай. Используя выражения (2.4.6) и (2.4.8), получаем (в соответствии со значениями элементов матриц, соответствующих примеру), что $A=B=0$ и $a=b=1$. Этим значениям соответствуют левые верхние фрагменты на рис. 2.8 и рис. 2.9. Следовательно, задача имеет единственное устойчивое решение

$$(x^*,1-x^*)=(y^*,1-y^*)=(0,1),$$

соответствующее уже рассмотренному ранее решению в чистых стратегиях.

Ситуация, когда 2×2 игра не имеет устойчивых решений в чистых стратегиях, но обретает такое решение в смешанных стратегиях, соответствует второму случаю из пункта, завершающего доказательство теоремы. Устойчивое решение в смешанных стратегиях окажется единственным, если решениями систем (2.4.10) и (2.4.11) являются лишь точки *трехзвенных* ломаных линий, соединяющих концы *разных* диагоналей квадрата. При этом единственная устойчивая пара стратегий

$$(x^*,1-x^*)=(\beta,1-\beta),\quad (y^*,1-y^*)=(\alpha,1-\alpha), \tag{2.4.21}$$

порождается единственной точкой $(x^*, y^*)=(\beta,\alpha)$, в которой пересекаются указанные выше ломаные линии. При этом

$$0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1 \tag{2.4.22}$$

и, кроме того, знаки величин A и B должны быть различны, т.е.

$$AB<0 \qquad (2.4.23)$$

(см. рис. 2.8 и рис. 2.9).

Неравенства (2.4.22) для величин α и β из (2.4.19), (2.4.20), определяемых соответственно коэффициентами a, A из (2.4.6) и b, B из (2.4.8), имеют следствием отношения

$$a_{11}\neq a_{21},\ a_{22}\neq a_{12},\quad b_{11}\neq b_{12},\ b_{22}\neq b_{21}. \qquad (2.4.24)$$

Т.е. условие единственности решения в смешанных стратегиях предполагает, что коэффициенты, находящиеся в одном и том же столбце матрицы первого игрока, должны быть различны. Аналогично, должны быть различны и коэффициенты из одной и той же строки матрицы второго игрока.

Оптимальные смешанные стратегии в 2×2 матричной игре

Как уже отмечалось, антагонистическому случаю соответствуют условия (2.1.2), согласно которым для величин из (2.4.6) и (2.4.8) справедливы отношения:

$$a=a_{22}-a_{12},\quad b=-a_{22}+a_{21}. \qquad (2.4.25)$$

При этом

$$A=-B, \qquad (2.4.26)$$

что обеспечивает выполнение неравенства (2.4.23). В силу справедливости условий (2.1.2) справедливость неравенств (2.4.24) является необходимым следствием *отсутствия седлового значения* 2×2 матрицы игры (см. определение на стр. 95), поскольку совпадение значений коэффициентов в любой строке (или в столбце) 2×2 матрицы гарантирует существование такого значения. Таким образом, в 2×2 антагонистической игре отсутствие устойчивых решений в чистых стратегиях гарантирует существование *единственного* устойчивого решения в смешанных стратегиях, порождаемого парой (β,α), где

$$\alpha=(a_{22}-a_{12})/A, \quad \beta=(a_{22}-a_{21})/A .$$

При этом

$$x^*=(a_{22}-a_{21})/A , \quad 1-x^*=(a_{11}-a_{12})/A , \qquad (2.4.27)$$

$$y^*=(a_{22}-a_{12})/A , \quad 1-y^*=(a_{11}-a_{21})/A , \qquad (2.4.28)$$

и для ядра $M(x, y)= M_1(x, y)$ смешанного расширения исходной игры справедлива оценка

$$\begin{aligned}(\forall y\in [0,1])\ M(x^*, y)=&\{[a_{11}(a_{22}-a_{21})+a_{21}(a_{11}-a_{12})]\cdot y+\\ &+[a_{12}(a_{22}-a_{21})+a_{22}(a_{11}-a_{12})](1-y)\}/A=\\ &=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})/A=M(x^*, y^*).\end{aligned} \qquad (2.4.29)$$

Таким образом, цена игры в смешанных стратегиях (т.е. математическое ожидание выигрыша первой стороны при реализации устойчивой пары смешанных стратегий из (2.4.27), (2.4.28)) есть

$$v=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})/A . \qquad (2.4.30)$$

Отметим одно важное обстоятельство. Из (2.4.29), (2.4.30) следует, что

$$(\forall y\in [0,1])\ M(x^*, y)=v .$$

Аналогично можно получить симметричное утверждение

$$(\forall x\in [0,1])\ M(x, y^*)=v .$$

Отсюда следует вывод о том, что замечание, сделанное на стр. 126, не зависит от конкретных значений элементов 2×2 матрицы игры. Пусть одна из сторон (заведомо) использует рулетку, реализующую оптимальную смесь чистых стратегий. Тогда независимо от того, какую стратегию выбирает другая сторона, ее ожидаемый выигрыш совпадает с ценой игры. Т.е. *любая* ее стратегия обеспечивает максимальный гарантированный уровень математического ожидания выигрыша (величину v для стороны P_1 и величину $-v$ для стороны P_2).

Согласно выражениям (2.4.27), (2.4.28) и (2.4.30) рассмотренный ранее пример рекламной борьбы (см. стр. 120), не имеющий устойчивых решений в чистых стратегиях, имеет единственное устойчивое решение в смешанных стратегиях:

$$(x^*,1-x^*)=(y^*,1-y^*)=(½,½), \quad v=0 .$$

Это же решение было получено ранее (некоторым частным способом); см. (2.4.3). Заметим, что игры, которым соответствует *нулевая цена*, часто называют *безобидными*.

Теперь вернемся к примеру погони за конкурентом, в котором при отсутствии полной информации (см. дерево игры на рис. 2.5) нет устойчивых решений в чистых стратегиях (см. также замечание на стр. 112). Обратимся к соответствующей этому случаю матрице 4×2 матрице игры, приведенной на стр. 112. Заметим, что первая и вторая стратегии стороны P_1 дают одни и те же выигрыши против одной и той же стратегии стороны P_2. При этом третья стратегия стороны P_1 даже превосходит ее четвертую стратегию. Фактически, мы имеем ситуацию, когда каждый элемент матрицы, находящийся в строке с номером i превышает соответствующий (т.е. находящийся в том же столбце) элемент из строки с номером k (или хотя бы не меньше, чем этот элемент):

$$a_{ij} \geq a_{kj} , \quad 1 \leq j \leq 2.$$

В этом случае говорят, что строка i *доминирует* строку k. Ясно, что любое значение выигрыша, обеспечиваемое использованием *доминируемой* стратегии с номером k, может быть достигнуто использованием доминирующей стратегии с номером i. Поэтому в рассматриваемом примере сторона P_1 может ограничиться использованием второй и третьей стратегий. В результате получаем (редуцированную) игру с 2×2 матрицей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Редуцированная матрица игры</td><td colspan="2">Смешанная стратегия P_2</td></tr>
<tr><td>1/6</td><td>5/6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Смешанная стратегия P_1</td><td>2/3</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1/3</td><td>7</td><td>3</td></tr>
</table>

Согласно (2.4.27), (2.4.28) и (2.4.30), этой игре соответствует устойчивое (и эффективное) решение в смешанных стратегиях вида:

$$\left(x^*, 1-x^*\right)=\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \quad \left(y^*, 1-y^*\right)=\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}\right),$$

и цена игры $v=3\tfrac{2}{3}$. Примем, что первая и четвертая (чистые) стратегии в исходной 4×2 игре используются первым игроком с нулевыми вероятностями. Тогда случайный механизм, характеризуемый вектором вероятностей $(0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0)$, обеспечивает игроку P_1 математическое ожидание выигрыша, равное указанной выше цене $v=3\tfrac{2}{3}$. Фактически, обсуждая этот пример, мы обобщили смешанные стратегии на случай, когда число чистых стратегий превышает 2. Более последовательное рассмотрение такого обобщения будет проведено ниже.

Замечание 2.5 (о природе устойчивости решений в антагонистической игре). Если изменить знаки всех элементов матрицы игры на противоположные, то, согласно (2.4.30), знак цены игры также изменится. Например, если значение цены игры было положительным (в этом случае говорят, что *игра поставлена в пользу* первого игрока), то оно изменится на отрицательное значение (т.е. игра будет поставлена уже в пользу второго игрока). Однако пара устойчивых смешанных стратегий, определяемых выражениями (2.4.27) и (2.4.28), останется *неизменной*.

Стратегическое равновесие при неантагонистических интересах сторон

Пусть интересы сторон, описываемые матрицами 2×2 биматричной игры, являются неантагонистическими. При этом предположении продолжим обсуждение поведения игроков, характеризуемого стратегическими парами (x^*, y^*), обладающими свойствами равновесия по Нэшу (т.е. отвечающими условиям (2.4.10), (2.4.11)).

Начнем со случая, когда 2×2 биматричная игра имеет *единственное* устойчивое решение и оно достигается в смешанных стратегиях из (2.4.21). При этом:

$$\alpha=(a_{22}-a_{12})/(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}), \qquad (2.4.31)$$

$$\beta=(b_{22}-b_{21})/(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}). \qquad (2.4.32)$$

Пример 2.5 (неантагонистическая конкуренция). Пусть два конкурирующих фермера P_1 и P_2 специализируются на выращивании и продаже с автофургонов некоторой скоропортящейся продукции (например, свежей клубники). Продажа осуществляется (каждым фермером) ежедневно в *одном* из двух удаленных друг от друга населенных пунктов П1 и П2, причем продукт, доставленный в один из этих пунктов, нецелесообразно перебрасывать в другой пункт в силу значительной потери качества при длительной перевозке.

Если фермеры завезут товар в *разные* пункты, то он будет продан каждым из них. Полезность такого исхода для каждой из сторон примем за *две* единицы. В случае, когда автофургоны обоих фермеров одновременно окажутся в одном и том же пункте, спрос на товар, существующий в этом пункте, будет удовлетворен в основном за счет *более качественного* товара, доставленного первым фермером. Полезность такого исхода первый фермер оценивает как *три* единицы. Эта оценка включает как доход от продажи товара, так и получение рекламных преимуществ, открывающих перспективы полного захвата рынка в обоих пунктах (и соответствующего расширения производства).

Второй фермер оценивает полезность исхода, связанного с одновременной торговлей обеих сторон в одном и том же населенном пункте, как *нулевую*. Матрицы соответствующие этой 2×2 *неантагонистической* игре представлены в табл. 2.7. Стратегии сторон соответствуют выбору конкретного пункта (П1 или П2) для торговли в текущий день.

Таблица 2.7

Матрица первого фермера		Стратегии второго фермера П1	Стратегии второго фермера П2
Стратегии первого фермера	П1	3	2
Стратегии первого фермера	П2	2	3

Матрица второго фермера		Стратегии второго фермера П1	Стратегии второго фермера П2
Стратегии первого фермера	П1	0	2
Стратегии первого фермера	П2	2	0

Очевидно, что первый фермер заинтересован торговать в том же месте, что и второй. Интересы второго фермера диктуют противоположный *выбор* (тем не менее, как уже было отмечено, рассматриваемая игра не является антагонистической).

Как следует из табл. 2.7, все исходы игры в чистых стратегиях не улучшаемы для обеих сторон и, следовательно, оптимальны по Парето. При этом не существует пар *чистых* стратегий сторон, обладающих свойством равновесия по Нэшу.

Согласно (2.4.6) и (2.4.8)

$$A=2,\ a=1,\quad B=-4,\ b=-2.$$

При этом выполняются условия (2.4.23), (2.4.24) и, следовательно, существует единственная устойчивая (по Нэшу) пара смешанных стратегий вида

$$(x^*,1-x^*)=(y^*,1-y^*)=(½,½); \qquad (2.4.33)$$

см. (2.4.21) и (2.4.31), (2.4.32). Т.е. каждый фермер может выбирать пункт для торговли в текущий день, например, путем бросания симметричной монеты. При этом определяемые выражениями (2.4.5)-(2.4.8) математические ожидания полезностей сторон, соответствующие устойчивой паре стратегий (2.4.33), равны величинам:

$$M_1(x^*, y^*)=2\tfrac{1}{2}\,,\quad M_2(x^*, y^*)=1.$$

Замечание 2.6 (антагонизм поведения без антагонизма интересов). Как следует из(2.4.31), (2.4.32), смешанная стратегия каждой из сторон, входящая в устойчивую пару (2.4.21), зависит исключительно от матрицы другой стороны (т.е. зависит от интересов другой стороны и не зависит от собственных интересов). Рассмотрим эту зависимость более детально.

Согласно (2.4.21) и (2.4.31), стратегия $(y^*,1-y^*)$ игрока P_2 в 2×2 биматричной игре совпадает со смешанной минимаксной стратегией (2.4.28) второго игрока в антагонистической игре с левой матрицей из табл. 2.6. Т.е. действия P_2, соответствующие устойчивой паре, *направлены на уменьшение выигрыша первого игрока, а не на увеличение собственного выигрыша*.

Аналогична направленность действий стороны P_1. Инвертируя знаки всех элементов в правой таблице из табл. 2.6, получим матрицу

$$\begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{vmatrix},$$

коэффициенты которой соответствуют *проигрышам* стороны P_2.

Максиминная стратегия первого игрока в *антагонистической* игре с такой матрицей имеет вид:

$$(x^*,1-x^*)=((b_{22}-b_{21})/B,\ (b_{11}-b_{12})/B); \qquad (2.4.34)$$

ср. с (2.4.27). При этом, согласно (2.4.21) и (2.4.32), распределение (2.4.34) есть также смешанная стратегия игрока P_1, входящая в единственное устойчивое решение для смешанного расширения биматричной игры. Т.е. поведение P_1 в равновесном (по Нэшу) решении направлено на уменьшение выигрыша второго игрока, а не на максимизацию собственного выигрыша. Этот феномен обычно называют *антагонизмом поведения без антагонизма интересов*.

Продолжим обсуждение характера равновесных решений в биматричной игре, допустив, что наряду с устойчивыми решениями в смешанных стратегиях существуют также устойчивые (по Нэшу) стратегические решения в чистых стратегиях.

Пример 2.6 (выбор пункта для строительства с долевым участием). Две фирмы P_1 и P_2 планируют строительство (с долевым участием) гостиничного комплекса в одном из двух районов города (Р1 и Р2). При этом фирма P_1 заинтересована строить комплекс в районе Р1, где у нее есть ряд предприятий обслуживания, которые могли бы принести (в этом случае) дополнительный доход. Фирма P_1 не имеет таких предприятий в районе Р2. Но именно в этом втором районе расположены точки обслуживания, созданные фирмой P_2, которая (по этой причине) заинтересована в том, чтобы комплекс строился в районе Р2.

Таблица 2.8

Матрица P_1		Стратегии P_2	
		Р1	Р2
Стратегии P_1	Р1	2	0
	Р2	0	1

Матрица P_2		Стратегии P_2	
		Р1	Р2
Стратегии P_1	Р1	1	0
	Р2	0	2

Ни одна из фирм не имеет достаточных свободных средств, чтобы построить комплекс в одиночку. Поэтому, если фирмы не смогут прийти к согласию относительно района строительства, то стройка окажется невозможной. Полезность такого исхода является нулевой для каждой фирмы. Матрицы описанной игры[47] представлены в табл. 2.8.

Из данных табл. 2.8 и выражений (2.4.6), (2.4.8), (2.4.19), (2.4.20) получаем, что

$$A=3,\ a=1,\ \alpha=1/3,\quad B=3,\ b=2,\ \beta=2/3.$$

При этом из рис. 2.8 и рис. 2.9 следует (см. средний фрагмент на рис. 2.10), что существует три пары (x^*, y^*), удовлетворяющие условиям устойчивости (2.4.10), (2.4.11). Этот случай иллюстрируется рис. 2.11.

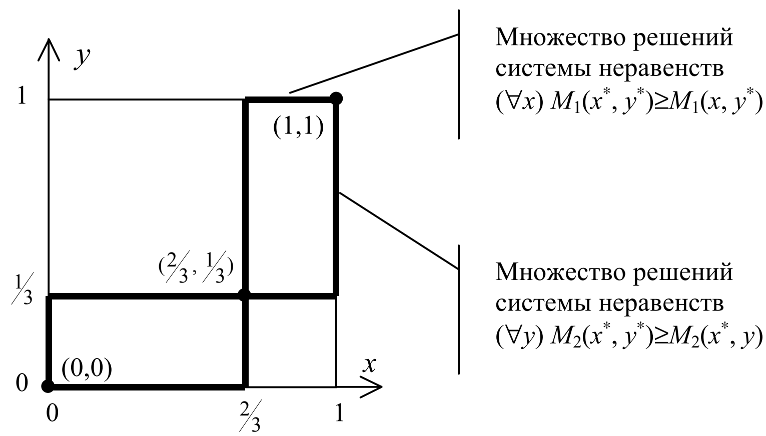


Рис. 2.11

Смешанные стратегии, соответствующие этим парам, и отвечающие им математические ожидания $M_1(x^*, y^*)$, $M_2(x^*, y^*)$ выигрыша сторон представлены в табл. 2.9.

---

[47] Приведенный пример имеет и другие известные в литературе интерпретации: «семейный спор» (Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. М.:ИЛ, 1961), «вежливые водители» (Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985) и др.

Отметим, что (не эффективная) равновесная пара *смешанных* стратегий из третьей строки табл. 2.9, соответствующая описанному выше антагонизму поведения без антагонизма интересов, может быть естественным образом интерпретирована, если выбор сторон является повторяющимся.

Таблица 2.9

(x^*, y^*)	$(x^*, 1-x^*)$	$(y^*, 1-y^*)$	$M_1(x^*, y^*)$	$M_2(x^*, y^*)$	Эффективность
(0,0)	(0,1)	(0,1)	1	2	Есть
(1,1)	(1,0)	(1,0)	2	1	Есть
$(2/3, 1/3)$	$(2/3, 1/3)$	$(1/3, 2/3)$	$2/3$	$2/3$	Нет

Такая ситуация возможна, например, если стороны последовательно (по мере накопления свободных средств) создают *систему* небольших гостиничных комплексов. В этом случае рассмотренная задача выбора одного из двух районов строительства будет повторяться, и математическое ожидание выигрыша можно интерпретировать как средний выигрыш (в расчете на одну партию игры) в серии последовательно решаемых задач. Однако рассмотрение такой повторяющейся игры допускает и другие подходы. Возможно планирование всей серии выборов, а не единичного акта принятия решения по строительству одного гостиничного комплекса.

Есть еще одно обстоятельство, которое следует отметить. Рассмотренный пример демонстрирует существование трех стратегических пар, обладающих свойствами равновесия по Нэшу, и при этом каждая оперирующая сторона имеет *различные* выигрыши во всех этих парах. Это существенно отличает рассматриваемый неантагонистический случай от антагонистических конфликтов (ср. с утверждениями следствия из теоремы о необходимых и достаточных условиях существования седловой точки ядра антагонистической игры — см. стр. 79).

Кроме того, реализация любой из устойчивых пар стратегий требует *согласования* действий сторон. Действительно, например, если игрок P_1 выберет чистую стратегию $i^*=2$, являющуюся компонентой первой устойчивой пары из табл. 2.9, а игрок P_2 выберет чистую стратегию $j^*=1$, являющуюся компонентой второй устойчивой пары, то такой совместный выбор не обладает свойствами поведения в равновесии. Таким образом, в конфликтах с неантагонистическими интересами сторон анализ устойчивости решений может оказаться недостаточным для выработки удовлетворительных схем поведения этих сторон. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в следующей главе.

Смешанные расширения $m\times n$ биматричных игр

Рассмотренная выше схема выбора поведения, основанная на (искусственном) внесении неопределенности путем использования случайных механизмов, может быть обобщена на случай, когда число чистых стратегий каждой из сторон превышает две. При таком подходе первая сторона P_1 использует рулетку, имеющую m исходов, характеризуемых вероятностями наступления x_i, $1\le i\le m$, а вторая сторона — рулетку, имеющую n исходов, характеризуемых вероятностями наступления y_j, $1\le j\le n$. При этом m и n есть числа чистых стратегий, имеющихся соответственно у первой и второй сторон. В связи со сказанным введем следующее определение.

Определение 2.5. ***Смешанными стратегиями*** игроков P_1 и P_2 в $m\times n$ биматричной игре соответственно называются векторы

$$x=(x_1,\dots, x_i,\dots, x_m)\in S_m\subset R^m,$$

$$y=(y_1,\dots,y_j,\dots,y_n)\in S_n\subset R^n,$$

где S_m и S_n есть множества векторов с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице, т.е.

$$S_m=\{x\in R^m: x_i\geq 0,\ 1\leq i\leq m,\quad x_1+\ldots+x_m=1\},$$
$$S_n=\{y\in R^m: y_j\geq 0,\ 1\leq j\leq n,\quad y_1+\ldots+y_n=1\}. \qquad (2.4.35)$$

При этом числа x_i и y_j есть вероятности, с которыми (независимые) рулетки игроков P_1 и P_2 порождают исходы соответственно с номерами i и j. Тем самым определяется использование игроками P_1 и P_2 соответственно чистой стратегии с номером i и чистой стратегии с номером j в текущей партии игры.

Поскольку в классе S_m смешанных стратегий[48] стороны P_1 для любого номера i, $1\leq i\leq m$, существует стратегия $x(i)$, удовлетворяющая условиям

$$x_k(i)=0,\ k=1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,m,\quad x_i(i)=1,$$

и, следовательно, обеспечивающая применение чистой стратегии i с единичной вероятностью, то игра в чистых стратегиях может интерпретироваться как частный случай игры в смешанных стратегиях. Аналогичное утверждение справедливо для игрока P_2.

Выбор игроками P_1 и P_2 смешанных стратегий $x\in S_m$ и $y\in S_n$ еще не определяет конкретного исхода игры. В связи с этим в качестве оценок эффективности $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$, которую обеспечивает игрокам выбор пары (x, y), принимаются математические ожидания

$$M_1(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,$$
$$M_2(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_iy_j, \qquad (2.4.36)$$

[48] Многомерные фигуры, обладающие свойствами (2.4.35), называются *симплексами*.

при определении которых учтена (вероятностная) независимость случайных механизмов, используемых сторонами.

Если принять, что x и y есть векторы-столбцы и обозначить матрицы, представляющие выигрыши первого и второго игроков (при игре в чистых стратегиях) соответственно через A и B, то, согласно (2.4.36), *смешанное расширение* $m\times n$ *биматричной игры* можно представить следующей моделью (в нормальной форме):

$$M_1(x, y)=x^TAy, \quad M_2(x, y)=x^TBy, \quad x\in S_m, y\in S_n \qquad (2.4.37)$$

(верхний индекс T соответствует операции *транспонирования*, сопоставляющей вектору-столбцу вектор-строку).

Для произвольной $m\times n$ биматричной игры справедливо утверждение, что в ее смешанном расширении существует хотя бы одна ситуация равновесия (по Нэшу). Т.е. в смешанном расширении каждой биматричной игры существует пара смешанных стратегий (x^*, y^*), удовлетворяющая неравенствам (1.3.18), где $X=S_m$ и $Y=S_n$. В случае, когда интересы сторон являются противоположными (антагонистическими), это утверждение подразумевает существование седловой точки (x^*, y^*) ядра

$$M(x, y)= M_1(x, y)=x^TAy, \qquad (2.4.38)$$

удовлетворяющей условиям:

$$(\forall x\in S_m)(\forall y\in S_n) \;\; x^TAy^*\le x^{*T}Ay^*\le x^{*T}Ay; \qquad (2.4.39)$$

см. (1.5.2) и (1.5.3).

Существование пар стратегий, удовлетворяющих условиям (2.4.39) и, следовательно, являющихся равновесными решениями для смешанных расширений $m\times n$ антагонистических игр, имеющих ядра вида (2.4.38) (с любыми матрицами A), будет показано в следующем параграфе. Доказательство упомянутого выше факта разрешимости условий (1.5.3) для смешанного расширения (2.4.37) любой $m\times n$ биматричной игры может быть найдено в других источниках[49]. Мы опускаем это доказательство в нашей небольшой (соответствующей программе вводного курса) книге, поскольку для общего $m\times n$ случая (в отличие от уже рассмотренных 2×2 задач) оно не дает способа вычисления пары стратегий, порождающих ситуацию равновесия (т.е. оно не является *конструктивным*). Кроме того, как уже было отмечено (см. обсуждение последнего примера на стр. 147), анализ устойчивости в таких задачах может оказаться недостаточным для выработки удовлетворительных схем поведения сторон.

2.5 Матричные игры и линейные программы как модели поведения

Двойственные задачи линейного программирования и рыночное равновесие

Рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями вида неравенств в следующей интерпретации[50]. Пусть некоторая фирма P_1 располагает m видами сырья, используя которые, она может выпускать n типов продукции. Известны цены $c_j \geq 0$, $1\leq j\leq n$, по которым происходит реализация единицы продукции каждого j-го типа, составляющие вектор-столбец

$$c = (c_1,\ldots, c_j,\ldots, c_n)^T,$$

где верхний индекс T соответствует операции транспонирования. Известны также запасы $b_i \geq 0$, $1\leq i\leq m$, сырья каждого вида, составляющие вектор-столбец

---

[49] См., например: Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

[50] Многие другие интерпретации задач линейного программирования представлены, например, в известной книге: Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.: Наука, 1969.

$$b=(b_1,\ldots, b_i,\ldots, b_m)^T.$$

Наконец, задана матрица A коэффициентов a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, характеризующих количество сырья вида i, необходимое для производства единицы продукции типа j. Требуется определить плановые уровни w_j, $1\le j\le n$, производства продукции каждого типа, обеспечивающие максимальный *доход* при заданных сырьевых ресурсах.

Если принять, что план производства описывается вектором столбцом

$$w=(w_1,\ldots, w_j,\ldots, w_n)^T,$$

то условие его обеспеченности сырьевыми ресурсами можно описать с помощью неравенств

$$a_{i1}w_1+\ldots+a_{in}w_n \le b_i,\ \ 1\le i\le m,$$

которые можно свернуть в векторную запись вида

$$Aw \le b.$$

Теперь поставленная задача выбора плана w^*, максимизирующего доход

$$(c^T,w)=c_1w_1+\ldots+c_nw_n,$$

может быть представлена в форме следующей математической задачи

$$(c^T,w^*)=\max\{(c^T,w)\colon w\ge 0_n, Aw\le b\}, \qquad (2.5.1)$$

которую будем называть *прямой задачей* линейного программирования (с ограничениями типа неравенств).

Заметим, что указанный в (2.5.1) вектор-столбец 0_n соответствует началу координат в пространстве R^n, а условие $w\ge 0_n$ эквивалентно (координатным) неравенствам $w_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$. В дальнейшем (там, где это не может вызвать сомнений) мы будем (для краткости записи) опускать нижний индекс при 0_n, указывающий размерность пространства.

Примем, что фирма P_1, помимо продажи своей продукции, может также продавать имеющиеся у нее запасы сырья по ценам, характеризуемым вектором-столбцом

$$u=(u_1,\ldots, u_i,\ldots, u_m)^T.$$

Такая продажа может быть экономически оправданной для фирмы P_1, если средства, выручаемые от продажи сырья всех видов, необходимого для производства единицы продукции некоторого типа j, будут не меньше, чем выручка от продажи этой единицы продукции. Т.е. экономические мотивы для рассмотренной продажи сырья могут иметь место лишь при выполнении неравенств

$$a_{1j}u_1+\ldots+a_{mj}u_m \geq c_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

которые можно свернуть в векторную запись вида

$$A^T u \geq c.$$

Рынок, с которым взаимодействует фирма P_1, продавая продукцию (или сырье), будем рассматривать как вторую (агрегированную) сторону в описываемой операции и обозначать P_2. Естественно принять, что участники рынка, покупающие сырье, заинтересованы в уменьшении своих затрат. Поэтому их задачу можно описать как формирование вектора цен u^*, удовлетворяющего условиям:

$$(b^T,u^*)=\min\{(b^T,u)\colon u \geq 0_m,\ A^T u \geq c\}. \qquad (2.5.2)$$

Задачу (2.5.2), решаемую второй стороной и представляющую интересы рынка будем называть *двойственной задачей* линейного программирования (с ограничениями вида неравенств).

Для двойственной пары задач (2.5.1), (2.5.2) линейного программирования справедлива *теорема двойственности*[51]. Согласно этой теореме, если одна из задач (2.5.1) и (2.5.2) имеет решение, то и вторая задача имеет решение, причем в этом случае

$$(c^T,w^*)=(b^T,u^*). \tag{2.5.3}$$

Величины, введенные при описании пары двойственных задач (2.5.1), (2.5.2), собраны (для наглядности) в табл. 2.10.

Таблица 2.10

		План производства						
		w_1	…	w_j	…	w_n		
Цены на сырье	u_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1	Запасы сырья
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
	u_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i	
	⋮	⋮		⋮			⋮	
	u_n	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m	
		c_1	…	c_j	…	c_n		
		Цены на продукцию						

Заметим, что фактически мы рассматриваем разные механизмы, определяющие цены на продукцию и цены на сырье. Цены, по которым реализуется продукция, считаются заданными и не

[51] Два разных доказательства этой теоремы содержатся в учебном пособии: Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1987. См. также: Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

зависящими от объемов производства. Такая ситуация возможна, например, в случае, когда существует внешний механизм регулирования этих цен, призванный стимулировать производство и продажу товаров из рассматриваемого перечня. При этом цены на сырье (зависящие согласно (2.5.2) от заданных цен на продукцию) формируются как результат описанных выше взаимодействий производителя и рынка.

Примем теперь, что производитель, выбрав некоторый план производства $w \geq 0_n$, может продавать на рынке не только произведенную продукцию, но и остатки сырья. Кроме того, он может закупать на рынке недостающее сырье. При этом продажа и закупка сырья происходит по одним и тем же ценам $u \geq 0_m$, которые формирует рынок. В такой постановке *доход* производителя, который мы будем рассматривать как критерий $M(w,u)$ первой стороны, определяется выражением

$$\begin{aligned} M(w,u) &= \sum_{j=1}^{n} c_j w_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \sum_{j=1}^{n} w_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i\right), \end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

или (в векторной форме)

$$M(w,u)=(c^T,w)+(b^T,u)-u^T Aw. \qquad (2.5.5)$$

При этом (если принять, что производитель имеет достаточное финансовое обеспечение) любой план производства $w \geq 0_n$ является допустимым. Допустим также и любой вектор $u \geq 0_m$, формируемый рынком, интересы которого *противоположны* интересам производителя, желающего максимизировать свой доход.

В результате получаем, что отношения сторон P_1 и P_2 характеризуются антагонистической игрой с ядром $M(w,u)$ и множествами стратегий сторон, определяемыми соответственно условиями $w \geq 0_n$ и $u \geq 0_m$.

Исследуем вопрос о существовании равновесного поведения сторон, т.е. вопрос о существовании пары стратегий (w^*,u^*), являющейся седловой точкой ядра $M(w,u)$. Оценим величину дохода производителя, гарантируемую выбором плана $w \ge 0_n$. Согласно (2.5.4),

$$\min_{u\ge 0} M(w,u) = \begin{cases} (c^T, w), & (\forall i = 1,\ldots,m) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le b_i\,, \\ -\infty, & (\exists i, 1 \le i \le m) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j > b_i\,. \end{cases}$$

Действительно, при выполнении условия $Aw \le b$ выбор вектора $u=0_m$ минимизирует доход $M(w,u)$, поскольку вынуждает производителя отдавать излишки сырья по нулевым ценам. В случае, когда реализация принятого производителем плана $w \ge 0_n$ требует покупки недостающего сырья вида i, вторая сторона может неограниченно уменьшать доход P_1 путем увеличения цены u_i на дефицитное (для P_1) i-е сырье. Следовательно,

$$\max_{w\ge 0} \min_{u\ge 0} M(w,u) = \max\left\{(c^T, w) : w \ge 0_n, Aw \ge b\right\}. \qquad (2.5.6)$$

Т.е. производитель может максимизировать *гарантированный доход*, если откажется от закупок недостающего сырья и ограничится имеющимися запасами. В состав этих запасов могут входить и объемы, на поставку которых заблаговременно заключены соответствующие контракты[52]. Таким образом, *максиминная* стратегия стороны P_1 (если такая стратегия существует) является решением w^* прямой задачи линейного программирования; ср. (2.5.1) и (2.5.6).

Теперь оценим *возможные максимальные затраты* второй стороны P_2, соответствующие некоторому вектору $u \ge 0_m$ цен за сырье. Согласно (2.5.4),

---

[52] Необходимость *заблаговременного* обеспечения производства сырьем и комплектующими (например, на договорной основе) является обстоятельством, хорошо известным в практике рыночной деятельности.

$$\max_{w\ge 0} M(w,u) = \begin{cases} (b^T,u), & (\forall j=1,\ldots,n)\ \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \ge c_j\,, \\ +\infty, & (\exists j, 1\le j\le n)\ \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i < c_j\,. \end{cases}$$

Действительно, при выполнении условия $A^Tu \ge c$ выбор плана $w=0_n$ (т.е. отказ от производства продукции) максимизирует доход $M(w,u)$ первой стороны (или затраты второй стороны). В этом случае продажа сырья дает не меньший доход, чем продажа продукции произведенной из этого сырья.

Допустим, что доход от продажи продукции некоторого типа j превышает затраты на приобретение сырья, необходимого для производства единицы этой продукции. Тогда производитель может неограниченно увеличивать свой доход, закупая сырье в ассортименте, необходимом для производства продукции типа j. Заметим, что это рассуждение предполагает наличие у производителя необходимых оборотных средств (или возможность использования кредитов). Таким образом (при указанных условиях),

$$\min_{u\ge 0}\max_{w\ge 0} M(w,u) = \min\left\{(b^T,u) : u \ge 0_m\,,\ A^Tu \ge c\right\}. \qquad (2.5.7)$$

Т.е. вторая сторона может минимизировать свои возможные максимальные затраты, если установит такие цены на сырье, что производитель откажется от производства. При этом *минимаксная* стратегия стороны P_2 (если такая стратегия существует) является решением u^* двойственной задачи линейного программирования; ср. (2.5.2) и (2.5.7).

Теперь из (2.5.1)-(2.5.3) и (2.5.6), (2.5.7) вытекает, что

$$(c^T,w^*) = \max_{w\ge 0}\min_{u\ge 0} M(w,u) = \min_{u\ge 0}\max_{w\ge 0} M(w,u) = (b^T,u^*).$$

Следовательно, если хотя бы одна из пары (2.5.1), (2.5.2) двойственных задач линейного программирования имеет решение, то функция $M(w,u)$ имеет седловую точку (см. теорему о необходимых и достаточных условиях существования седловой точки ядра на стр. 77), т.е.

$$(\forall w\geq 0_n)(\forall u\geq 0_m)\ \ M(w,u^*)\leq M(w^*,u^*)\leq M(w^*,u), \tag{2.5.8}$$

$$M(w^*,u^*)=(c^T,w^*)=(b^T,u^*). \tag{2.5.9}$$

Таким образом, мы установили, что пара двойственных задач линейного программирования определяет равновесную ситуацию (w^*,u^*) на рассмотренном выше рынке.

Сведение решения матричной игры к решению пары двойственных задач линейного программирования

Подставляя (2.5.5) в (2.5.8) и учитывая (2.5.9), устанавливаем справедливость следующих неравенств:

$$(\forall w\geq 0_n)(\forall u\geq 0_m)\quad (c^T,w)-u^{*T}Aw\leq 0\leq (b^T,u)-u^TAw^*. \tag{2.5.10}$$

Приняв, что цены на продукцию всех типов и запасы сырья всех видов являются единичными, т.е.

$$c_j=1,\ 1\leq j\leq n,\qquad b_i=1,\ 1\leq i\leq m, \tag{2.5.11}$$

приводим (2.5.10) к виду:

$$(w_1+\ldots+w_n)-u^{*T}Aw\leq 0\leq (u_1+\ldots+u_m)-u^TAw^*. \tag{2.5.12}$$

Введя нормированные переменные

$$\begin{aligned} x_i &= u_i/(u_1+\ldots+u_m), \quad 1\leq i\leq m,\\ y_j &= w_j/(w_1+\ldots+w_n), \quad 1\leq j\leq n, \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

и составленные из них векторы-столбцы

$$x=(x_1,\ldots,x_m)^T,\quad y=(y_1,\ldots,y_n)^T,$$

перепишем (2.5.12) как

$$1-u^{*T}Ay \leq 0 \leq 1-x^TAw^*,$$

или

$$x^TAw^* \leq 1 \leq u^{*T}Ay\ . \tag{2.5.14}$$

При этом предполагается, что суммы из знаменателей правых частей равенств в (2.5.13) являются положительными. Это допущение не противоречит условиям $w \geq 0_n$, $u \geq 0_m$ из (2.5.10). Таким образом,

$$x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m, \quad x_1+\ldots+x_m=1,$$

$$y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n, \quad y_1+\ldots+y_n=1,$$

или (см. (2.4.35))

$$x \in S_m, \quad y \in S_n\ . \tag{2.5.15}$$

Предположим, что общее значение минимакса и максимина ядра, указанное в (2.5.9), является положительным. Обозначим обратное ему число через v, т.е.

$$\begin{aligned} (c^T, w^*) &= w^*_1+\ldots+ w^*_n = v^{-1} > 0\ , \\ (b^T, u^*) &= u^*_1+\ldots+ u^*_n = v^{-1} > 0\ . \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Заметим, что эти записи учитывают также условия (2.5.11). Теперь из (2.5.13) и (2.5.16) следует, что

$$\begin{aligned} x^*_i &= u^*_i/(u^*_1+\ldots+ u^*_m) = vu^*_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ y^*_j &= w^*_j/(w^*_1+\ldots+ w^*_n) = vw^*_j, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Умножая (2.5.14) на положительное число v, используя обозначения (2.5.17) и учитывая (2.5.15), выводим справедливость отношений

$$(\forall x\in S_m)(\forall y\in S_n) \quad x^T A y^* \le v \le x^{*T} A y, \tag{2.5.18}$$

$$v = x^{*T} A y^* . \tag{2.5.19}$$

Из (2.4.39) и (2.5.18), (2.5.19) следует, что пара (x^*, y^*) является *равновесной* (по Нэшу) в смешанном расширении конечной антагонистической игры с матрицей A. При этом введенное выше положительное число v оказывается *ценой* этой игры в смешанных стратегиях.

Рассмотрим *произвольную* $m\times n$ матрицу A с коэффициентами a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, и сопоставим ей вспомогательную $m\times n$ матрицу C с положительными коэффициентами

$$c_{ij} = a_{ij} + a > 0, \ \ 1\le i\le m, 1\le j\le n, \tag{2.5.20}$$

$$a > |\min\{a_{ij}: 1\le i\le m, 1\le j\le n\}| \ge 0 .$$

Линейная программа вида (2.5.1) при единичных коэффициентах из (2.5.11) заведомо *имеет решение*. Действительно, условия $Cw\le b$, имеющие вид

$$c_{i1}w_1 + \ldots + c_{in}w_n \le 1, \ 1\le i\le m, \quad w_j \ge 0, \ 1\le j\le n, \tag{2.5.21}$$

определяют *непустую* область в R^n, поскольку вектор $w=0_n$ удовлетворяет этим условиям. В указанной области линейная форма (c^T, w) оказывается *ограниченной сверху*, ибо, согласно (2.5.21),

$$w_1 + \ldots + w_n \le 1/c_{i1} + \ldots + 1/c_{in} \, , \ 1\le i\le m .$$

Таким образом, для линейной программы с матрицей C неравенства вида (2.5.8) и вытекающие из них отношения

$$(\forall x\in S_m)(\forall y\in S_n) \quad x^T C y^* \le v_c \le x^{*T} C y,$$

$$v_c = x^{*T} C y^*,$$

аналогичные утверждениям (2.5.18), (2.5.19), являются справедливыми при *любой* заданной матрице A.

Лемма 2.2. *Антагонистическая игра с ядром* (2.4.38), *соответствующим произвольной* $m\times n$ *матрице* A *и связанная с ней антагонистическая игра с ядром*

$$M_c(x, y)= x^T Cy, \tag{2.5.22}$$

соответствующим вспомогательной матрице C *из* (2.5.20), *имеют одно и то же множество ситуаций равновесия. При этом*

$$v_c = v + a,$$

где v_c *есть цена смешанного расширения игры с матрицей* C, *а* v *— цена смешанного расширения игры с матрицей* A.

Доказательство. Как следует из (2.4.35), (2.4.38) и (2.5.20), (2.5.22)

$$M_c(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a)x_i y_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j + a = M(x, y) + a,$$

где $M(x, y)$ есть ядро смешанного расширения антагонистической игры с матрицей A. При этом

$$M(x, y)=M_c(x, y) - a. \tag{2.5.23}$$

Следовательно, справедливость отношений

$$(\forall x\in S_m)(\forall y\in S_n)\;\; M_c(x, y^*)\le M_c(x^*, y^*)\le M_c(x^*, y) \tag{2.5.24}$$

для игры с матрицей C влечет справедливость аналогичных отношений (2.4.39) для игры с матрицей A, ибо последние выводятся из (2.5.24) путем вычитания числа a из всех частей содержащихся в (2.5.24) неравенств. Доказательство леммы завершается выводом равенства

$$v_c = M_c(x^*, y^*) = M(x^*, y^*) + a = v + a,$$

вытекающего из (2.5.23). ■

Итак, мы установили, что при любой $m \times n$ матрице A смешанное расширение антагонистической игры с вспомогательной матрицей C из (2.5.20) всегда имеет равновесное решение (x^*, y^*), которое является равновесным решением также и для исходной антагонистической игры. Таким образом, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Матричная игра с произвольной $m \times n$ матрицей A всегда имеет ситуацию равновесия (по Нэшу) в смешанных стратегиях $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$, которые могут быть определены из решения (u^*, w^*) следующей пары двойственных задач линейного программирования*

$u_1 + \ldots + u_m \to \min$	$w_1 + \ldots + w_n \to \max$
$u_1 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0,$	$w_1 \geq 0, \ldots, w_n \geq 0,$
$(a_{1j} + a)u_1 + \ldots + (a_{mj} + a)u_m \geq 1,$	$(a_{i1} + a)w_1 + \ldots + (a_{in} + a)w_n \leq 1,$
$1 \leq j \leq n,$	$1 \leq i \leq m,$

где a из (2.5.20). *При этом*

$$x^* = vu^*, \quad y^* = vw^*,$$

$$v = (u_1^* + \cdots + u_m^*)^{-1} = (w_1^* + \cdots + w_n^*)^{-1}.$$

Пример 2.7. Рассмотрим численный пример, которому соответствуют рассмотренные выше матрицы:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

Заметим, что вторая матрица соответствует значению a=5.

Первая из двух линейных программ, указанных в условиях теоремы, имеет вид:

$$u_1+u_2+u_3\to\min,$$
$$u_1\geq 0,\ u_2\geq 0,\ u_3\geq 0,$$
$$7u_1+2u_2+9u_3\geq 1,$$
$$2u_1+9u_2\geq 1,$$
$$9u_1+11u_3\geq 1,$$

и ей соответствует решение

$$u^*=(1/20,\ 1/10,\ 1/20), \quad v_c=5,$$

найденное симплекс-методом[53]. Следовательно,

$$x^*=(¼,½,¼), \quad v=v_c-a=0.$$

[53] См., например, учебное пособие: Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

2.6 Многошаговые задачи выбора решений

Мы уже рассматривали (см. второй параграф) операции, в которых процесс принятия решений представляет собой последовательность актов выбора, названных ходами сторон. При этом было показано, что все эти последовательные выборы можно описать как принятие некоторой стратегии, определяющей действия стороны во всех ситуациях, требующих решений. Описание всех таких стратегий позволило привести многоходовую задачу к нормальной форме, что дало возможность установить связь устойчивости решений с информированностью сторон (см. теорему о достаточных условиях существования устойчивых решений на стр. 113).

Общее число стратегий, соответствующих модели в нормальной форме, порождаемой при таком подходе, может оказаться значительным даже в относительно простых задачах (см. пример ниже). Поэтому при поиске оптимального поведения в конкретных приложениях зачастую рассматривается непосредственно процесс многошагового выбора. Такой подход оказывается особенно эффективным, если удается установить рекуррентную связь между величинами, характеризующими последовательные акты выбора.

Пример 2.8 (задача инспектирования)[54]. Пусть сторона P_1 (*нарушитель*) заинтересована в совершении некоторого запрещенного действия. При этом нарушение может быть совершено в один из N>1 периодов времени. Примерами таких действий могут быть нарушения экологического состояния (сброс мусора или слив загрязненных вод), продажа партии бракованного товара, не соблюдение предписанных норм при строительных работах и т.п.

---

[54] Предлагаемый пример подобен задаче, описанной в книге: Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

Сторона P_2 (*инспектор*), задачей которой является предотвращение запрещенных действий, может осуществить единственную инспекцию в один из этих N периодов времени.

Отношения сторон являются антагонистическими, причем выигрыш нарушителя равен 1, если совершенное им нарушение не было обнаружено. Установление инспектором факта нарушения (что возможно лишь, если инспекция проводится в тот же период времени, что и запрещенное действие) ведет к потерям нарушителя, которые оцениваются как величина, равная -1.

Операция завершается либо совершением запрещенного действия, либо проведением инспекции. Допускается, что в течение всех N периодов сторона P_1 воздерживалась от нарушений, а сторона P_2 — от инспекций. В этом случае выигрыш нарушителя равен нулю.

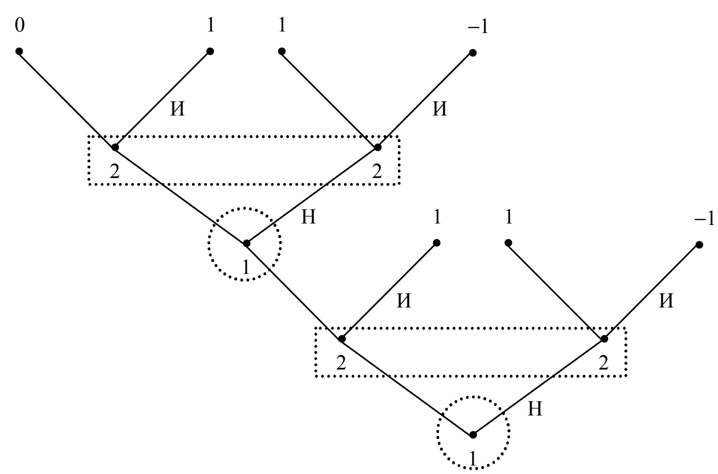


Рис. 2.12

Для иллюстрации условий задачи на рис. 2.12 представлено дерево описанной игры, соответствующее случаю N=2. При этом символы Н и И маркируют (правые) дуги дерева, соответствующие совершению нарушения (Н) стороной P_1 и проведению инспекции (И) стороной P_2. Дуги без маркировок представляют альтернативные варианты (т.е. отказы сторон от совершения действий). Одноэлементные информационные множества стороны P_1 обозначены разрывными кружками, а двухэлементные множества стороны P_2 — разрывными прямоугольниками. Множества нумеруются снизу вверх (на рисунке номера множеств не указаны).

Отметим, что наличие двухэлементных множеств (отражающих не информированность инспектора о действиях нарушителя) свидетельствует о том, что рассматриваемая задача не является игрой с полной информацией (см. определение на стр. 108).

Описанному дереву сопоставим 4×4 матрицу игры, представленную в табл. 2.11. Символы О, входящие в двухсимвольные пары, обозначающие стратегии сторон, соответствуют отказам от действий. Первые две строки и два столбца матрицы повторяют друг друга, что является следствием дублирования стратегий (см. замечание на стр. 109).

Таблица 2.11

Случай N=2	Стратегии P_2			
Стратегии P_1	И,И	И,О	О,И	О,О
Н,Н	−1	−1	1	1
Н,О	−1	−1	1	1
О,Н	1	1	−1	1
О,О	1	1	1	0

Найдем решение этой игры в смешанных стратегиях $x, y \in S_4$, полагая (в связи с отмеченным дублированием), что

$$x_1 = y_1 = 0. \qquad (2.6.1)$$

Равенства (2.6.1) позволяют записать условия нормировки для распределений x и y в виде отношений

$$x_2+x_3+x_4 = y_2+y_3+y_4 =1. \tag{2.6.2}$$

Из (2.4.38), (2.5.18) и определения смешанных стратегий (см. стр. 147)следуют неравенства

$$M(x(i), y)\leq v \leq M(x, y(j)), \quad 1\leq i, j \leq 4, \tag{2.6.3}$$

для *оптимальных* смешанных стратегий $x, y\in S_4$, цены игры v и смешанных стратегий $x(i)$ и $y(j)$, представляющих чистые стратегии сторон P_1 и P_2 соответственно с номерами i и j. Для матрицы из табл. 2.11 условия (2.6.3) эквивалентны неравенствам:

$$M(x, y(2))= -x_2+x_3+x_4 \geq v, \tag{2.6.4}$$

$$M(x, y(3))= x_2-x_3+x_4 \geq v, \tag{2.6.5}$$

$$M(x, y(4))= x_2+x_3 \geq v, \tag{2.6.6}$$

$$M(x(2), y) = -y_2+y_3+y_4 \leq v, \tag{2.6.7}$$

$$M(x(3), y) = y_2-y_3+y_4 \leq v, \tag{2.6.8}$$

$$M(x(4), y) = y_2+y_3 \leq v, \tag{2.6.9}$$

при выводе которых учтено допущение (2.6.1).

Из (2.6.4), (2.6.5) и условий (2.6.2) следуют неравенства

$$2x_2 \leq 1-v, \quad 2x_3 \leq 1-v, \tag{2.6.10}$$

которые в сочетании с (2.6.6) дают отношения

$$v\leq x_2+x_3 \leq 1-v, \tag{2.6.11}$$

приводящие к оценке

$$v \le \tfrac{1}{2} \qquad (2.6.12)$$

Аналогично, из (2.6.7), (2.6.8) и (2.6.2) следуют неравенства

$$2y_2 \ge 1-v, \quad 2y_3 \ge 1-v, \qquad (2.6.13)$$

которые в сочетании с (2.6.9) дают отношения

$$1-v \le y_2+y_3 \le v, \qquad (2.6.14)$$

приводящие к оценке, обратной (2.6.12). Следовательно,

$$v = \tfrac{1}{2} \qquad (2.6.15)$$

и, согласно (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.10), (2.6.11),

$$x_1=0,\; x_2=\tfrac{1}{4},\; x_3=\tfrac{1}{4},\; x_4=\tfrac{1}{2}\,. \qquad (2.6.16)$$

Аналогично, из (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.13)-(2.6.15) вытекают оценки

$$y_1=0,\; y_2=\tfrac{1}{4},\; y_3=\tfrac{1}{4},\; y_4=\tfrac{1}{2}\,. \qquad (2.6.17)$$

Таким образом, согласно оптимальным смешанным стратегиям из (2.6.16), (2.6.17), вероятность совершения действия (нарушения или проверки) в любом из двух периодов равна ¼. Соответственно, полная вероятность отказа от совершения действия равна ½.

Заметим, что с увеличением числа периодов N количество чистых стратегий каждой из сторон растет экспоненциально и определяется величиной 2^N, что неизбежно затрудняет как сведение игры к нормальной форме, так и анализ соответствующей матрицы (уже при не очень больших значениях N). При этом непосредственное рассмотрение многошагового процесса выбора, которое мы проведем ниже, оказывается более простым.

В случае, когда N=1, игре соответствует 2×2 матрица, представленная в табл. 2.12 и не имеющая седловых значений. Следовательно, эта игра имеет решение в смешанных стратегиях и, согласно (2.4.30), ей соответствует цена

$$v_1=\tfrac{1}{3}\ . \qquad (2.6.18)$$

Таблица 2.12

Случай N=1	**Инспекцию**:	
Нарушение:	Проводить	Не проводить
Совершать	–1	1
Не совершать	1	0

Теперь рассмотрим случай, когда N=2 (именно этому случаю соответствует рис. 2.12), и построим матрицу (см. табл. 2.13), описывающую выигрыши (или математические ожидания выигрышей) стороны P_1 в *первом* из *двух* периодов.

Отметим, что отказ сторон от действий в первом периоде переводит игру во второй период, характеризуемый уже рассмотренной матрицей из табл. 2.12. Поскольку, согласно (2.6.18), цена этой игры меньше, чем 1, то матрица из табл. 2.13 также не содержит седловых значений и ей соответствует цена игры

$$v_2=(1+v_1)/(3-v_1)=\tfrac{1}{2}, \qquad (2.6.19)$$

совпадающая со значением из (2.6.15).

Аналогично, для любого значения N>1 выводим, что цена игры, соответствующей выбору действия в *первый* из N периодов, определяется выражением

$$v_N=(1+v_{N-1})/(3-v_{N-1}). \qquad (2.6.20)$$

Таблица. 2.13

Случай N=2	**Инспекцию**:	
Нарушение:	Проводить	Не проводить
Совершать	-1	1
Не совершать	1	v_1

Используя подстановку

$$w_N = 1/(v_N - 1), \qquad (2.6.21)$$

выводим равенство

$$(w_N + 1)/w_N = (2w_{N-1} + 1)/(2w_{N-1} - 1),$$

приводимое к легко разрешимому разностному уравнению

$$w_N = w_{N-1} - ½ = w_1 - (N-1)/2. \qquad (2.6.22)$$

Из (2.6.18) и (2.6.21) получаем начальное значение $w_1 = -1½$, которое в сочетании с (2.6.22) дает решение

$$w_N = -(N+2)/2.$$

Отсюда, учитывая подстановку (2.6.21), выводим равенство

$$v_N = N/(N+2).$$

Таким образом, выбору действия в первый из $N > 1$ (остающихся) периодов соответствует игра с матрицей из табл. 2.14. Тогда согласно (2.4.27) и (2.4.28) оптимальные стратегии сторон P_1 и P_2 в первом из N периодов определяются рулетками вида

$$x^N = y^N = \big(1/(N+2),\ (N+1)/(N+2)\big). \qquad (2.6.23)$$

Таблица 2.14

Случай $N>1$	**Инспекцию**:	
Нарушение:	Проводить	Не проводить
Совершать	-1	1
Не совершать	1	$(N-1)/(N+1)$

Следовательно, для любой из двух сторон вероятность выбора действия в первом из N периодов равна $1/(N+2)$. Если стороны не совершали действий ни в одном из k начальных периодов ($k<N$), то вероятность совершения действия в $(k+1)$-м периоде равна

$$\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\left(\frac{N}{N+1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)\cdots\left(\frac{N-k+2}{N+3-k}\right)\left(\frac{1}{N-k+2}\right)=\frac{1}{N+2}.$$

Т.е. вероятность совершения действия одинакова во всех периодах. Тогда определяемая оптимальными рулетками (2.6.23) вероятность $p_0(N)$ того, что действие (т.е. нарушение или инспекция) вообще не будет совершено за N периодов, есть величина

$$p_0(N)=2/(N+2).$$

При этом $p_0(1)=⅔$ и $p_0(N)\to 0$ при $N\to\infty$.

Таким образом, обе схемы, использованные для анализа рассмотренного примера при $N=2$ (многошаговая схема и схема, основанная на предварительном построении нормальной модели), приводят к одним и тем же значениям вероятностей выбора действий и отказа от действий. Нетрудно заметить, что возможность успешного применения многошаговой схемы при произвольных значениях $N>1$ связана с тем, что дерево игры оказалось существенно не полным. В каждом его четном ярусе содержится ровно два узла, а в каждом нечетном — ровно один узел и три вершины (кроме первого яруса). Т.е. возможность построения рекуррентных отношений, связывающих ожидаемые выигрыши сторон на последовательных стадиях процесса принятия решений, определяется спецификой рассмотренного примера.

Замечание 2.7 (о *стратегиях поведения*). Рассмотренная схема последовательного выбора решений использует на каждом ходе некоторую рулетку, определенную не на множестве всех чистых стратегий (число которых может быть велико), а на множестве вариантов, имеющихся у этой стороны на конкретном ходе (число которых обычно не велико). Чтобы отличать рассмотренные комплекты рулеток от введенных ранее смешанных стратегий, их обычно называют ***стратегиями поведения***. Таким образом, стратегия поведения конкретной стороны сопоставляет каждому информационному множеству этой стороны вероятностное распределение, заданное на наборе альтернатив, имеющихся в этом множестве.