Глава 3
Задачи о сделках (арбитражные схемы)

3.1 Арбитражные схемы

Вернемся к рассмотрению операций, описываемых играми двух лиц с непостоянной суммой. При этом мы ограничимся классом конечных неантагонистических игр, нормальная форма которых характеризуется биматричным представлением.

Случай, когда участники такой игры действуют *независимо*[55], уже рассматривался во второй главе. При этом, в частности, было установлено, что единственное устойчивое решение 2×2 неантагонистической биматричной игры (если оно достигается в смешанных стратегиях) оказывается не эффективным в силу характера поведения игроков в этом (единственном) устойчивом решении. Этот эффект «антагонизма поведения без антагонизма интересов» был подробно обсужден на стр. 143.

С другой стороны, в том же классе задач возможны ситуации существования нескольких устойчивых решений, часть которых оказываются эффективными. При этом возникают проблемы выбора конкретного решения, связанные с тем, что ситуации равновесия, более выгодные для одной стороны, оказываются менее

---

[55] Такое поведение, называемое также *некооперативным* или *бескоалиционным*, может являться следствием условий операции, например, следствием существования антитрестовского законодательства и т.п.

выгодными для другой стороны. Если же стороны выберут действия, соответствующие разным состояниям равновесия, то результат такого *несогласованного выбора* может не обладать свойствами поведения в равновесии (см. обсуждение задачи строительства с долевым участием на стр. 144).

Таким образом, в случае не противоположных интересов сторон, достижение устойчивых и одновременно эффективных решений требует организации соответствующего взаимодействия участников операции. Практика выработала ряд механизмов такого *кооперативного поведения*, ядром которых является принятие сторонами некоторого *соглашения* о совместных действиях. Модели таких операций обычно называют кооперативными играми.

К числу ключевых вопросов организации кооперативного поведения, стимулируемого стремлением к достижению ситуаций, оптимальных по Парето, относится обеспечение гарантий выполнения принятых соглашений всеми участвующими сторонами. Одним из путей создания таких гарантий является введение некоторого контролирующего органа, которому подчиняются все игроки. Типичным учреждением такого рода является *арбитраж*[56] (или третейский суд). Модели кооперативного поведения, учитывающие существование системы стабилизации соглашений, основанной на арбитраже, называются ***арбитражными схемами***.

Юридические и технические аспекты организации арбитража выходят за рамки этой книги. Для целей проводимого рассмотрения существенно лишь то, что система арбитража обеспечивает устойчивость соглашений сторон. В связи с этим в центре рассмотрения оказывается исследование характера *сделок* (договоров), совершаемых сторонами и подпадающих под юрисдик-

---

[56] *Арбитраж* — способ разрешения споров (главным образом имущественного характера), при котором стороны обращаются к *арбитрам* (посредникам), избираемым самими сторонами или назначаемым по их соглашению либо в порядке, установленном законом.

цию арбитража. Предлагаемые ниже модели не содержат описаний самого процесса переговоров сторон, могущего включать торг, блеф и другие психологические маневры. Цель проводимого моделирования заключается в предсказании той сделки, на которую согласятся стороны, руководствующиеся некоторыми достаточно естественными принципами. В связи с этим арбитражные схемы называют также ***задачами о сделках***.

3.2 Сделки без побочных платежей

Множество допустимых сделок

Примем, что стороны P_1 и P_2, интересы которых описываются $m{\times}n$ матрицами A и B с коэффициентами a_{ij} и b_{ij}, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, могут вступать в кооперацию, допускающую совместный выбор стратегий.

Замечание 3.1 (о *трансферабельности полезностей* и *побочных платежах*). Построение модели операции в нормальной форме, проведенное в первой главе, включало описание интересов сторон с помощью вещественных функций, сопоставляющих исходам операции некоторые числовые значения, которые мы интерпретировали как полезность этих исходов (см. определение на стр. 15). Введение такого представления о полезности позволило охарактеризовать целенаправленное поведение участников операции как их стремление к максимизации соответствующих вещественных функций.

Далее, рассматривая антагонистические взаимодействия (см. замечание на стр. 26), мы приняли, что полезности исходов для одной стороны противоположны (по знаку) полезностям этих же исходов для другой стороны. Однако для задач с не противоположными интересами вопрос о соотнесении полезностей сторон не рассматривался, поскольку их независимое поведение не требовало такого сопоставления. Допущение кооперации участников операции ставит новый вопрос о том, может ли одна сторона оплатить сотрудничество другой стороны, используя для этого часть своего выигрыша. Такая оплата (если она возможна) называется ***побочным платежом***.

Сама возможность таких платежей предполагает, что выигрыш одной стороны представляет интерес для другой стороны. Но это не всегда имеет место. Например, вопросы престижа могут сделать выигрыш ценным для одной стороны, но практически ничего не стоящим для другой стороны. Конкретная физическая форма выигрыша (например, здания, сооружения, транспортные системы, сельскохозяйственные угодья и т.п.) также может представлять интерес для одной стороны и не представлять такого интереса для другой стороны в силу различий характера их экономической деятельности.

Классический подход к решению этой проблемы обмена полезностями состоит во введении специального товара, полезность которого была бы линейна (т.е. полезность некоторого его количества прямо пропорциональна этому количеству) и который мог бы выступать как средство обмена (во многих ситуациях указанную функцию могут выполнять деньги). В этом случае побочные платежи могли бы выражаться в единицах такого товара.

Мы ограничимся случаем, когда функции выигрышей сторон можно интерпретировать как *линейно трансферабельные* полезности. При этом передача части полезности от одного игрока к другому не изменяет их общей (суммарной) полезности.

Заметим, что и при линейно трансферабельных полезностях побочные платежи могут оказаться нереализуемыми, что может быть как следствием недробимости выигрышей, так и следствием существующего правового регулирования отношений. В связи с этим мы сначала рассмотрим кооперацию без побочных платежей, а затем исследуем взаимодействия с побочными платежами.

Для целей дальнейшего рассмотрения удобно представлять пару (a_{ij}, b_{ij}), соответствующую согласованному использованию сторонами P_1 и P_2 чистых стратегий i и j, как точку на плоскости. При этом условимся, что абсцисса (u) соответствует выигрышам (полезностям) стороны P_1, а ордината (v) — выигрышам стороны

P_2. Множество всех таких точек, соответствующих конкретной задаче (т.е. конкретным матрицам A и B), обозначим символом R:

$$R = \{(a_{ij}, b_{ij}):\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}. \qquad (3.2.1)$$

В качестве иллюстрации на рис. 3.1 изображены (темными кружками) точки множества R, соответствующего задаче выбора пункта для строительства с долевым участием, матрицы которой содержатся в табл. 2.8 (см. стр. 144). При этом для каждой точки указаны пары стратегий, совместная реализация которых обеспечивает выигрыши сторон, представленные этой точкой.

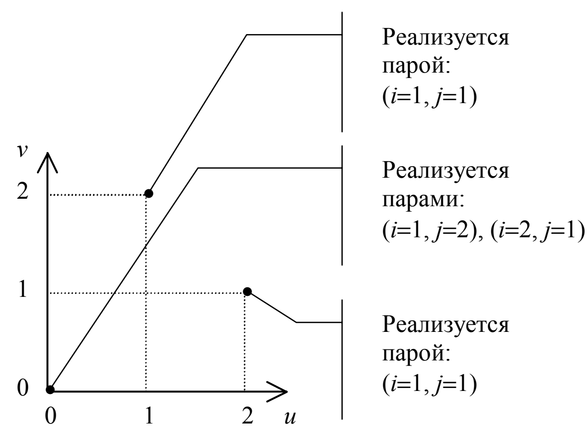

Рис. 3.1

Как уже обсуждалось выше, варианты, представленные на рис. 3.1, имеют разную привлекательность для сторон P_1 и P_2. Поэтому для создания условий кооперации (без побочных платежей) важно расширить множество возможных вариантов. Такое расширение оказывается возможным, например, для повторяющихся сделок, когда соглашения сторон могут относиться не к отдельному акту выбора, а к поведению во всей серии подобных сделок. В этом случае объектом договоренности может быть принятие смешанной стратегии

$$p = (p_{11}, \ldots, p_{mn}) \in S_{m \times n}\ , \tag{3.2.2}$$

определяющей *согласованные сторонами* вероятности p_{ij} совместного выбора пар чистых стратегий (i, j). При этом выбор конкретной стратегии p из (3.2.2) обеспечивает сторонам P_1 и P_2 математические ожидания выигрыша, определяемые (соответственно) выражениями:

$$\mu_1(p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_{ij} \tag{3.2.3}$$

и

$$\mu_2(p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_{ij}\ . \tag{3.2.4}$$

В качестве иллюстрации вернемся к примеру, представленному на рис. 3.1, и рассмотрим согласованную смешанную стратегию сторон P_1 и P_2 вида

$$p^* = (½,0,0,½) \in S_4\ , \tag{3.2.5}$$

«смешивающую» пары чистых стратегий (i=1, j=1) и (i=2, j=2) с равными вероятностями. Как следует из (3.2.3)-(3.2.5), соответствующая этой смешанной стратегии пара математических ожиданий

$$u = \mu_1(p^*) = 1½, \quad v = \mu_2(p^*) = 1½\ ,$$

отмеченная темным прямоугольником на рис. 3.2, могла бы быть основой согласия сторон.

Заметим, что согласно (3.2.3) и (3.2.4), каждая пара $(\mu_1(p), \mu_2(p))$ есть выпуклая линейная комбинация точек множества R из (3.2.1) с весами p_{ij} , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Следовательно, множество

$$S = \{(\mu_1(p), \mu_2(p)):\ p \in S_{m \times n}\} \tag{3.2.6}$$

всех пар математических ожиданий, достижимых сторонами P_1 и P_2 путем выбора соответствующих рулеток p из (3.2.2), является выпуклой оболочкой множества R из (3.2.1).

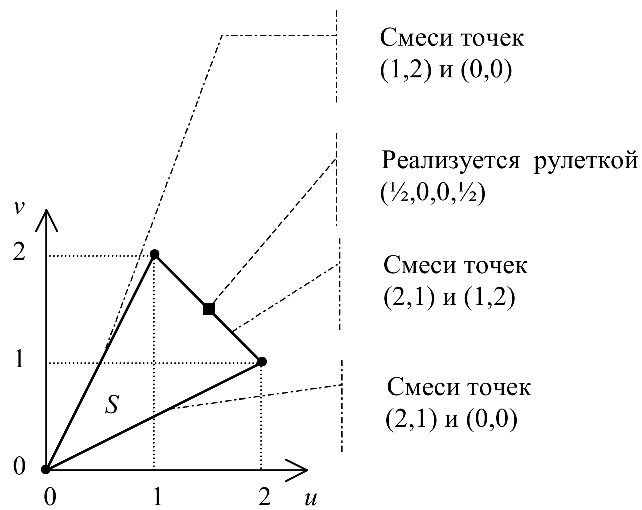

Рис. 3.2

В силу конечности множества R его выпуклая оболочка S представляет собой наименьший плоский многоугольник, включающий все точки из R (см. треугольник, являющийся образом множество S в примере, представленном на рис. 3.2). При этом вершинами такого многоугольника могут быть лишь точки из R (причем не обязательно все точки из R).

В связи с отмеченной выше реализуемостью любой пары ожидаемых выигрышей (u, v) из множества S (обеспечиваемой согласованным выбором сторонами P_1 и P_2 соответствующей рулетки) его называют ***допустимым множеством***.

Принципы формирования сделки (аксиомы Нэша)

Перейдем к обсуждению условий, определяющих выбор сторонами конкретного варианта сделки (u, v) из множества S (или выбор рулетки p из (3.2.2), порождающей этот вариант). Конкретные условия, которые мы рассмотрим, были предложены Дж.Нэшем (см. сноску на стр. 37). В связи с этим их обычно называют *аксиомами Нэша*.

При всей специфике взаимодействий участников конкретной операции, согласующих взаимоприемлемый вариант сделки, можно выделить некоторые общие моменты обычно присущие таким взаимодействиям. Согласно Нэшу они состоят в следующем.

Участник P_1 своими односторонними действиями (т.е. без кооперации с участником P_2) может гарантировать себе математическое ожидание выигрыша равное величине

$$u^* = M_1(x^*, y') = \max_x \min_y M_1(x, y), \qquad (3.2.7)$$

где $M_1(x, y)$ из (2.4.36), (2.4.37), а $x \in S_m$ и $y \in S_n$ есть смешанные стратегии, независимо используемые сторонами. Т.е. при оценке гарантированного уровня мы исходим из того, что сторона P_2 может вести себя как противник стороны P_1 в антагонистической игре с матрицей A, характеризующей интересы P_1. При таком поведении стороны P_2 ее ожидаемый выигрыш есть величина

$$v' = M_2(x^*, y'). \qquad (3.2.8)$$

При этом пара (u^*, v') принадлежит множеству S, поскольку рулетка p из (3.2.2), имеющая компоненты

$$p_{ij} = x^*_i \, y'_j\,, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,$$

обеспечивает выполнение равенств

$$\mu_1(p) = u^*, \quad \mu_2(p) = v';$$

ср. (2.4.36) и (3.2.3), (3.2.4). Кроме того, согласно (3.2.7),

$$u^* = \min\{M_1(x^*, y)\colon y \in S_n\} \le M_1(x^*, y^*). \qquad (3.2.9)$$

Аналогично сторона P_2 (также своими односторонними действиями) может гарантировать себе ожидаемый выигрыш

$$v^* = M_2(x', y^*) = \max_y \min_x M_2(x, y). \qquad (3.2.10)$$

При этом

$$u' = M_2(x', y^*), \qquad (3.2.11)$$

$$v^* = \min\{M_2(x, y^*): x \in S_m\} \le M_2(x^*, y^*), \qquad (3.2.12)$$

и $(u', v^*) \in S$ поскольку рулетка с компонентами

$$q_{ij} = x'_i y^*_j, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n,$$

обеспечивает выполнение равенств

$$\mu_1(q) = u', \quad \mu_2(q) = v^*.$$

Далее, рулетка p^* с компонентами

$$p^*_{ij} = x^*_i y^*_j, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n, \qquad (3.2.13)$$

также порождает допустимую точку

$$(\mu_1(p^*), \mu_2(p^*)) = (M_1(x^*, y^*), M_2(x^*, y^*)) \in S, \qquad (3.2.14)$$

которая, согласно (3.2.9), (3.2.12), доминирует пару (u^*, v^*). Заметим, что эта последняя пара может и не быть допустимой.

Таким образом, в допустимом множестве S всегда есть вариант сделки превосходящий (возможно не строго) пару гарантированных уровней (u^*, v^*), что и является основанием, определяющим интерес сторон к кооперации. Следующий пример иллюстрирует отношения всех рассмотренных пар выигрышей.

Пример 3.1. Рассмотрим 2×3 биматричную игру с матрицами из табл. 3.1. Допустимое множество S для этого примера построено на рис. 3.3 как многоугольник. Вершины этого многоугольника принадлежат множеству (3.2.1), соответствующему матрицам из табл. 3.1. Точки, соответствующие вершинам многоугольника S, отмечены на рисунке темными кружками.

Таблица 3.1

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 2 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

Согласно (3.2.7), (3.2.8) и (3.2.10), (3.2.11) рассматриваемый пример характеризуется значениями[57]

$$u^* = 0, \quad v' = 4, \quad v^* = 8{,}4, \quad u' = 8{,}76$$

и рулетками

$$x^* = (1,0), \quad y' = (1,0,0), \quad y^* = (0;0{,}6;0{,}4), \quad x' = (0{,}7;0{,}3).$$

При этом $(u^*, v^*) \notin S$, а точка (9,6;8,4) из (3.2.14), соответствующая рулетке p^* из (3.2.13), принадлежит границе допустимого множества.

Первое предположение Нэша состоит в том, что стороны P_1 и P_2 будут согласовывать лишь сделки (u°, v°), удовлетворяющие неравенствам

$$u^\circ \geq u^*, \quad v^\circ \geq v^* .$$

Это естественное допущение, которое мы будем записывать также в векторной форме

---

[57] Заметим, что матрица A содержит седловое значение, а в матрице B второй столбец доминирует первый и, следовательно, получение оценок для второго игрока сводится к анализу 2×2 матрицы.

$$(u^\circ,\ v^\circ) \geq (u^*,\ v^*), \qquad (3.2.15)$$

получило название *аксиомы индивидуальной рациональности*. При этом принимается и другое естественное условие, что стороны согласуют лишь допустимые сделки (*аксиома допустимости*), т.е.

$$(u^\circ,\ v^\circ) \in S\,. \qquad (3.2.16)$$

Как мы уже установили, сделки, отвечающие условиям (3.2.15), (3.2.16), заведомо существуют.

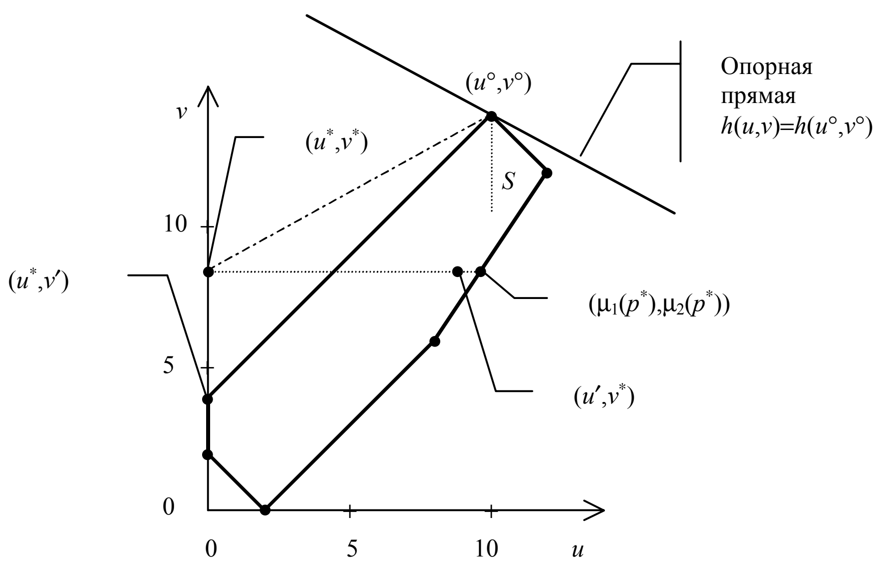

Рис. 3.3

Следующее условие (*аксиома неулучшаемости* или оптимальности по Парето), введенное Нэшем, отражает то обстоятельство, что обе стороны проявят готовность рассматривать варианты повышающие выигрыш каждой из них. Поэтому сделка, принимаемая окончательно, должна быть уже не улучшаема (см. определение на стр. 37). Мы будем записывать это условие в следующей форме

$$(\forall(u, v)\in S)\ \ (u, v)\geq(u^\circ, v^\circ)\rightarrow(u, v)=(u^\circ, v^\circ), \qquad (3.2.17)$$

которая аналогична записи (1.3.19).

Формулировки двух следующих условий Нэша предполагают, что сделка (u°, v°), согласуемая сторонами, может быть определена как некоторая функция

$$(u^\circ, v^\circ)=\varphi(S, u^*, v^*). \qquad (3.2.18)$$

Т.е. выдвигаемые принципы поведения сторон при согласовании сделки могут быть отражены в операторе φ, аргументами которого являются допустимое множество S и выигрыши u^*, v^*, гарантируемые односторонними действиями соответственно P_1 и P_2. Предположение (3.2.18) фактически означает, что оператор φ (ниже мы установим его существование) является *моделью формирования сделки*. Заметим также, что излагаемая ниже теория справедлива для любого выпуклого, ограниченного и замкнутого множества S и пары уровней u^*, v^* доминируемых какой-либо точкой из S. Т.е. величины S и u^*, v^* соответственно из (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.12), связанные с некоторой $m\times n$ биматричной игрой, можно интерпретировать как (основной в нашем рассмотрении) частный случай.

Теперь введем четвертое условие Нэша, утверждающее, что согласованная сторонами сделка (u°, v°) сохраняется при усечении исходного множества S до некоторого подмножества $T\subset S$, включающего эту сделку. Эту *аксиому независимости от посторонних альтернатив* можно записать в следующем виде:

$$[(u^\circ, v^\circ)\in\ T\subset S]\&[(u^\circ, v^\circ)=\varphi(S, u^*, v^*)]\rightarrow \\ (u^\circ, v^\circ)=\varphi(T, u^*, v^*). \qquad (3.2.19)$$

Сформулируем пятое условие, называемое *аксиомой независимости от линейного преобразования*. Введем линейное преобразование шкал полезностей сторон вида:

$$\tilde{u} = \alpha u + a, \quad \tilde{v} = \beta v + b, \tag{3.2.20}$$

переводящее множество S в некоторое множество T. Пятая аксиома утверждает справедливость следующего следствия:

$$(u^\circ, v^\circ) = \varphi(S, u^*, v^*) \to \tag{3.2.21}$$
$$(\alpha u^\circ + a, \beta v^\circ + b) = \varphi(T, \beta u^* + a, \beta v^* + b).$$

Т.е. при линейном изменении шкал полезностей согласованная сделка просто пересчитывается в соответствии с новой шкалой, сохраняя свою приемлемость для обеих сторон. Следует, однако, заметить, что при значительных изменениях масштабов выигрышей могут меняться сами принципы поведения людей (и в том числе их отношение к нравственным и другим запретам). Поэтому аксиома (3.2.21) может оказаться реалистичной лишь при не очень больших изменениях масштабов.

Последнее условие (*аксиома симметрии*) имеет вид следствия:

$$[u^* = v^*] \& [(u, v) \in S \leftrightarrow (v, u) \in S\,] \to u^\circ = v^\circ. \tag{3.2.22}$$

Т.е. аксиома относится к случаю, когда допустимое множество S симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла на плоскости(v, u), а выигрыши u^*, v^*, гарантируемые односторонними действиями игроков P_1 и P_2, совпадают по величине. Пример такого случая представлен на рис. 3.2 (см. стр. 178). Предполагается, что в такой задаче полезности, достигаемые сторонами в согласованной сделке (u°, v°), должны совпадать. Можно интерпретировать это предположение как признание невозможности увеличения своего выигрыша по сравнению с выигрышем партнера, если ресурсы сторон, отражаемые симметричным множеством S и совпадающими гарантированными уровнями u^*, v^*, являются в некотором роде одинаковыми. Разумеется, что эти три аргумента оператора φ из (3.2.18) не описывают всех (могущих встретиться в практике переговоров) аспектов взаимоотношений сторон при согласовании сделки. Поэтому условие (3.2.22) можно интерпретировать и как некоторое нормативное определение справедливости.

Замечание 3.2 (о *дележах*). Любая допустимая, индивидуально рациональная сделка, удовлетворяющая условию (3.2.17), может рассматриваться как некоторое (не улучшаемое одновременно для обеих сторон) распределение полезности в исходе операции. Поэтому сделки, удовлетворяющие условиям (3.2.15)-(3.2.17), называют ***дележами***.

Дележ, отвечающий аксиомам Нэша

Теорема 3.1. *Существует единственная функция* φ *из* (3.2.18), *определенная для всех задач о сделках, задаваемых тройками* (S, u^*, v^*) *и удовлетворяющих аксиомам* (3.2.15)-(3.2.17), (3.2.19),(3.2.21),(3.2.22). *При этом предполагается, что хотя бы для одной пары* (u, v) *из замкнутого, ограниченного и выпуклого множества* S, *входящего в определение задачи, справедливо (может быть не строгое) доминирование*

$$(u, v)\geq (u^*, v^*). \qquad (3.2.23)$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 3.1. *Если множество* S *содержит точку* (u, v) *такую, что*

$$u> u^*, \quad v> v^*, \qquad (3.2.24)$$

т.е. если доминирование (3.2.23) *является строгим, то функция*

$$g(u, v)=(u-u^*)(v-v^*) \qquad (3.2.25)$$

достигает максимума на множестве

$$S_0=\{(u, v)\in S\colon u\geq u^*\} \qquad (3.2.26)$$

в единственной точке (u°, v°).

Доказательство. Поскольку функция (3.2.25) является непрерывной, а непустое множество (3.2.26) — ограниченным и замкнутым, то существует максимум

$$g(u^\circ, v^\circ)=\max\{g(u, v): (u, v)\in S_0\}>0. \qquad (3.2.27)$$

Правое неравенство в (3.2.27) является следствием условий (3.2.24) и определений (3.2.25), (3.2.26).

Допустим, что существует еще одна точка (u', v'), максимизирующая функцию g на S_0. Тогда

$$(u'-u^*)(v'-v^*)=(u^\circ-u^*)(v^\circ-v^*), \qquad (3.2.28)$$

откуда, учитывая (3.2.24), получаем отношение:

$$(u^\circ-u^*)/(u'-u^*)=(v'-v^*)/(v^\circ-v^*).$$

Поскольку точки (u°, v°) и (u', v') являются (по предположению) различными, то из (3.2.28) вытекают следствия:

$$\begin{aligned} u'< u^\circ &\rightarrow v'> v^\circ, \\ u'> u^\circ &\rightarrow v'< v^\circ. \end{aligned} \qquad (3.2.29)$$

Из выпуклости множества S_0 следует справедливость включения

$$(\tilde{u}, \tilde{v})=(\tfrac{1}{2}(u'+u^\circ), \tfrac{1}{2}(v'+v^\circ))\in S_0.$$

Покажем, что для точки $(\tilde{u}, \tilde{v})$ имеет место неравенство

$$g(\tilde{u}, \tilde{v})> g(u^\circ, v^\circ), \qquad (3.2.30)$$

противоречащее определению точки (u°, v°) из (3.2.27), что доказывает единственность точки максимума функции g. Действительно,

$$g(\tilde{u}, \tilde{v})=\tfrac{1}{4}[(u'-u^*)+(u^\circ-u^*)][(v'-v^*)+(v^\circ-v^*)]=$$
$$=\tfrac{1}{2}(u'-u^*)(v'-v^*)+\tfrac{1}{2}(u^\circ-u^*)(v^\circ-v^*)+\tfrac{1}{4}(u^\circ-u')(v'-v^\circ),$$

откуда, согласно (3.2.28) и (3.2.29), следует справедливость утверждения (3.2.30), противоречащего (3.2.27). ■

В дальнейшем мы покажем, что условия (3.2.27) определяют функцию φ из (3.2.18) и опишем графический прием для определения аргумента (u°, v°) из левой части (3.2.27).

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия* (3.2.24) *и точка* (u°, v°) *удовлетворяет определению* (3.2.27). *Тогда множество* S *лежит под прямой линией, определяемой уравнением*:

$$h(u, v)=h(u^\circ, v^\circ), \qquad (3.2.31)$$

$$h(u, v)= (v^\circ-v^*)u+(u^\circ-u^*)v, \qquad (3.2.32)$$

и касающейся множества S *в точке* (u°, v°), *т.е.*

$$(\forall(u, v)\in S)\ \ h(u, v)\le h(u^\circ, v^\circ).$$

Доказательство. Допустим, что прямая (3.2.31) не является опорной для множества S в точке (u°, v°). Тогда существует такая точка $(u', v')\in S$, что

$$h(u', v')> h(u^\circ, v^\circ). \qquad (3.2.33)$$

Построим выпуклую линейную комбинацию

$$(\tilde{u}, \tilde{v})= \varepsilon(u', v')+(1-\varepsilon)(u^\circ, v^\circ), \quad 0\le \varepsilon\le 1,$$

которая принадлежит множеству S в силу его выпуклости. Поскольку $(\tilde{u}, \tilde{v})\to(u^\circ, v^\circ)$ при $\varepsilon\to 0$ и, согласно правому неравенству в (3.2.27), $u^\circ> u^*$, то при достаточно малых значениях $\varepsilon>0$ справедливо включение $(\tilde{u}, \tilde{v})\in S_0$.

Теперь покажем, что при достаточно малых значениях $\varepsilon>0$ имеет место неравенство $g(\tilde{u}, \tilde{v}) > g(u^\circ, v^\circ)$, противоречащее определению (3.2.27). Действительно,

$$g(\tilde{u}, \tilde{v})=[u^\circ+\varepsilon(u'-u^\circ)-u^*][v^\circ+\varepsilon(v'-v^\circ)-v^*]=$$
$$=(u^\circ-u^*)(v^\circ-v^*)+\varepsilon^2(u'-u^\circ)(v'-v^\circ)+\varepsilon[(v^\circ-v^*)(u'-u^\circ)+(u^\circ-u^*)(v'-v^\circ)],$$

где, согласно (3.2.33), коэффициент при ε является положительным, а член, содержащий ε^2, — пренебрежимо малым при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, прямая линия (3.2.31) является опорной к множеству S в точке (u°, v°). ■

Замечание 3.3 (о графическом определении точки (u°, v°), доставляющей максимум функции g). Согласно (3.2.31), (3.2.32), уравнение опорной прямой можно представить в виде:

$$v= v^\circ-K(u-u^\circ), \quad K=(v^\circ-v^*)/(u^\circ-u^*). \tag{3.2.34}$$

При этом уравнение прямой

$$v= v^*+K(u-u^*), \tag{3.2.35}$$

проходящей через точки (u^*, v^*) и (u°, v°), характеризуется тем же коэффициентом K, что и в (3.2.34). Таким образом, прямые линии (3.2.34) и (3.2.35) пересекаются в точке (u°, v°). Кроме того, они образуют равные (по абсолютной величине) и противоположные (по знаку) углы с вертикалью, опущенной из этой точки (в качестве иллюстрации см. рис. 3.3). Отмеченное соотношение углов может быть использовано для графического определения точки (u°, v°), соответствующей задаче (S, u^*,v^*).

Лемма 3.3. *При выполнении условий* (3.2.24) *точка* (u°, v°) *из* (3.2.27) *удовлетворяет всем аксиомам Нэша.*

Доказательство. Выполнение условий (3.2.15) и (3.2.16) является следствием определения (3.2.27). Допустим, что в множестве S существует точка (u', v'), доминирующая (т.е. улучшающая) *отличную от нее* точку (u°, v°). Тогда должно выполняться неравенство:

$$g(u', v')=(u'-u^*)(v'-v^*)>(u^\circ-u^*)(v^\circ-v^*)= g(u^\circ, v^\circ),$$

противоречащее определению (3.2.27). Заметим, что из сделанного допущения $(u', v')\geq(u^\circ, v^\circ)$ вытекает включение $(u', v')\in S_0$. Т.е. аксиома (3.2.17) также должна выполняться.

Если $(u^\circ, v^\circ)\in T\subset S$, то максимум функции $g(u, v)$ на множестве $T\cap S_0$ достигается в той же точке, что и на множестве S_0. Т.е. пара (u°, v°) из определения (3.2.27) удовлетворяет условию (3.2.19).

Проверим выполнение пятой аксиомы. Согласно (3.2.20) и (3.2.25),

$$g(\tilde{u}, \tilde{v})= \alpha\beta g(u, v). \qquad (3.2.36)$$

Теперь из (3.2.27) и (3.2.36) вытекает, что

$$(\forall(\tilde{u}, \tilde{v})\in T_0)\;\; g(\tilde{u}^\circ, \tilde{v}^\circ)=\alpha\beta\, g(u^\circ, v^\circ)\geq \alpha\beta g(u, v)= g(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

где T_0 есть образ S_0 при соответствии (3.2.20). Следовательно,

$$g(\tilde{u}^\circ, \tilde{v}^\circ)=\max\{g(\tilde{u}, \tilde{v}): (\tilde{u}, \tilde{v})\in T_0\}$$

и справедливость (3.2.21) установлена.

Пусть множество S симметрично, т.е. из включения $(u, v)\in S$ следует включение $(v, u)\in S$, и пусть $u^*=v^*$. Тогда

$$(u^\circ, v^\circ)\in S\rightarrow (v^\circ, u^\circ)\in S$$

и

$$g(u^\circ, v^\circ)=(u^\circ-u^*)(v^\circ-v^*)=(v^\circ-u^*)(u^\circ-v^*)= g(v^\circ, u^\circ).$$

Теперь из *единственности* точки максимума вытекают следствия

$$(u^\circ, v^\circ)=(v^\circ, u^\circ) \to u^\circ = v^\circ,$$

доказывающие справедливость аксиомы (3.2.22). ■

Лемма 3.4. *При выполнении условий* (3.2.24) *точка* (u°, v°) *из* (3.2.27) *есть единственная сделка, удовлетворяющая аксиомам Нэша.*

Доказательство. Определим множество

$$W=\{(u, v)\in R^2: h(u, v)\le h(u^\circ, v^\circ)\},$$

лежащее под опорной к нему прямой (3.2.31) и содержащее допустимое множество S (см. рис. 3.4). Введем линейное преобразование

$$\tilde{u}=(u-u^*)/(u^\circ-u^*), \quad \tilde{v}=(v-v^*)/(v^\circ-v^*) \qquad (3.2.37)$$

и определим множество T, являющееся образом W относительно преобразования (3.2.37).

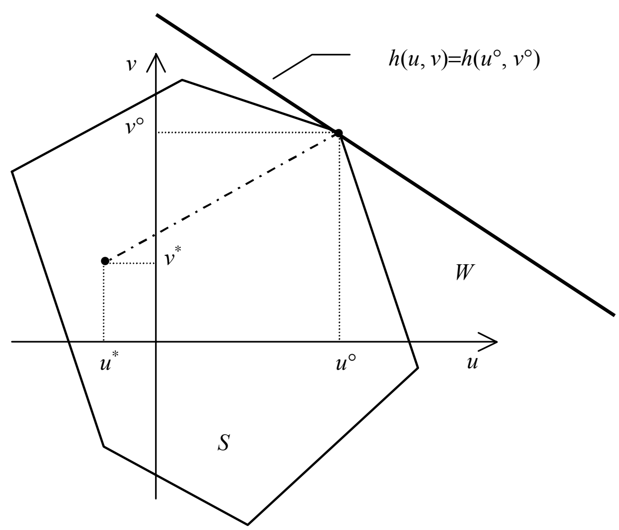

Рис. 3.4

Из (3.2.32) и определения W выводим неравенство

$$(v^\circ - v^*)(u - u^\circ) + (u^\circ - u^*)(v - v^\circ) \le 0,$$

которое после использования обратного (3.2.37) отображения

$$u = (u^\circ - u^*)\tilde{u} + u^*, \quad v = (v^\circ - v^*)\tilde{v} + v^* \tag{3.2.38}$$

дает определение

$$T = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \colon \tilde{u} + \tilde{v} \le 2\}. \tag{3.2.39}$$

При этом, согласно (3.2.37), $\tilde{u}^* = 0$, $\tilde{v}^* = 0$.

Таким образом, линейное преобразование (3.2.37) переводит задачу (W, u^*, v^*) в задачу $(T, 0, 0)$, удовлетворяющую условиям аксиомы симметрии. Простота этой задачи позволяет найти отвечающую ей сделку, руководствуясь непосредственно аксиомами Нэша. Требования рациональности, допустимости, не улучшаемости и вытекающее из шестой аксиомы условие $\tilde{u}^\circ = \tilde{v}^\circ$ удовлетворяются в единственной точке

$$(\tilde{u}^\circ, \tilde{v}^\circ) = (1, 1) \in T, \tag{3.2.40}$$

лежащей на границе множества T (см. рис. 3.5).

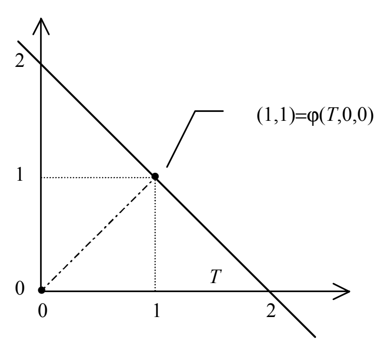

Рис. 3.5

Отображая точку (3.2.40) на плоскость (u, v) в соответствии с преобразованием (3.2.38) и принимая во внимание пятую аксиому, получаем, что пара (u°, v°) есть единственная отвечающая аксиомам сделка в задаче (W, u^*, v^*). Наконец, учитывая включения $(u^\circ, v^\circ)\in S\subset W$ и четвертую аксиому, выводим, что пара (u°, v°) есть единственная удовлетворяющая аксиомам сделка в исходной задаче (S, u^*, v^*). Таким образом, единственная удовлетворяющая аксиомам сделка совпадает с точкой из определения (3.2.27). ■

Завершение доказательства теоремы. Остается рассмотреть случаи, когда не выполняются предположения (3.2.24). При этом возможны следующие три ситуации:

$$(\exists(u, v)\in S)\ \ u>u^*,\ \ v=v^*, \tag{3.2.41}$$

$$(\exists(u, v)\in S)\ \ u=u^*,\ \ v>v^*, \tag{3.2.42}$$

$$(\forall(u, v)\in S)\ \ u\le u^*,\ \ v\le v^*. \tag{3.2.43}$$

Заметим, что ситуации (3.2.41) и (3.2.42) не могут иметь место одновременно. Допущение такой возможности ведет (в силу выпуклости множества S) к выполнимости условий (3.2.24) для всех внутренних точек отрезка, соединяющего две произвольные точки из (3.2.41) и (3.2.42).

Рассмотрим случай (3.2.41) (случай (3.2.42) рассматривается аналогично). Решение для таких задач определяется оператором φ вида:

$$u^\circ=\max\{u\colon (u, v)\in S_0,\ v=v^*\},\quad v^\circ=v^*. \tag{3.2.44}$$

рис. 3.6 иллюстрирует такой случай, заведомо не удовлетворяющий условиям симметрии из шестой аксиомы.

Решение (3.2.44) допустимо, рационально и не улучшаемо (для обеих сторон). Заметим также, что оно является единственным решением, удовлетворяющим первым трем аксиомам. Кроме того, правило (3.2.44) определяет пару (u°, v°) как решение задачи (T, u^*, v^*), если $(u^\circ, v^\circ)\in T\subset S$. Т.е. четвертая аксиома также выполняется.

Любые преобразования вида (3.2.20) переводят горизонтальный участок границы множества S, лежащий на прямой $u=v^*$, в горизонтальный участок границы множества T, лежащий на прямой $\tilde{v}=\beta v^*+b$. Следовательно, правило (3.2.44) даст для задачи $(T, \tilde{u}^*, \tilde{v}^*)$ дележ $(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)$, согласующийся с пятой аксиомой.

В случае (3.2.43), когда кооперация не может улучшить выигрыши сторон, положим $(u^\circ, v^\circ)=(u^*, v^*)$. Соответствие такого решения аксиомам Нэша легко проверяемо. ■

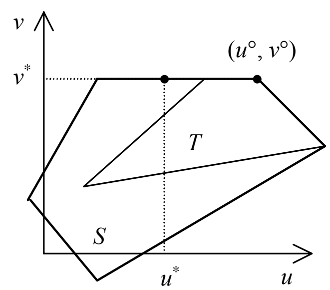

Рис. 3.6

Вернемся к рассмотренным выше примерам. Дележ $(u^\circ, v^\circ)=(10{,}14)$, изображенный темным кружком в верхней части рис. 3.3, получен с помощью графического построения. Построение выполнено в соответствии с приемом, описанным на стр. 188. Этот дележ реализуется путем согласованного использования обеими сторонами пары чистых стратегий $i=2, j=2$ (см. табл. 3.1).

Допустимое множество S для рассмотренной на стр. 94 задачи об ограничениях при ловле рыбы, представлено на рис. 3.7. Согласно (3.2.7)-(3.2.14), для (содержащих седловые значения) матриц этой задачи справедливы оценки:

$$(u^*, v^*)=(u^*, v')=(u', v^*)=(\mu_1(p^*),\mu_2(p^*))=(6{,}6).$$

Имеющее место совпадение всех указанных точек отражает то обстоятельство, что пара выигрышей (u^*, v^*) соответствует единственному в этой задаче устойчивому решению, реализуемому в чистых стратегиях при *независимом* поведении сторон.

Решение $(u^\circ, v^\circ)=(10,10)$, оцененное графическим способом (см. рис. 3.7), существенно превосходит выигрыши, достижимые односторонними действиями участников. Таким образом, введение (по взаимному согласию сторон) системы контроля за соблюдением соглашения (например, путем организации проверок в местах лова рыбы) могло бы повысить их доходы (и дать средства для содержания инспекторов).

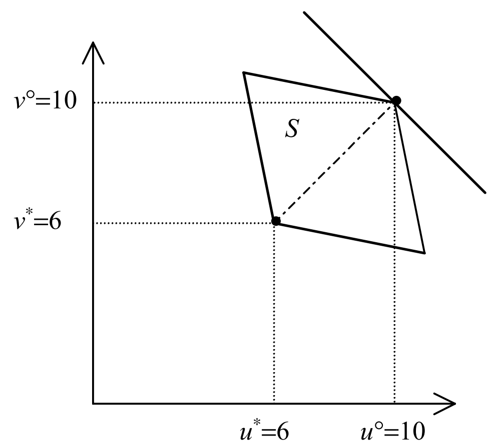

Рис. 3.7

Допустимое множество для задачи о строительстве с долевым участием (см. стр. 144) уже рассматривалось (см. рис. 3.2). Этому примеру соответствуют оценки:

$$x^*=y'=(1/3,2/3), \quad y^*=x'=(2/3,1/3),$$

$$(u^*, v^*)=(\mu_1(p^*),\mu_2(p^*))=(2/3,2/3).$$

Заметим, что указанная выше пара смешанных стратегий x^* и y^* не является равновесным решением задачи при независимом поведении сторон (см. табл. 2.9). Поэтому пары (u^*, v^*) и

$$(u^*, v')=(2/3,1), \qquad (u', v^*)=(1,2/3)$$

являются различными (см. рис. 3.8). Сделка, отвечающая аксиомам Нэша, соответствует точке $(u^\circ, v^\circ)=(1\tfrac{1}{2},1\tfrac{1}{2})$, реализуемой уже обсуждавшейся рулеткой (3.2.5).

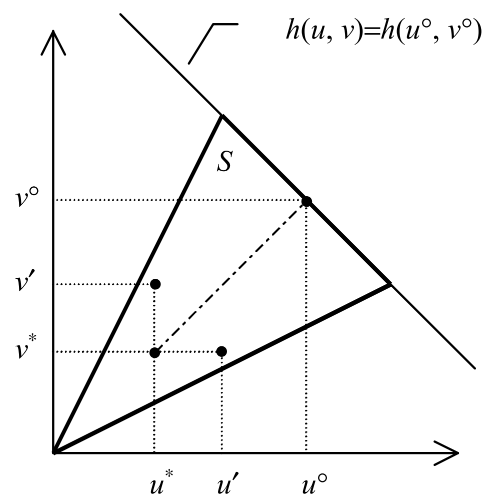

Рис. 3.8

3.3 Сделки с побочными платежами

Согласно сделанному выше предположению (см. замечание на стр. 174), функции выигрышей сторон можно интерпретировать как линейно трансферабельные полезности. Однако в предшествующем рассмотрении (при определении допустимого множества S из (3.2.6)) было введено ограничение, запрещавшее обмен полезностями между сторонами. Теперь мы рассмотрим случай, когда такого ограничения нет. При этом передача полезности от одного игрока к другому не изменяет их суммарной полезности.

Допустимость обмена полезностями расширяет круг возможных договоренностей игроков, поскольку становятся реализуемыми сделки $(u, v) \notin S$, если они удовлетворяют условию

$$u+v=\mu_1(p)+\mu_2(p), \tag{3.3.1}$$

где p и $\mu_1(p)$, $\mu_2(p)$ соответственно из (3.2.2)-(3.2.4). Т.е. получаемая сторонами суммарная полезность из правой части равенства (3.3.1) может быть перераспределена между ними в согласованную пару (u, v) за счет побочных платежей.

Это обстоятельство определяет заинтересованность сторон в согласованной реализации такой стратегии p^+ из (3.2.2), которая максимизирует суммарную полезность

$$\pi=\mu_1(p^+)+\mu_2(p^+)=\max\{\mu_1(p)+\mu_2(p): p\in S_{m\times n}\}. \tag{3.3.2}$$

Задача оценки величины π (3.3.2) эквивалентна линейной программе вида:

$$\pi=u^+ + v^+=\max\{u+v: (u, v)\in S\}. \tag{3.3.3}$$

При этом решению одной из задач (3.3.2), (3.3.3) можно сопоставить решение другой из этих задач таким образом, что будут выполняться условия:

$$u^+=\mu_1(p^+), \quad v^+=\mu_2(p^+).$$

Заметим, что в случае, когда допустимое множество S представляет собой плоский многоугольник (как это имеет место в случае биматричных игр), решение задачи (3.3.3) достигается в одной из (не улучшаемых) вершин этого многоугольника. Т.е. максимальная возможная величина суммарной полезности π может быть достигнута в *чистых* стратегиях.

Исходя из реализуемости максимального значения из (3.3.3) и руководствуясь основными идеями схемы Нэша, перейдем к вопросу об оценке сделки (u_+, v_+), которую будут готовы согласовать стороны P_1 и P_2 с учетом побочных платежей. При этом будем полагать, что

$$u_+ + v_+ = \pi \tag{3.3.4}$$

и передача полезностей от одной стороны к другой характеризуется побочными платежами

$$\pi_1 = u_+ - u^+, \quad \pi_2 = v_+ - v^+. \tag{3.3.5}$$

Первый из них соответствует части выигрыша, которую получает (или передает) сторона P_1, а второй указывает аналогичную величину для стороны P_2. Отметим, что согласно (3.3.3)-(3.3.5), $\pi_1 + \pi_2 = 0$.

При этих предположениях стороны могут согласовать любую сделку из множества

$$S_+ = \{(u, v) \in R^2 \colon u + v \le \pi,\ u \ge u^*,\ v \ge v^*\}, \tag{3.3.6}$$

которое заведомо не пусто. В силу простоты треугольного множества S_+, сделка

$$(u_+, v_+) = \varphi(S_+, u^*, v^*), \tag{3.3.7}$$

удовлетворяющая аксиомам Нэша, может быть определена как решение системы двух уравнений

$$u_+ + v_+ = \pi, \quad u_+ - u^* = v_+ - v^*.$$

Отсюда

$$u_+ = \tfrac{1}{2}[\pi + (u^* - v^*)] \quad v_+ = \tfrac{1}{2}[\pi - (u^* - v^*)], \qquad (3.3.8)$$

что позволяет оценить также побочные платежи из (3.3.5).

Пример 3.2. Вернемся к задаче о строительстве с долевым участием (см. стр. 144) и введем новые платежные функции сторон, представлены в табл. 3.2. Пары чистых стратегий (i=1, j=1) и (i=2, j=2), соответствующие двум возможным районам строительства гостиничного комплекса с долевым участием, по прежнему обладают свойствами устойчивости и эффективности. Однако, как мы уже указывали, при этом нет механизма выбора конкретной пары. Матрицы отражают также, что в случае отказа от строительства комплекса стороны используют свои средства для развития системы предприятий обслуживания. При этом сторона P_1 несет убытки, если она развивает предприятия в «своем» (достаточно насыщенном услугами) районе P1.

Таблица 3.2

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Допустимое множество S для рассматриваемой задачи представлено на рис. 3.9. Точка $(u^*, v^*) = (2\tfrac{1}{3}, 1\tfrac{1}{2})$, оцененная в соответствии с выражениями (3.2.7), (3.2.10) и (2.4.30), также отмечена на рис. 3.9. Дележ

$$(u^\circ, v^\circ) = \varphi(S, u^*, v^*) = (79/24,\ 82/24),$$

удовлетворяющий аксиомам Нэша в задаче без побочных платежей, определен с помощью приема из замечания на стр. 188 (отмечен на рисунке). Этот дележ реализуем рулеткой вида:

$$p^\circ = (7/24, 0, 0, 17/24).$$

Далее, $(u^+, v^+) = (3,4)$, $\pi=7$ и, согласно (3.3.7), $(u_+, v_+) = (55/16, 57/16)$. Т.е. (в случае договоренности) стороны согласованно реализуют пару чистых стратегий (i=2, j=2) и затем вторая сторона выплачивает первой стороне часть своего выигрыша, которой соответствует полезность π_2=7/16.

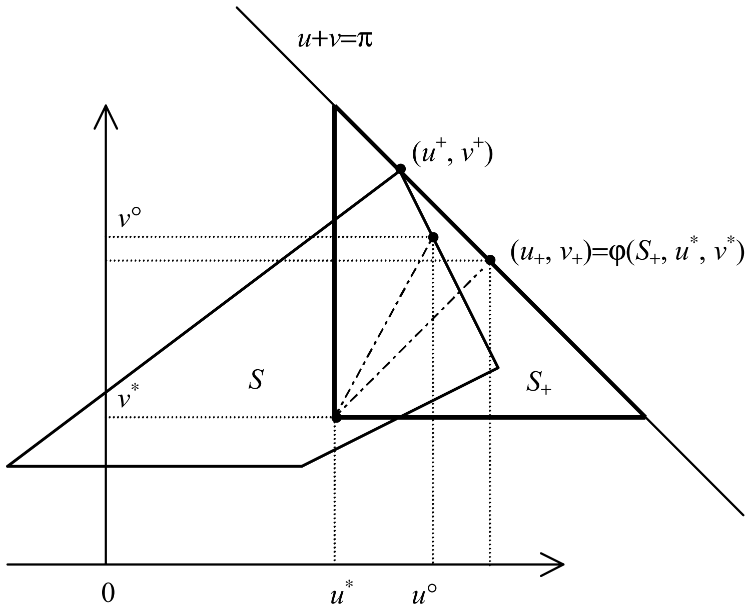

Рис. 3.9

3.4 Использование угроз при формировании сделки

Угрозы в сделках с побочными платежами

Продолжим обсуждение последнего примера. Введение механизма побочных платежей привело к тому, что выигрыш v_+ второй стороны в сделке (3.3.7) с побочными платежами оказывается меньше, чем ее выигрыш v° в сделке (3.2.18) без побочных платежей (ср. расположение точек (u_+, v_+) и (u°, v°) на рис. 3.9).

Выигрыш первой стороны, однако, увеличился ($u_+ > u^\circ$). В такой ситуации вторая сторона могла бы настаивать на том, что она согласует лишь такую сделку (u_+, v_+) с побочными платежами, при которой от введения побочных платежей выигрывают обе стороны, т.е. выполняются условия

$$u_+ \geq u^\circ, \quad v_+ \geq v^\circ.$$

Принятие этих условий обеими сторонами означает, что допустимыми вариантами становятся сделки из множества

$$S^+ = \{(u, v) \in R^2 \colon u + v \leq \pi, u \geq u^\circ, v \geq v^\circ\}, \tag{3.4.1}$$

а не из множества (3.3.6). При этом дележ, удовлетворяющий аксиомам Нэша, определяется оператором

$$(u_+, v_+) = \varphi(S^+, u^\circ, v^\circ). \tag{3.4.2}$$

Соответствующая точка отмечена на рис. 3.10 номером 1.

Фактически, схемы (3.3.6), (3.3.7) и (3.4.1), (3.4.2) соответствуют *разному поведению* сторон при согласовании сделки. При этом основным аргументом каждой стороны, настаивающей на своем предложении, является *отказ* от сотрудничества. Такой отказ, как уже отмечалось, ограничивает гарантированные выигрыши сторон P_1 и P_2 максиминными значениями u^* и v^* соответственно из (3.2.7) и (3.2.10). Тем не менее стороны могут пойти на эти (или даже бóльшие) потери с тем, чтобы другая сторона также понесла потери и стала более сговорчивой. Таким образом, возможен стиль поведения, при котором сторона P_1 *угрожает* стороне P_2 отказом от кооперации и применением некоторой (в общем случае смешанной) стратегии $x'' \in S_m$, если ее пожелания не будут учтены. Аналогично сторона P_2 может объявить свою ***стратегию угрозы*** $y'' \in S_n$.

В рассматриваемом примере сторона P_2 может, например, настаивать на строительстве комплекса в ее районе Р2, заявляя, что в любом случае она будет реализовывать свои средства только в этом районе. Такое поведение можно интерпретировать как объявление чистой стратегии угрозы j=2. Допустим, что сторона P_1 решила вести себя аналогично и объявила о применении чистой стратегии i=1 в случае отказа строить комплекс в ее районе Р1. В результате при отказе от кооперации выигрыши сторон будут определяться величинами u''=–1 и v''=1 (см. рис. 3.10). Т.е. в ситуации отказа от кооперации положение стороны P_1 оказывается хуже, чем положение стороны P_2. Это неравенство позволяет стороне P_2 требовать бóльшую долю при разделе максимальной общей полезности π.

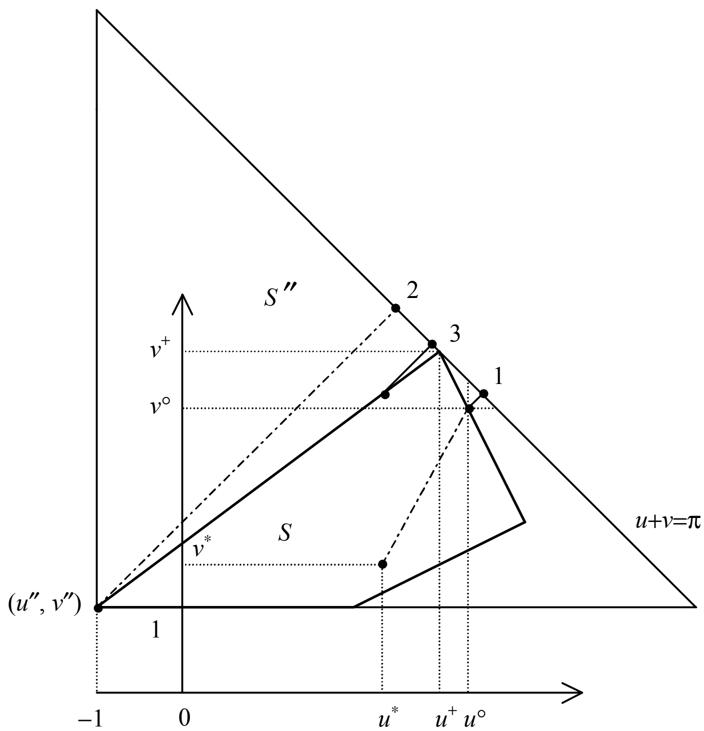

Рис. 3.10

Отметим, что ключевым моментом в проведенном рассмотрении является признание сторонами реалистичности угроз, т.е. их готовность на самом деле использовать угрозы при отказе от сотрудничества, и отсутствие сомнений в том, что другая сторона поступит аналогично. При этих предположениях множество сделок, которые могут согласовать стороны (с учетом возможности побочных платежей), есть

$$S''=\{(u, v)\in R^2 \colon u+v\leq\pi,\ u\geq u'',\ v\geq v''\}. \qquad (3.4.3)$$

Кроме того, дележ

$$(u_+, v_+)=\varphi(S'', u'', v''), \qquad (3.4.4)$$

удовлетворяющий аксиомам Нэша, определяется выражениями

$$u_+ = \tfrac{1}{2}[\pi+(u''-v'')] \quad v_+ = \tfrac{1}{2}[\pi-(u''-v'')]. \qquad (3.4.5)$$

Множество S'' из (3.4.3) и точка $(u_+, v_+)=(2\tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2})$ из (3.4.4) изображены на рис. 3.10 (точка имеет номер 2).

Оптимальные угрозы в задаче с побочными платежами

Проведенное рассмотрение ведет к постановке вопроса об оптимальных стратегиях угрозы, которые максимизируют долю (u_+ для P_1 и v_+ для P_2) общей ожидаемой полезности π, гарантированно получаемую игроком в случае достижения соглашения. Как следует из рис. 3.10, повышение значения u'' ведет к увеличению доли стороны P_1 в согласованном дележе. Аналогично, повышение значения v'' увеличивает долю стороны P_2. Однако стороны выбирают не уровни u'', v'', а стратегии угрозы $x''\in S_m$, $y''\in S_n$, которым соответствуют значения

$$u''=M_1(x'', y''), \quad v''=M_2(x'', y''), \qquad (3.4.6)$$

определяемые в соответствии с выражениями (2.4.36), (2.4.37).

Согласно (3.4.5)(3.4.6),

$$u_+ = \tfrac{1}{2}[\pi+M(x'', y'')], \quad v_+ = \tfrac{1}{2}[\pi-M(x'', y'')], \qquad (3.4.7)$$

где

$$M(x, y)=M_1(x, y)-M_2(x, y)=x^T(A-B)y. \quad (3.4.8)$$

Из (3.4.7) следует, что сторона P_1 (при выборе стратегии угрозы x'') заинтересована в максимизации величины (3.4.8), а сторона P_2 (при выборе стратегии y'') заинтересована в минимизации этой же величины. Таким образом, стратегия стороны P_1, обеспечивающая ей максиминное значение доли u_+, совпадает с оптимальной стратегией первого игрока в антагонистической игре с матрицей $A-B$. Аналогично, вторая сторона может обеспечить максиминное значение своей доли v_+ с помощью оптимальной стратегии второго игрока в той же игре с матрицей $A-B$.

В рассматриваемом примере матрица

$$A-B=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

содержит седловое значение, которому соответствуют стратегии $x''=(0,1)$ и $y''=(0,1)$. Т.е. в обсуждаемой операции стороне P_1 целесообразно принять предложение о строительстве комплекса во втором районе (вместо того, чтобы копировать неуступчивое поведение второй стороны). При этом множество (3.4.3) содержит единственную точку и

$$(u_+, v_+)=(u^+, v^+)=(u'', v'')=(3,4). \quad (3.4.9)$$

Этот вариант лучше для стороны P_1, чем дележ $(u_+, v_+)=(2\frac{1}{2},4\frac{1}{2})$ оцененный выше для стратегии $x''=(1,0)$.

Рассмотрим еще один тип поведения. Пусть сторона P_1 планирует (в случае срыва соглашения) использование стратегии $x^*=(1/6,5/6)$, гарантирующей ожидаемый выигрыш $u^*=2\frac{2}{3}$ из (3.2.7). При этом сторона P_2 объявила описанную выше стратегию угрозы $y''=(0,1)$. Тогда, в случае срыва кооперации, выигрыши сторон составят пару

$$(u'', v'')=(2\tfrac{1}{3},3\tfrac{1}{2}), \qquad (3.4.10)$$

которой соответствует точка, лежащая на левом верхнем ребре границы допустимого множества S (отмечена темным кружком на рис. 3.10). Решение (3.4.10) менее выгодно для первой стороны, чем вариант (3.4.9), соответствующий оптимальным стратегиям угрозы x'',y''. Кроме того, дележ (3.4.5) (отмечен точкой с номером 3 на рис. 3.10) при уровнях (u'', v'') из (3.4.10) также менее выгоден для первой стороны, чем дележ из (3.4.9).

Угрозы в задаче без побочных платежей

Соображения о поведении, включающем угрозы, рассмотренные выше, целесообразно учитывать и при анализе сделок без побочных платежей. Отличие состоит в том, что (без побочных платежей) реализуемы лишь сделки из допустимого множества S.

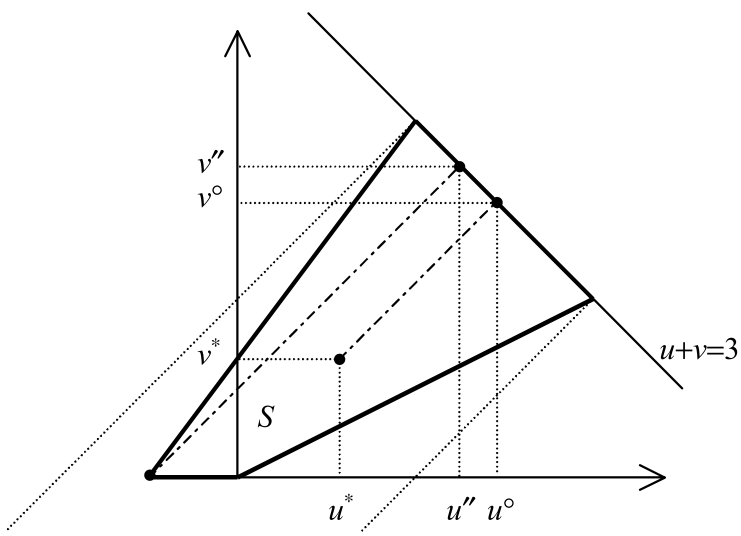

Рис. 3.11

Отметим частный случай, для которого применимы полученные выше оценки оптимальных стратегий угрозы. Пусть содержащая эффективные (т.е. не улучшаемые) точки граница множества S лежит на прямой описываемой уравнением $u+v=\text{const}$. Примером такого рода является задача, представленная на рис. 3.8. Кроме того, пусть все множество S находится под этой прямой в полосе между двумя нормалями к указанной границе, проходящими через концевые точки «паретовского» ребра. Пример, которому соответствует рис. 3.8, удовлетворяет и этому условию. Некоторая модификация этого примера, которой соответствуют матрицы из табл. 3.3, представлена на рис. 3.11.

При этом $(u^*, v^*)=(4/7,2/3)$ и дележу из (3.2.18) соответствует пара $(u^\circ, v^\circ)=(61/42,65/42)$, определяемая описанным выше графическим приемом и вычислимая (в силу свойств паретовского ребра границы множества S) по формулам (3.3.8) при $\pi=3$.

Таблица 3.3

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Поскольку матрица

$$A-B=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

содержит седловое значение, то оптимальные угрозы реализуемы в чистых стратегиях $i''=1, j''=2$. При этом $(u'', v'')=(-\frac{1}{2},0)$ и, согласно (3.4.7), $(u_+, v_+)=(1\frac{1}{4},1\frac{3}{4})$.

В случае, когда описанные свойства множества S не имеют места, определение оптимальных стратегий угрозы является более сложным.