Глава 4

Принятие решений в условиях неопределенности

4.1 Выбор решений при неизвестных состояниях природы (игры с природой)

Пример 4.1 (планирование посевов). Руководство сельскохозяйственного предприятия определяет вариант использования имеющихся посевных площадей (100 га), пригодных для выращивания двух типов зерновых культур. Урожайность этих культур и ожидаемые цены (за один центнер) при различных вариантах возможных погодных условий представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Матрица H	Культуры:	
Лето:	1	2
Сухое	8	2
Нормальное	8	6
Дождливое	4	10
Урожайность (ц/га)		

Матрица C	Культуры:	
Лето:	1	2
Сухое	5	8
Нормальное	5	6
Дождливое	6	4
Цены (тыс. руб./ц)		

Данные о затратах на проведение необходимых работ и об ожидаемой прибыли (также в зависимости от погодных условий предстоящего лета) содержаться в табл. 4.2 . При этом прибыль a_{ij}, которая ожидается от продажи урожая культуры j, выращенной в погодных условиях i, определяется (в расчете на один гектар посевной площади) выражением

$$a_{ij}=c_{ij}h_{ij}-w_{ij}, \quad 1\le i\le 3,\ 1\le j\le 2.$$

Таблица 4.2

Матрица W	Культуры:	
Лето:	1	2
Сухое	6	8
Нормальное	4	3
Дождливое	4	3
Затраты (тыс. руб./га)		

Матрица A	Культуры:	
Лето:	1	2
Сухое	34	8
Нормальное	36	33
Дождливое	20	37
Прибыль (тыс. руб./га)		

Примем, что предприятие может одновременно засеять обе культуры, используя для первой из них часть площадей, задаваемую долей x ($0\le x\le 1$), а для второй — оставшуюся часть площадей, определяемую долей $1-x$. Тогда ожидаемая прибыль от продажи урожая обеих культур (в расчете на один гектар используемой посевной площади) составит (как функция параметра x и погодных условий) величину

$$E(i,x)=x(a_{i1}-a_{i2})+a_{i2}, \quad 1\le i\le 3,\ 0\le x\le 1.$$

При этом, в соответствии со значениями коэффициентов матрицы A из табл. 4.2,

$$E(1,x)=26x+8, \qquad (4.1.1)$$

$$E(2,x)=3x+33, \tag{4.1.2}$$

$$E(3,x)=-17x+37. \tag{4.1.3}$$

Зависимости (4.1.1)-(4.1.3) представлены на рис. 4.1.

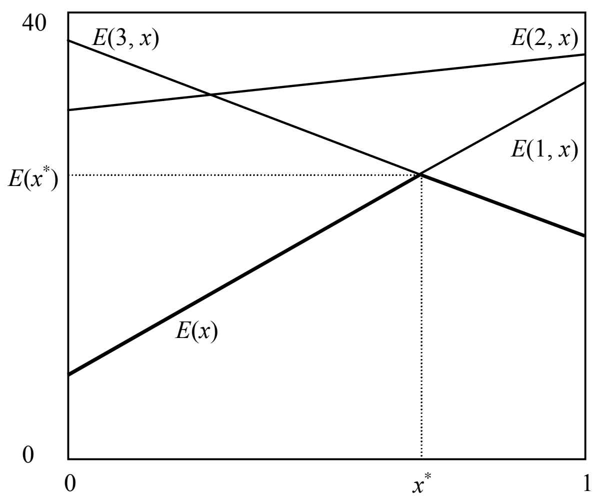

Рис. 4.1

Приняв некоторый план использования посевных площадей, определяемый параметром x, $0 \le x \le 1$, предприятие *гарантирует* себе ожидаемую (удельную) прибыль

$$E(x)=\min\{E(i,x)\colon 1 \le i \le 3\}, \tag{4.1.4}$$

которой соответствует (выделенная на рис. 4.1 толстыми линиями) нижняя огибающая семейства кривых (4.1.1)-(4.1.3). Согласно рисунку, стратегия x^*, максимизирующая удельную прибыль (4.1.4), является решением уравнения $E(1,x)=E(3,x)$. При этом $x^*=29/43$ и $E(x^*)\approx 25{,}53$. Т.е. ожидаемая прибыль, соответствующая минимаксной стратегии x^*, составляет (для всей посевной площади) не менее 2553 тыс. руб.

Напомним, что рассмотренный пример относится к задачам вида (1.2.17), в которых есть лишь одна сторона, являющаяся носителем интересов. Трудности выбора решений в таких задачах связаны с тем, что исход операции зависит от некоторых неконтролируемых параметров, значения которых влияют на исход операции, но не известны оперирующей стороне. Эти параметры (роль которых в рассмотренном выше примере играли неизвестные погодные условия) обычно называют *состояниями природы*. В связи с этим обсуждаемый класс задач принятия решений в условиях неопределенности определяют также как ***игры с природой***. При этом следует иметь в виду, что (в любой конкретной операции) природа не является носителем чьих-либо интересов. Это обстоятельство открывает определенные возможности для прогнозирования неизвестных состояний природы (заметим, что эти возможности обычно не могут быть использованы для прогнозирования действий сторон, имеющих свои интересы в операции).

4.2 Вероятностные модели выбора решений в условиях неопределенности (статистические игры)

Прогнозирование и оценка состояний природы (модели с испытаниями)

Рассмотренная выше задача является примером операции с единственной оперирующей стороной. В связи с этим выбор решения не осложняется конфликтом интересов. Основная трудность выбора в таких условиях связана с влиянием на исход операции неизвестного состояния природы ω, что интерпретируется как наличие *неопределенности*. В связи с этим в таких операциях обычно оцениваются не выигрыши оперирующей стороны, а ее ***потери*** $L(\omega, a)$, вызываемые принятием решения a в ситуации, когда природа находится в состоянии ω. Такие задачи часто интерпретируются как антагонистические игры с природой, в которых единственная реально имеющая интересы оперирующая сторона (называемая ***статистиком***) рассматривается как второй игрок (см. замечание на стр. 21).

В дальнейшем рассмотрении мы ограничимся случаем, когда множество возможных состояний природы Ω и множество возможных решений статистика A являются конечными, т.е.

$$\Omega=\{1,\ldots,\omega,\ldots,m\},\quad A=\{1,\ldots,a,\ldots,n\}. \tag{4.2.1}$$

При этом будем полагать, что состояния природы a могут быть охарактеризованы вероятностями их наступления $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$. Это важное допущение позволяет накапливать информацию о состояниях природы с помощью *наблюдений*, на основании которых оцениваются распределения

$$\xi=(\xi(1),\ldots,\xi(m))\in\Xi=S_m, \tag{4.2.2}$$

где S_m из (2.4.35)[58].

Помимо распределений (4.2.2), позволяющих прогнозировать неизвестное состояние природы на основании результатов (длительных) наблюдений, оценка текущего состояния может осуществляться с помощью *экспериментов*.

Пример 4.2 (диагностика туберкулеза). Органы здравоохранения проводят обследование населения некоторой территории с целью выявления (и последующего лечения) больных туберкулезом.[59] При этом в отношении каждого обследуемого принимается

---

[58] В рассматриваемых задачах, длительное время развивавшихся вне связи с возникшим позднее общим представлением об операции, обычно используются свои (исторически сложившиеся) термины и обозначения

[59] Туберкулез относится к числу старейших известных заболеваний. В четырех египетских мумиях (относимых к 27 веку до новой эры) обнаружены туберкулезные повреждения позвоночника. В начале 20 века (только в Европе) туберкулез был причиной смерти около одного миллиона человек

решение, следует ли ему пройти курс лечения (a=2) или он не нуждается в таком лечении (a=1)? Это очевидным образом предполагает два состояния, в которых может находиться пациент[60]: «здоров» (ω=1) и «болен» (ω=2).

Одной из типичных форм обследования, широко применяемых для раннего выявления туберкулеза (например, у детей), является использование пробы Манту[61] (для лиц старше 12 лет обычно используется флюорография). Эксперименты такого рода, целью которых является установление состояния природы, мы будем называть ***испытаниями***. Каждой схеме испытаний можно сопоставить множество Z возможных *исходов* z, которое мы будем полагать конечным, т.е.

$$Z=\{z_1,\ldots,z_N\}. \tag{4.2.3}$$

Заметим, что в случае пробы Манту, каждый исход представляет собой (измеренную с помощью линейки) ширину инфильтрата. При этом, хотя и нет однозначной связи между шириной инфильтрата и наличием заболевания, тем не менее существует достаточно выраженная статистическая связь, которая может быть охарактеризована следующим образом.

Введем функции $p_1(z)$ и $p_2(z)$, соответствующие вероятностям появления инфильтрата с показателем $z\in Z$ у лиц, не имеющих заболевания (функция p_1), и у лиц, имеющих заболевание (функция p_2). Эти функции определяются свойствами пробы Манту и могут быть установлены на основании анализа статистики испы-

---

(ежегодно). Микробактерия туберкулеза (палочка Коха) открыта в 1882 году. Заболевание по наследству не передается.

[60] Выбор нумерации решений (a) и состояний природы (ω) определяется соображениями, которые будут рассмотрены позднее.

[61] Реакция Манту — аллергическая диагностическая проба с внутрикожным введением туберкулина. Вздутие кожи (инфильтрат), наблюдаемое через 72 часа и имеющее размер более 5 мм, считается положительной реакцией. Предложена французским ученым Шарлем Манту в 1908 году.

таний для пациентов с заранее известным диагнозом. Допустим, что графики этих функций подобны кривым, представленным на рис. 4.2. В этом случае бóльшая ширина инфильтрата, действительно типична для лиц, пораженных заболеванием. Это обстоятельство и определяет практическую применимость пробы Манту, хотя и не исключает острой аллергической реакции у некоторых здоровых людей или вялой реакции у некоторых больных людей.

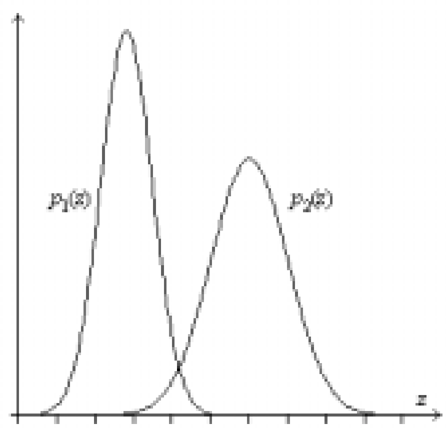

Рис. 4.2

Примем также, что на обследуемой территории длительное время ведется сбор статистики заболеваний. Наличие такой статистики позволяет интерпретировать долю населения, пораженную туберкулезом, как вероятность соответствующего состояния природы. Разумеется, что использование таких оценок для целей прогнозирования имеет смысл лишь в случае, если указанные выборочные частоты стационарны (т.е. не имеют тенденции к быстрым изменениям)[62].

Согласно сделанным предположениям, вероятность того, что реакция Манту даст результат z, описывается величиной

[62] Случай принятия решений в отсутствии такой статистики будет рассмотрен в следующем параграфе.

$$p(z)=p_1(z)\xi(1)+p_2(z)\xi(2), \quad z\in Z.$$

При этом вероятности того, что пациент, реакция которого характеризуется исходом z, является (соответственно) здоровым или больным, описываются выражениями:

$$\xi(1/z)=p_1(z)\xi(1)/p(z), \quad \xi(2/z)=p_2(z)\xi(2)/p(z).$$

Таким образом, в общем случае, которому соответствуют множества (4.2.1), введение испытаний, характеризуемых исходами из (4.2.3) и распределениями

$$p_\omega(z)\in S_N, \quad z\in Z, \ \omega\in\Omega, \tag{4.2.4}$$

позволяет пересчитать *априорное* распределение вероятностей для состояний природы (т.е. распределение, имевшее место до проведения испытания) в *апостериорное* распределение:

$$\xi_z=(\xi(1/z),\ldots,\xi(m/z))\in\Xi, \tag{4.2.5}$$

$$\xi(\omega/z)=p_\omega(z)\xi(\omega)/p(z), \tag{4.2.6}$$

$$p(z)= p_1(z)\xi(1)+\ldots+ p_m(z)\xi(m). \tag{4.2.7}$$

Замечание 4.1 (об однократном и многократном проведении испытаний). В рассмотренном примере результат (исход) каждого испытания представлял собой число. В общем случае результат может быть и более сложным объектом (например, вектором или графическим образом). Однако в любом случае мы полагаем, что после реализации выборки (т.е. проведения испытания) результат z доступен «целиком» и не подлежит какому-либо уточнению. О таких испытаниях говорят, что они характеризуются *фиксированным объемом выборки*.

Альтернативный случай состоит в том, что (в целях экономии средств) эксперименты проводятся сначала на части образцов. Затем на основании анализа полученных результатов принимается либо *окончательное* решение $a \in A$, либо решение о продолжении экспериментов на оставшейся части образцов (таких стадий в осуществлении испытаний может быть несколько). В этих случаях говорят об *испытаниях с последовательными выборками*. Обсуждение этого случая мы отложим до заключительной части следующего параграфа.

Статистические игры

В рассмотренных операциях с испытаниями правило выбора решения $a \in A$ (в зависимости от исхода испытания $z \in Z$) можно описать как некоторую функцию

$$a=d(z), \quad a \in A, \quad z \in Z. \tag{4.2.8}$$

Эту функцию называют *стратегией статистика* или ***решающей функцией***. Класс всех решающих функций будем обозначать символом D.

Функция (4.2.8) сопоставляет каждому решению $a \in A$ некоторое подмножество $Q_a \subset Z$ исходов испытаний, порождающих это решение, т.е.

$$Q_a=\{z \in Z: d(z)=a\}, \quad a \in A. \tag{4.2.9}$$

Множества Q_a из (4.2.9), соответствующие разным решениям a, не пересекаются друг с другом. При этом их объединение совпадает с множеством всех исходов из (4.2.3). Т.е. любая решающая функция $d \in D$ порождает *разбиение* множества исходов Z на подмножества Q_a из (4.2.9) и, следовательно, может быть конструктивно задана таким разбиением.

Пусть задано априорное распределение вероятностей ξ для состояний природы из (4.2.2) и семейство функций p_ω из (4.2.4), характеризующих используемую статистическую схему проведения испытаний с фиксированным объемом выборки. Тогда математическое ожидание потерь статистика, реализующего стратегию $d \in D$, определяется выражением:

$$\rho(\xi, d) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{z \in Z} L(\omega, d(z)) p_{\omega}(z) \xi(\omega), \qquad (4.2.10)$$

которое, согласно (4.2.5)-(4.2.7), может быть представлено также в виде:

$$\rho(\xi, d) = \sum_{z \in Z} p(z) \rho(\xi_z, d), \qquad (4.2.11)$$

$$\rho(\xi_z, d) = \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega, d(z)) \xi(\omega / z). \qquad (4.2.12)$$

При этом математическое ожидание (4.2.10), соответствующее априорному распределению ξ, называется *функцией априорного риска* (или ***априорным риском***), а математическое ожидание (4.2.12), соответствующее апостериорному распределению ξ_z, — *функцией апостериорного риска* (или ***апостериорным риском***). Заметим, что введенная оценка эффективности стратегий с помощью математического ожидания потерь возвращает нас к уже использованному ранее приему усреднения полезностей (см. обсуждение на стр. 85).

Построенная модель

$$\rho(\xi, d), \quad \xi \in \Xi, \quad d \in D, \qquad (4.2.13)$$

в которой возможные стратегии статистика, описываемые решающими функциями $d \in D$ из (4.2.8), характеризуются априорным риском $\rho(\xi, d)$ из (4.2.10), зависящим от распределения $\xi \in \Xi$ из (4.2.2) для состояний природы $\omega \in \Omega$ из (4.2.1), называется ***статистической игрой***. При этом априорное распределение ξ иногда интерпретируется как смешанная стратегия природы.

Принцип Байеса

При заданном априорном распределении ξ любая стратегия $d \in D$ статистика характеризуется ожидаемыми потерями $\rho(\xi, d)$ из

(4.2.10). Это позволяет рассмотреть задачу выбора стратегии d_ξ,минимизирующей риск при заданном распределении ξ, т.е.

$$\rho(\xi, d_\xi)=\min\{\rho(\xi, d): d\in D\}. \tag{4.2.14}$$

Стратегия d_ξ из(4.2.14) называется ***байесовской*** решающей функцией (относительно заданного априорного распределения ξ), а соответствующий ей риск

$$\rho(\xi)=\rho(, d_\xi) \tag{4.2.15}$$

— ***байесовским риском***[63]. Из (4.2.11), (4.2.14) выводим, что

$$\begin{aligned}\rho(\xi, d_\xi) &= \min_{d\in D}\sum_{z\in Z} p(z)\rho(\xi_z, d) = \\ &= \sum_{z\in Z} p(z)\min_{d\in D}\sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, d(z))\xi(\omega/z) = \\ &= \sum_{z\in Z} p(z)\min_{a\in A}\sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, a)\xi(\omega/z).\end{aligned}$$

Следовательно, байесовское решение a_z, соответствующее конкретному исходу испытания z, может быть получено из условия:

$$a_z=d_\xi(z)=\arg\min\{\rho(\xi_z, a): a\in A\}, \tag{4.2.16}$$

где $\rho(\xi_z, a)$ есть апостериорный риск, соответствующий решению a при исходе испытания z.

Поскольку множества Ω и A являются конечными, то условие (4.2.16) может быть представлено системой неравенств:

---

[63] Байес Томас (1702-1761) — английский исследователь в области теории вероятностей, член Королевского общества (1742). Принцип выбора, называемый его именем, не упоминается в опубликованных работах Т.Байеса — см., например, работы Майстрова Л.Е.: (1) Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967; (2) Развитие понятия вероятности. М.: Наука, 1980.

$$\sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, a_z)\xi(\omega / z) \le \sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, a)\xi(\omega / z), \quad a \in A,$$

которую, учитывая (4.2.6), можно привести к виду:

$$\sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, a_z) p_\omega(z)\xi(\omega) \le \sum_{\omega\in\Omega} L(\omega, a) p_\omega(z)\xi(\omega), \quad a \in A, \qquad (4.2.17)$$

удобному для определения решения a_z при заданных априорном распределении ξ и исходе испытания z. Заметим, что приведение условий (4.2.16) к виду (4.2.17) с использованием соотношения (4.2.6) предполагает положительность значения $p(z)$ из (4.2.7). В случае исходов z, вероятность реализации которых является нулевой, в качестве байесовского значения a_z может быть использовано любое решение $a\in A$. Потери от такого решения не дают вклада в функцию риска — см. (4.2.7) и (4.2.10).

Выбор простой гипотезы из конечного множества гипотез

Пусть функция потерь, соответствующая множествам Ω и A из (4.2.1) при $m=n$, имеет вид:

$$L(\omega, a)=w, \ \omega\neq a, \qquad L(\omega, a)=0, \ \omega=a, \quad \omega\in\Omega, \ a\in A, \qquad (4.2.18)$$

где величина w является положительной.

Замечание 4.2 (о *простых гипотезах*). Согласно (4.2.18), решение статистика влечет потери лишь в случае, если его номер во множестве A отличается от номера текущего состояния природы ω. В связи с этим рассматриваемая операция может интерпретироваться как задача определения текущего состояния природы.

Напомним, что статистик принимает решение после наблюдения исхода z некоторого испытания, модель которого задается набором распределений (4.2.4). Поэтому выбор конкретного значения $a\in A$ может также интерпретироваться и как заключение о том, что полученный исход z порожден распределением $p_a(z)$. Таким образом, при функции потерь вида (4.2.18) выбор решения, фактически, состоит в *принятии гипотезы* о том, какое именно распределение вероятностей из набора (4.2.4) определило реализацию исхода z. Далее, поскольку любое предположение относительно распределения вероятностей наблюдаемой случайной величины называется ***статистической гипотезой***, то можно также говорить о том, что рассматриваемая операция представляет собой *задачу принятия статистической гипотезы* (относительно распределения вероятностей из (4.2.4) для наблюдаемой случайной величины z). Отметим также, что в рассматриваемом случае любое решение $a\in A$ *полностью* определяет соответствующее распределение вероятностей $p_a(z)$ из (4.2.4). Статистические гипотезы, обладающие таким свойством, называются ***простыми***. Следовательно, функция потерь вида (4.2.18) определяет задачу выбора простой статистической гипотезы из множества простых гипотез.

Согласно (4.2.17) и (4.2.18), байесовское решение $\tau=a_z$ для рассматриваемой задачи может быть описано неравенствами:

$$p_\tau(z)\xi(\tau)\geq p_a(z)\xi(a), \quad a\in A.$$

Отсюда вытекает, что минимальный риск соответствует гипотезе с номером $\tau=a_z$, имеющей максимальную вероятность

$$P(\tau, z)= p_\tau(z)\xi(\tau)=\max\{\, p_a(z)\xi(a):\; a\in A\,\}$$

реализации совместно с исходом z.

4.3 Проверка простой гипотезы относительно простой альтернативы

Байесовское решение как проверка по отношению правдоподобия

Рассмотрим статистическую игру (4.2.13) при $m=n=2$. Примером операции такого рода является обсуждавшаяся выше задача диагностики туберкулеза (см. стр. 210). Будем использовать эту задачу для иллюстрации основных положений, вводимых ниже.

Примем, что функция потерь $L(\omega, a)$ включает лишь затраты, вызываемые ошибками при постановке диагноза. При этом потери $L(1,2)$, связанные с ошибочным направлением на лечение *здорового* человека, примем за единицу потерь. Тогда

$$L(1,1)=L(2,2)=0, \quad L(1,2)=1, \quad L(2,1)=w, \qquad (4.3.1)$$

где $w>0$ есть (выраженные в указанных выше единицах) потери от постановки ошибочного диагноза лицу, пораженному заболеванием. Заметим, что при сделанных предположениях функция $L(\omega, a)$ полностью определяется заданием единственного числа $w>0$.

В соответствии с замечанием о простых гипотезах (см. стр. 217) любая статистическая игра с функцией потерь вида (4.3.1) может интерпретироваться как выбор одной из двух *простых* гипотез. При этом остающаяся альтернатива также соответствует простой гипотезе.

Отметим, что два типа ошибок статистика, возможных в обсуждавшейся задаче диагностики туберкулеза, вообще говоря, не являются одинаковыми по сопровождающим их потерям. Случай, когда обследование не выявило факт заболевания, следствием чего будет более позднее лечение запущенной формы болезни, должен рассматриваться как более серьезная ошибка, чем направление здорового человека для прохождения курса лечения[64].

В задачах выбора решений, для которых характерно указанное различие последствий, вызываемых ошибками, принято называть бóлее серьезную ошибку (ведущую к большим потерям) ***ошибкой первого рода***. При этом вторая возможная ошибка называется ***ошибкой второго рода***.

Указанное различие в классификации ошибок ведет к соответствующему различению двух рассматриваемых гипотез. Гипотезу, *отвержение* которой, когда она *истинна*, ведет к ошибке первого рода, называют *испытуемой гипотезой* или ***нуль-гипотезой***. В рассматриваемом примере диагностики туберкулеза такой гипотезой является наличие заболевания (т.е. факт порождения исхода испытания $z \in Z$ случайной величиной с распределением $p_2(z)$).

Матрица потерь, соответствующая функции (4.3.1), и введенные наименования для состояний природы, действий статистика и ошибок представлены в табл. 4.3.

Введем обозначение $\zeta=\xi(1)$ для априорной вероятности первого состояния природы, т.е. примем, что

$$\xi=(\zeta,1-\zeta), \quad 0\le\zeta\le1, \tag{4.3.2}$$

и определим условия, при выполнении которых решение $a=1$, соответствующее отвержению нуль-гипотезы, будет байесовским. Согласно (4.2.17), эти условия состоят в выполнении неравенства

[64] Заметим, что такое направление предполагает более подробное обследование, предшествующее лечению. Затраты на это обследование и ущерб от временного прерывания нормальной жизнедеятельности пациента (не нуждавшегося в лечении) составляют содержание потерь, вызываемых обсуждаемым ошибочным диагнозом.

$$L(1,1)p_1(z)\xi(1)+L(2,1)p_2(z)\xi(2)\le$$
$$\le L(1,2)p_1(z)\xi(1)+L(2,2)p_2(z)\xi(2),$$

которое, учитывая (4.3.1) и (4.3.2), может быть представлено в виде

$$wp_2(z)(1-\zeta)\le p_1(z)\zeta$$

или

$$p_2(z)/p_1(z)\le c(w,\zeta)=\zeta/w(1-\zeta). \qquad (4.3.3)$$

Таблица 4.3

Матрица потерь	*Решения статистика*: Нуль-гипотезу	
Состояния природы: Нуль-гипотеза	Отвергнуть (a=1)	Принять (a=2)
Не верна (ω=1)	Ошибки нет $L(1,1)=0$	Ошибка 2 рода $L(1,2)=1$
Верна (ω=2)	Ошибка 1 рода $L(2,1)=w$	Ошибки нет $L(2,2)=0$

Условие (4.3.3) выделяет точки $z\in Z$, которым сопоставляется решение a_z=1, определяемое байесовской решающей функцией d_ξ. При этом a_z=2, если для соответствующего значения z условие (4.3.3) не выполняется. Следовательно, байесовская стратегия d_ξ может быть задана разбиением множества исходов Z из (4.2.3) на подмножества Q_1 и Q_2 из (4.2.9), где

$$Q_1=\{z\in Z\colon p_2(z)/p_1(z)\le c(w,\zeta)\}, \qquad (4.3.4)$$

$$Q_2 = \{z \in Z: p_2(z)/p_1(z) > c(w, \zeta)\}$$

и $c(w, \zeta)$ из (4.3.3).

Определение 4.1 (*критической области* критерия). Для именования стратегий (или решающих функций) статистика используется также и более старый термин ***статистический критерий*** (или просто критерий). При этом множество Q_1 исходов $z \in Z$, наблюдение которых ведет к отвержению нуль-гипотезы в соответствии с некоторым критерием $d \in D$, называется критической областью этого критерия.

Заметим, что в силу принятого условия n=2, разбиение множества исходов Z на подмножества из (4.2.9) содержит лишь два элемента Q_1 и Q_2, т.е.

$$Z = Q_1 \cup Q_2. \tag{4.3.5}$$

Следовательно, критическая область $Q_1 \subset Z$ полностью определяет соответствующий критерий $d \in D$.

В дальнейшем, для выделения критических областей, соответствующих байесовским критериям d_ξ, $\xi \in S_2$, будем обозначать определяющие их критические области из (4.3.3) символом Q_ζ, где ζ из (4.3.2).

Замечание 4.3 (о *проверках по отношению правдоподобия*). Отношение вероятностей $p_2(z)$ и $p_1(z)$ из левой части правила (4.3.3) называют ***отношением правдоподобия***, поскольку сами эти вероятности, характеризующие частоты исходов испытаний, первоначально именовались *функциями правдоподобия*. В связи с этим правила выбора решений, основанные на условиях типа (4.3.3), получили название *проверок по отношению правдоподобия*.

Идея использования отношений правдоподобия для выбора простой гипотезы (при простой альтернативе) путем сравнения этого отношения с некоторой положительной константой c возникла независимо от концепции байесовских решений, минимизирующих ожидаемые потери. В ее основе лежит простое соображение, согласно которому при $p_2(z)/p_1(z)<1$ более правдоподобно, что исход $z\in Z$ соответствует случайной величине с распределением $p_1(z)$. При этом, учитывая разный характер последствий, связанных с различными ошибочными решениями, а также (обычно имеющее место) различие частот появления состояний $\omega=1$ и $\omega=2$, значение константы сравнения c могло быть выбрано отличным от 1.

Таким образом, байесовский критерий d_ξ, задаваемый критической областью Q_ζ из (4.3.4), относится к классу проверок по отношению правдоподобия. При этом рассмотренный байесовский подход позволяет дать содержательную интерпретацию значений константы $c=c(w, \zeta)$.

Поскольку при любой функции потерь вида (4.3.1) значение величины $c=c(w, \zeta)$ из (4.3.3) пробегает весь диапазон $0\le c<\infty$ при изменении вероятности ζ от нулевого до единичного значений, то класс *всех* проверок по отношению правдоподобия совпадает с классом всех байесовских критериев d_ξ, $\xi\in\Xi=S_2$.

Значимость и мощность критерия

Рассмотрим некоторый критерий $d\in D$, заданный критической областью $Q_1\subset Z$. Ошибки первого рода, порождаемые этим критерием, соответствуют отвержению правильной нуль-гипотезы. Следовательно, такие ошибки имеют место при попадании выборочной точки z, являющейся реализацией случайной величины с распределением $p_2(z)$, в критическую область Q_1 (см. табл. 4.3). Вероятность таких ошибок

$$\alpha=\sum\nolimits_{z\in Q_1} p_2(z) \qquad (4.3.6)$$

называется ***значимостью*** (или *уровнем значимости*) критерия d.

Ошибка второго рода соответствует выборочным точкам z, порожденным случайной величиной с распределением $p_1(z)$ и попадающим в *дополнение* критической области, т.е. во множество Q_2 из (4.3.5). Поэтому вероятность таких ошибок есть

$$\beta = \sum\nolimits_{z \in Q_2} p_1(z). \qquad (4.3.7)$$

При этом величина

$$1 - \beta = \sum\nolimits_{z \in Z} p_1(z) - \sum\nolimits_{z \in Q_2} p_1(z) = \sum\nolimits_{z \in Q_1} p_1(z), \qquad (4.3.8)$$

характеризующая вероятность отвержения *неверной* испытуемой гипотезы, называется ***мощностью*** критерия.

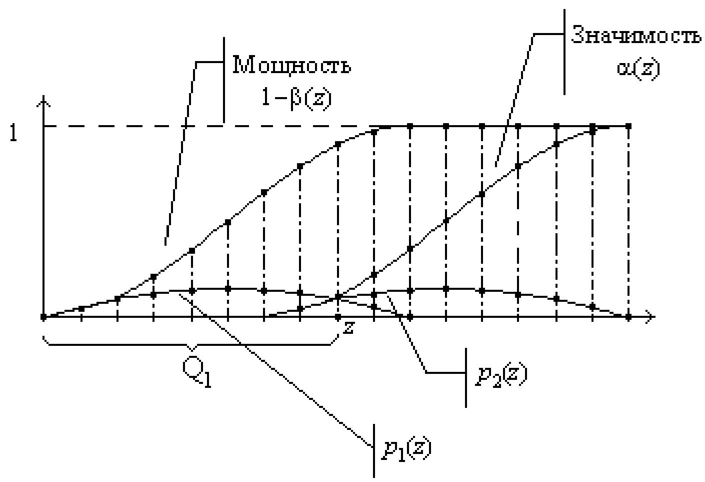

Рис. 4.3

Отметим, что величины (4.3.6) и (4.3.8), характеризующие (соответственно) значимость и мощность критерия, определяются суммированием распределений $p_2(z)$ и $p_1(z)$ по одной и той же критической области Q_1. Это обстоятельство ограничивает возможность формирования критической области, обеспечивающей одновременно высокую (т.е. близкую к нулевому значению) значимость критерия и высокую (т.е. близкую к единичному значению) мощность критерия.

В качестве иллюстрации на рис. 4.3 приведены функции правдоподобия $p_1(z)$, $p_2(z)$ и соответствующие им кривые мощности $1-\beta(z)$ и значимости $\alpha(z)$ для случая N=17. Параметр z задает критическую область

$$Q_1=\{u\in Z:\ u\leq z\}, \tag{4.3.9}$$

по которой осуществляется суммирование в (4.3.6) и (4.3.8). На рисунке отмечена точка z, которой соответствует единичное значение отношения правдоподобия, и указана область Q_1 из (4.3.9), определяемая этой точкой.

Функция байесовского риска

Введем обозначение c_i для возможных в модели испытаний (4.2.3), (4.2.4) значений отношения правдоподобия:

$$c_i=p_2(z_i)/p_1(z_i),\quad 1\leq i\leq N. \tag{4.3.10}$$

Дополним эти значения величинами

$$c_0=0,\quad c_{N+1}=\infty \tag{4.3.11}$$

и условимся, что нумерация чисел (4.3.10), (4.3.11) выполнена в порядке возрастания их значений, т.е.

$$c_i\leq c_{i+1},\quad 0\leq i\leq N. \tag{4.3.12}$$

Поскольку при такой нумерации из включения $c\in[c_i, c_{i+1})$ вытекает выполнение неравенств

$$c_i\leq c\leq c_{i+1},$$

то проверке по отношению правдоподобия с константой сравнения c соответствует критическая область $Q_1(i)$, содержащая первые i исходов из множества (4.2.3). Т.е.

$$(\forall\ 0\le i\le N)\quad c\in[c_i, c_{i+1}) \to Q_1(i)=\{z_1,\ldots,z_i\}. \tag{4.3.13}$$

Таким образом, класс всех проверок по отношению правдоподобия (и, следовательно, класс всех байесовских решающих функций) определяется набором, содержащим N+1 критическую область:

$$Q_1(0)=\varnothing,\ldots, Q_1(i)=\{z_1,\ldots,z_i\},\ldots, Q_1(N)=Z. \tag{4.3.14}$$

Теперь для конкретного значения w, определяющего функцию потерь из (4.3.1), вычислим вероятности ζ_i из (4.3.2), при которых величина $c(\zeta_i,w)$ из (4.3.3) совпадает с числом c_i из (4.3.10), т.е.

$$c = c(\zeta_i,w) = \zeta_i/w(1-\zeta_i).$$

Отсюда

$$\zeta_i = wc_i/(1+wc_i),\quad 0\le i\le N+1, \tag{4.3.15}$$

причем, в силу (4.3.11), (4.3.12),

$$\zeta_i\le\zeta_{i+1},\quad 0\le i\le N,\qquad \zeta_0=0,\ \zeta_{N+1}=1. \tag{4.3.16}$$

Таким образом, интервал [0,1) возможных значений априорной вероятности $\zeta=\xi(1)$ появления первого состояния природы разбивается значениями из набора (4.3.15), (4.3.16) на N+1 подынтервал $[\zeta_i,\zeta_{i+1})$, $0\le i\le N$. При этом из включения $\zeta\in[\zeta_i,\zeta_{i+1})$ вытекает справедливость неравенств

$$c_i\le c(\zeta,w)< c_{i+1},$$

и, следовательно, критическая область Q_ζ байесовского критерия d_ξ (см. определение на стр. 222) совпадает с критической областью $Q_1(i)$ из (4.3.13), т.е.

$$(\forall\zeta\in[\zeta_i,\zeta_{i+1}))\quad Q_\zeta=Q_1(i)=\{z_1,\ldots,z_i\}. \tag{4.3.17}$$

Согласно (4.3.1), потери статистика имеют место лишь в случае ошибочных решений. Следовательно, математическое ожидание потерь, соответствующих критерию d, характеризуемому критической областью Q_1 и вероятностями ошибок (4.3.6), (4.3.7), определяется величиной

$$\rho(\xi, d)=L(1,2)\zeta\beta+L(2,1)(1-\zeta)\alpha, \tag{4.3.18}$$

где ζ из (4.3.2).

Согласно (4.3.6) и (4.3.7), критической области (4.3.17) соответствуют вероятности ошибок первого и второго рода, представляющие собой следующие суммы:

$$\alpha_i=p_2(z_1)+\ldots+p_2(z_i), \tag{4.3.19}$$

$$\beta_i=p_1(z_{i+1})+\ldots+p_1(z_N). \tag{4.3.20}$$

Теперь из (4.3.18)-(4.3.20) следует, что величина

$$\rho(\zeta)=\rho(\xi, d_\xi)=\zeta(\beta_i-w\alpha_i)+w\alpha_i,\quad \zeta\in[\zeta_i,\zeta_{i+1}), \tag{4.3.21}$$

соответствует ожидаемым потерям для байесовского критерия.

Согласно (4.3.21), байесовский риск $\rho(\zeta)$ является кусочно-линейной функцией параметра ζ, поскольку значения коэффициентов α_i и β_i из (4.3.19) и (4.3.20) остаются неизменными при вариации ζ в подынтервале $\zeta\in[\zeta_i,\zeta_{i+1})$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $\rho(\zeta)$ является непрерывной, поскольку линейные дуги (4.3.21) пересекаются в точках ζ_i, $1\le i\le N$. Действительно, положим

$$\zeta_i(\beta_{i-1}-w\alpha_{i-1})+w\alpha_{i-1}=\zeta_i(\beta_i-w\alpha_i)+w\alpha_i$$

и подставим в это выражение значения вероятностей ошибок из (4.3.19), (4.3.20). В результате получим равенство

$$\zeta_i = wp_2(z_i)/[\,p_1(z_i)+wp_2(z_i)],$$

совпадающее, согласно (4.3.10), с определением (4.3.15)[65]. Отметим также, что из (4.3.14) и (4.3.19)-(4.3.21) можно получить оценки

$$\rho(0)=\rho(1)=0 \qquad (4.3.22)$$

Продолжим изучение свойств байесовского риска.

Лемма 4.1 (о вогнутости инфимума семейства вогнутых функций). *Пусть функции* $\varphi_t(x)$, $t\in T$, *определенные на выпуклом множестве* X, *вогнуты по* x *на этом множестве. Тогда функция*

$$\varphi(x)=\inf_{t\in T}\varphi_t(x), \quad x\in X, \qquad (4.3.23)$$

также вогнута на множестве X, *если она существует и является конечной*[66].

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 есть две произвольные точки из множества X и точка

$$x=\gamma x_1+(1-\gamma)x_2, \quad 0\le\gamma\le 1,$$

---

[65] Ниже мы установим, что функция $\rho(\zeta)$ является вогнутой, из чего автоматически следует ее непрерывность. Тем не менее, небольшое упражнение по непосредственной проверке непрерывности риска $\rho(\zeta)$ представляется уместным в методическом плане.

[66] Заметим, что рис. 4.1 демонстрирует семейство из трех вогнутых (линейных) функций, определенных на выпуклом (отрезок [0,1]) множестве и имеющих *вогнутую* нижнюю огибающую.

есть их выпуклая комбинация, принадлежащая множеству X в силу его выпуклости. Согласно условиям леммы и определению (4.3.23), для любого $t\in T$ справедливо, что

$$\begin{gathered}\varphi_t(x)=\varphi_t(\gamma x_1+(1-\gamma)x_2)\geq \\ \geq\gamma\varphi_t(x_1)+(1-\gamma)\varphi_t(x_2)\geq\gamma\varphi(x_1)+(1-\gamma)\varphi(x_2).\end{gathered}\qquad(4.3.24)$$

Поскольку неравенства (4.3.24) имеют место при любом значении $t\in T$, то они должны быть справедливы и для функции $\varphi(x)$. Следовательно,

$$\varphi(x)=\varphi(\gamma x_1+(1-\gamma)x_2)\geq\gamma\varphi(x_1)+(1-\gamma)\varphi(x_2),$$

где $x_1,x_2\in X$ и $0\leq\gamma\leq 1$. ■

Следствие 4.1 *Функция байесовского риска* $\rho(\zeta)$ *вогнута по* ζ *на интервале* [0,1].

Доказательство. В соответствии с определением (4.2.14), (4.2.15) и учитывая (4.3.21) и возможность задания любого байесовского критерия критической областью (4.3.17) из конечного набора (4.3.14), получаем что

$$\rho(\zeta)=\min\{\rho(\xi,d)\colon d\in D\}=\min\{\zeta(\beta_i-w\alpha_i)+w\alpha_i\colon 0\leq i\leq N\}.\qquad(4.3.25)$$

Поскольку линейные функции из правой части (4.3.25) являются вогнутыми, то в соответствии с утверждением леммы их нижняя огибающая также должна быть вогнутой. ■

Пример 4.3. Второй и третий столбцы табл. 4.4 представляют значения функций правдоподобия для некоторой схемы испытаний с четырьмя возможными исходами. При этом исходы занумерованы в соответствии с правилами (4.3.10)-(4.3.12) (см. четвертый столбец таблицы). Для заданного значения w=1,5 таблица содержит также граничные точки подынтервалов из (4.3.15), (4.3.16), вероятности ошибок первого и второго рода из (4.3.19), (4.3.20) и выражения для функций

$$\rho_i(\zeta)=\zeta(\beta_i-w\alpha_i)+w\alpha_i,\ \zeta\in[0,1], \qquad (4.3.26)$$

совпадающих с байесовским риском в соответствующих подынтервалах $[\zeta_i,\zeta_{i+1})$, $0\le i\le 4$.

Таблица 4.4

i	$p_1(z_i)$	$p_2(z_i)$	c_i	ζ_i	α_i	β_i	$\rho_i(\zeta)$
0	—	—	0	0	0	1	ζ
1	0,675	0,05	0,074	0,1	0,05	0,325	$0{,}25\zeta+0{,}075$
2	0,059	0,016	0,285	0,3	0,066	0,266	$0{,}166\zeta+0{,}1$
3	0,133	0,134	1	0,6	0,2	0,133	$-0{,}166\zeta+0{,}3$
4	0,133	0,8	6	0,9	1	0	$-1{,}5\zeta+1{,}5$

Представленная на рис. 4.4 функция $\rho(\zeta)$ из (4.3.21), соответствующая данным из табл. 4.4, иллюстрирует рассмотренные выше свойства байесовского риска.

Определение 4.2 (наименее выгодного распределения). Априорное распределение ξ° из (4.3.2), при котором функция байесовского риска достигает максимального значения

$$\rho^\circ=\rho(\zeta^\circ)=\max\{\rho(\zeta)\colon 0\le\zeta\le 1\}, \qquad (4.3.27)$$

где $\zeta=\xi(1)$, называется наименее выгодным распределением вероятностей для состояний природы. Заметим, что точка ζ° является внутренней точкой интервала (0,1) и совпадает с одной из точек ζ_i, $1\le i\le N$, поскольку функция $\rho(\zeta)$ является вогнутой и имеет, согласно (4.3.22), нулевые значения на концах интервала [0,1]; см. рис. 4.4.

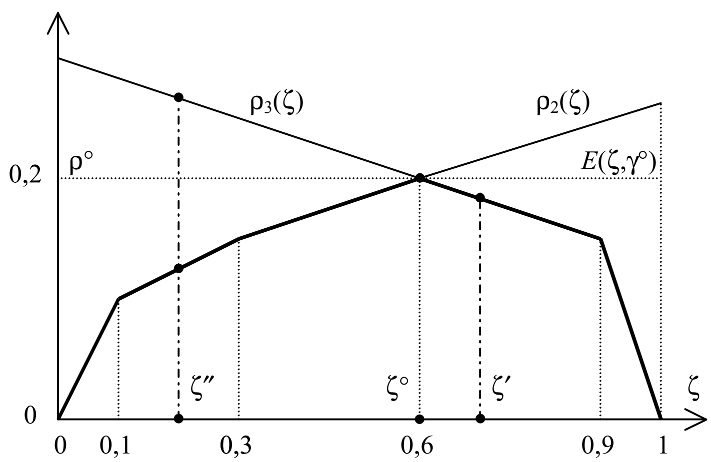

Рис. 4.4

Минимаксные критерии для задач с неизвестным априорным распределением

Рассмотрим случай, когда статистик руководствуется оценкой априорного распределения (4.2.2), задаваемой вероятностью ζ' из некоторого подынтервала $[\zeta_i,\zeta_{i+1})$. Если при этом истинному распределению соответствует значение ζ'' из того же подынтервала $[\zeta_i,\zeta_{i+1})$, то ожидаемые потери $\rho_i(\zeta'')$, определяемые функцией (4.3.26), совпадают с байесовским риском, поскольку значениям ζ' и ζ'' соответствует одна и та же критическая область $Q_1(i)$ из (4.3.17).

Возможно, однако, что истинное значение ζ'' вероятности появления первого состояния природы принадлежит другому интервалу $[\zeta_j,\zeta_{j+1})$, $j\neq i$. Тогда байесовскому критерию относительно этого распределения соответствует другая критическая область $Q_1(j)$ из (4.3.17) и, следовательно, байесовский риск $\rho(\zeta'')$ определяется выражением (4.3.21) при других вероятностях ошибок первого и второго рода. Поэтому может случиться, что ожидаемые потери $\rho_i(\zeta'')$ окажутся значительно больше потерь $\rho_j(\zeta'')$, соответствующих байесовскому риску. Более того, они могут оказаться выше, чем максимально возможный байесовский риск ρ° из (4.3.27). рис. 4.4 иллюстрирует такой случай.

В связи с этим, в случае неизвестного априорного распределения для состояний природы, целесообразно использовать минимаксную стратегию, гарантирующую уровень ожидаемых потерь не превышающий значения ρ° из (4.3.27).

В рассматриваемом классе задач такая стратегия может быть построена как случайная смесь двух чистых стратегий. Эти чистые стратегии задаются критическими областями $Q_1(i-1)$ и $Q_1(i)$. При этом номер i соответствует точке ζ_i, в которой достигается максимум функции $\rho(\zeta)$, т.е. $\zeta_i=\zeta^\circ$. Указанным областям $Q_1(i-1)$ и $Q_1(i)$ соответствуют функции $\rho_{i-1}(\zeta)$ и $\rho_i(\zeta)$ из (4.3.26), удовлетворяющие условиям:

$$\rho_{i-1}(\zeta^\circ)=\rho_i(\zeta^\circ)=\rho^\circ, \qquad (4.3.28)$$

$$\beta_{i-1}-w\alpha_{i-1}>0>\beta_i-w\alpha_i. \qquad (4.3.29)$$

Пусть критическая область $Q_1(i-1)$ используется с вероятностью γ, а область $Q_1(i)$ — с вероятностью $1-\gamma$ $(0\le\gamma\le1)$. Тогда ожидаемые потери статистика определяются взвешенной суммой

$$E(\zeta,\gamma)=\gamma\rho_{i-1}(\zeta)+(1-\gamma)\rho_i(\zeta). \qquad (4.3.30)$$

В силу (4.3.28) и (4.3.29), существует значение γ°, $0<\gamma^\circ<1$, обеспечивающее выполнение равенств

$$E(\zeta,\gamma^\circ)=\rho^\circ, \quad 0\le\zeta\le1. \qquad (4.3.31)$$

Следовательно, смешанная стратегия, определенная значением γ° из (4.3.31), является минимаксной стратегией статистика.

Подставим правую часть выражения (4.3.26) во взвешенную сумму (4.3.30). В полученном выражении приравняем к нулю коэффициент при ζ и из этого равенства выведем формулу для значения вероятности γ°, удовлетворяющего условию (4.3.31):

$$\gamma^\circ=(w\alpha_i-\beta_i)/[\,p_1(z_i)+wp_2(z_i)]. \qquad (4.3.32)$$

При этом

$$\rho^\circ=w[\alpha_i-\gamma^\circ p_2(z_i)]. \qquad (4.3.33)$$

В качестве иллюстрации укажем, что для функции байесовских потерь, представленной на рис. 4.4, условие (4.3.29) выполняется для значения i=3 и, согласно (4.3.32) и (4.3.33), имеют место оценки γ°=0,5 и ρ°=0,2. Следовательно, минимаксная стратегия для примера, характеризуемого данными из табл. 4.4, обеспечивается равновероятным использованием критических областей $Q_1(2)=\{z_1, z_2\}$ и $Q_1(3)=\{z_1, z_2, z_3\}$.

Замечание 4.4. Поскольку $Q_1(i-1)\subset Q_1(i)$, то попадание выборочной точки z в критическую область $Q_1(i-1)$ ведет к отвержению нуль-гипотезы независимо от того, какой из двух критериев будет выбран рулеткой, соответствующей рассмотренной смешанной стратегии. Принятие нуль-гипотезы при появлении любого исхода z_j, $i<j\le N$, также не зависит от результата случайного выбора критериев. Случайный выбор оказывается существенным лишь в случае, когда исходом испытания является значение z_i, поскольку $z_i\notin Q_1(i-1)$ и $z_i\in Q_1(i)$.

В связи с этим естественно задавать процедуру случайного выбора с помощью набора *условных* распределений вида:

$$\eta_z=(\eta(1/z),\eta(2/z))\in S_2,\quad z\in Z, \qquad (4.3.34)$$

где $\eta(1/z)$ есть вероятность отвержения нуль-гипотезы после наблюдения выборочной точки z, а $\eta(2/z)$ есть вероятность ее принятия при том же условии. При этом набор (4.3.34) условных распределений η_z, обеспечивающий реализацию указанной процедуры, определяется следующими условиями (эти условия гарантируют тот же уровень ожидаемых потерь, что и рассмотренная выше минимаксная стратегия):

$$\eta(1/z_j)=\begin{cases}1, & 1\le j<i,\\ 1-\gamma^\circ, & i=j,\\ 0, & i<j\le N,\end{cases}\quad \eta(2/z_j)=\begin{cases}0, & 1\le j<i,\\ \gamma^\circ, & i=j,\\ 1, & i<j\le N.\end{cases}\qquad (4.3.35)$$

Как следует из вида распределений (4.3.35), фактический запуск случайного механизма необходим лишь в тех случаях, когда исход испытания совпадает с (единственным) значением z_i.

Отметим еще одно обстоятельство. Как следует из (4.2.14) и (4.2.16), байесовское решение относительно любого заданного распределения ξ достижимо в классе *чистых* стратегий $d\in D$. В случае, когда одна из функций $\rho_i(\zeta)$ из (4.3.26) удовлетворяет условию $\beta_i=w\alpha_i$ и, следовательно[67],

$$\rho_i(\zeta)=\rho^\circ,\quad 0\le\zeta\le 1, \qquad (4.3.36)$$

критерий, определяемый критической областью $Q_1(i)$, является *чистой* минимаксной стратегией статистика. Однако, в общем случае, условия (4.3.36) могут не иметь места. Тогда минимаксная стратегия статистика реализуема лишь в классе процедур, использующих случайные механизмы выбора.

Проверка по отношению правдоподобия в случае трех решений

Во многих задачах выбора решений в условиях неопределенности окончательному выбору могут предшествовать несколько стадий оценки текущего состояния природы. При этом на после-

---

[67] Равенства (4.3.36) являются следствием вогнутости функции байесовского риска.

дующих стадиях применяются более точные (и обычно более дорогие) схемы проведения испытаний.

Ограничим наше рассмотрение случаем, когда возможны лишь две такие стадии. При этом начальная стадия включает проведение некоторого испытания и принятие (на основании полученных результатов) одного из *трех* решений. Первые два решения соответствуют выбору одной из двух простых гипотез. Третий вариант предполагает проведение *дополнительных* испытаний, завершающихся окончательным выбором гипотезы. Примем, что реализация третьего варианта передается другому исполнителю. Ожидаемые потери для этого случая будем считать известными.

Таким образом, мы рассматриваем операцию, в которой m=2, n=3 и матрица потерь задана коэффициентами из табл. 4.5.

табл. 4.5

Матрица потерь	Решения статистика		
Состояния природы	a=1	a=2	a=3
ω=1	0	w_{12}	w_{13}
ω=2	w_{21}	0	w_{31}

При этом, согласно (4.2.5)-(4.2.7) и (4.2.12), значения апостериорного риска $\rho(\xi_z, a)$, соответствующие решению a=$d(z)$, определяются следующими формулами:

$$\rho(\xi_z,1)=(1-\zeta)w_{21}\, p_2(z)/p(z), \qquad (4.3.37)$$

$$\rho(\xi_z,2)= \zeta w_{12}\, p_1(z)/p(z), \qquad (4.3.38)$$

$$\rho(\xi_z,3)= [\zeta w_{13}\, p_1(z)+ (1-\zeta)w_{23}\, p_2(z)]/p(z), \qquad (4.3.39)$$

где $p(z)$ из (4.2.7) и ξ из (4.3.2). Далее, в соответствии с (4.2.16), байесовское решение $a_z=d_\xi(z)$ определяется условиями:

$$\rho(\xi_z,1)<\rho(\xi_z,2),\ \rho(\xi_z,1)<\rho(\xi_z,3)\ \rightarrow\ a_z=1,$$

$$\rho(\xi_z,2)\le\rho(\xi_z,1),\ \rho(\xi_z,2)<\rho(\xi_z,3)\ \rightarrow\ a_z=2,$$

$$\rho(\xi_z,3)\le\rho(\xi_z,1),\ \rho(\xi_z,3)\le\rho(\xi_z,2)\ \rightarrow\ a_z=3.$$

Эти условия (после подстановки в них правых частей из выражений (4.3.37)-(4.3.39)) преобразуются к виду:

$$R(z)< c_1,\ R(z)< c_3\ \rightarrow\ a_z=1, \tag{4.3.40}$$

$$R(z)\ge c_3,\ R(z)> c_2\ \rightarrow\ a_z=2, \tag{4.3.41}$$

$$c_1\le R(z)\le c_2\ \rightarrow\ a_z=3,$$

где

$$c_1=\zeta w_{13}/(1-\zeta)(w_{21}-w_{23}), \tag{4.3.42}$$

$$c_2=\zeta(w_{12}-w_{13})/(1-\zeta)w_{23}, \tag{4.3.43}$$

$$c_3=\zeta w_{12}/(1-\zeta)w_{21},$$

и символ $R(z)$ соответствует отношению правдоподобия, т.е.

$$R(z)=p_2(z)/p_1(z).$$

Заметим, что применимость третьего решения предполагает выполнение условия $c_1\le c_2$, которое эквивалентно следующему неравенству для коэффициентов матрицы потерь:

$$w_{12}w_{21}\ge w_{13}w_{21}+w_{12}w_{23}. \tag{4.3.44}$$

Примем, что неравенство (4.3.44) является справедливым.

Тогда неравенства $c_1 < c_3 < c_2$ также являются справедливыми, что устанавливается непосредственной проверкой. Поэтому в условиях (4.3.40) достаточно выполнения лишь первого неравенства, а в условиях (4.3.41) — второго неравенства.

Таким образом, в рассмотренном случае (m=2, n=3) байесовский критерий d_ξ сводится к следующей модификации проверки по отношению правдоподобия:

$$p_2(z)/p_1(z)\in I_a \ \to \ d_\xi(z)=a,$$

где

$$I_1=[0,c_1), \quad I_2=(c_2,\infty), \ I_3=[c_1, c_2]$$

и c_1, c_2 соответственно из (4.3.42), (4.3.43).