МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

УДК 539.3

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ГОДУНОВА В ОБЛАСТИ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ

М.Х. Абузяров

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

abouziar@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Приводится анализ устойчивости схемы Годунова для уравнений Эйлера, учитывающий нелинейное поведение решений в зонах больших градиентов (ударные волны, контактные разрывы). Получены оценки развития возмущений с учетом вклада нелинейных членов точного решения задачи распада разрыва, показывающие неустойчивость оригинальной схемы Годунова и объясняющие механизм развития так называемого «феномена карбункула». Показана возможность введения корректирующих поправок, обеспечивающих устойчивость и не меняющих аппроксимацию, как оригинальной схемы, так и ее модификации второго порядка точности. Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие эффективность полученных коррекций.

Ключевые слова: схема Годунова, ударные волны, контактные разрывы, нелинейная неустойчивость, феномен карбункула.

Разностная схема Годунова [1], основанная на точном решении задачи распада разрыва, и ее многочисленные модификации широко используются при расчетах течений с ударными волнами. С ростом мощности компьютеров появилась возможность все более подробно рассчитывать течения в области разрывных решений. При этом в ряде случаев с увеличением дискретизации вместо уточнения происходила потеря устойчивости и разрушение решения [2, 3]. Характерный случай (так называемый «carbuncle phenomenon») – потеря устойчивости при гиперзвуковом обтекании цилиндра показан на рис. 1 для числа Маха M = 10 (сетка 200×200).

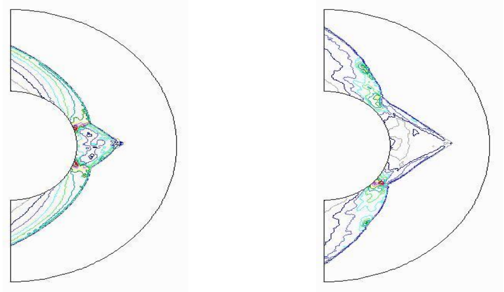

Рис. 1

Этот термин также стали применять к потере устойчивости при моделировании распространения плоской ударной волны в канале – одномерная задача моделируется как двумерная, происходит генерация и рост паразитных нормальных осцилляций, приводящих к потере одномерности и разрушению ударного фронта. В многочисленных публикациях по данной теме нет удовлетворительного объяснения механизма генерации нефизичных осцилляций, попытки анализа ограничивались линеаризованными уравнениями, а рекомендации по коррекции неустойчивости фактически сводятся к значительному увеличению схемной вязкости (больше вязкости схемы Годунова 1 порядка) или к фиксации энтропии в области разрывов. В данном исследовании для анализа устойчивости нелинейных уравнений применен подход, использованный в [4].

Области контактных разрывов и ударных волн являются достаточно узкими и плоскими. Локально их можно рассматривать как течения, близкие к одномерным, перпендикулярные плоскости разрыва, с большими градиентами в направлении, перпендикулярном разрыву, и незначительными в плоскости, касательной разрыву. Такое допущение позволяет проанализировать устойчивость схемы Годунова для нелинейных уравнений Эйлера. В этом случае для сверхзвуковых течений решение задачи распада разрыва в нормальном к разрыву направлении берется невозмущенным «вверх по потоку», а в касательном к разрыву достаточно акустического решения. Запишем для ячейки с центром в i, j (i и u – индексы и скорости, перпендикулярные разрыву, – x-направление; j и v – соответственно индексы и скорости, касательные разрыву, – y-направление) скорость v на новом временном слое (верхние индексы соответствуют параметрам на верхнем временном слое, а половинные – распадным параметрам):

$$\begin{aligned} v^{i,j} &= v_{i,j} + [P_{i,j-1/2} - P_{i,j+1/2}]\Delta t/(\Delta y \rho^{i,j}) + \\ &+ [(\rho u)_{i-1/2,j}(v_{i-1/2,j} - v_{i,j}) - \\ &- (\rho u)_{i+1/2,j}(v_{i+1/2,j} - v_{i,j})]\Delta t/(\Delta x \rho^{i,j}) + \\ &+ [(\rho v)_{i,j-1/2}(v_{i,j-1/2} - v_{i,j}) - \\ &- (\rho v)_{i,j+1/2}(v_{i,j+1/2} - v_{i,j})]\Delta t/(\Delta y \rho^{i,j}). \quad (1) \end{aligned}$$

Предположим, что течение – сверхзвуковой контактный разрыв с параметрами $u_{i,j} = u + I * \hat{u}$, $v_{i,j} = v + I * \hat{v}$, $p_{i,j} = p + I * \hat{p}$, где $I = (-1)^{i+j}$, а величины с крышечками – возмущения соответствующих параметров; средняя скорость в касательном направлении к разрыву $v = 0$, тогда после выбора соответствующих распадных значений имеем для касательной компоненты скорости

$$\hat{v}^{i,j} = \hat{v} - 2\hat{v} * \left(\frac{\rho_{i,j}}{\rho^{i,j}} c_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta y} + \frac{\rho_{i-1,j}}{\rho^{i,j}} u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + o(\hat{v}). \quad (2)$$

При $\rho_{i,j}/\rho^{i,j} \approx \rho_{i-1,j}/\rho^{i,j} \approx 1$ и $\Delta x = \Delta y$ оценка (2) для линеаризованных уравнений Эйлера переходит в оценку

$$\hat{v}^{i,j} = \hat{v} - 2\hat{v} * (c+u)\frac{\Delta t}{\Delta x} + o(\hat{v}) \quad (3)$$

и соответствующее условие устойчивости Куранта $\Delta t \le \Delta x/(c+u)$, что подтверждает правильность рассуждений и непригодность этого критерия в области контактного разрыва. Для ударной волны все аналогично.

Очевидно, что в области разрыва соотношения плотностей

$$\rho_{i,j}/\rho^{i,j}, \quad \rho_{i-1,j}/\rho^{i,j} \quad (4)$$

могут быть сколь угодно велики. Из оценки (2) просматриваются два пути восстановления устойчивости схемы. Первый путь – уменьшение шага интегрирования в соответствии с параметрами (4) на разрыве или нефизичное ограничение соотношений (4) фиксацией энтропии; второй – увеличение схемной вязкости и большее размазывание разрыва с целью уменьшения (4) и близкий к нему по смыслу подход с использованием сеток, диагональных к разрыву. В ряде случаев это помогает [2, 3], но с увеличением градиентов и дискретизации ситуация может повториться. Возможен третий путь – введение в схему стабилизирующих возмущений, не влияющих на аппроксимацию [4]. Это введение в схему компенсирующих добавок имеет для уравнения (2) вид:

$$-2\hat{v} * \left(\frac{\rho^{i,j} - \rho_{i,j}}{\rho^{i,j}} c_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta y} + \frac{\rho^{i,j} - \rho_{i-1,j}}{\rho^{i,j}} u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right), \quad (5)$$

при этом оценка (2) перейдет в (3). Естественно, возмущения скорости $\hat{v}$ должны быть определены с соответствующей аппроксимацией. Корректирующие добавки вида (5) могут быть введены в потоковые члены, но более удобно корректировать схему на этапе интегрирования. Оценка устойчивости (2) и, соответственно, коррекция вида (5) получены для схемы Годунова 1 порядка точности, для схем повышенной точности или с упрощенной задачей распада разрыва не удалось получить таких простых зависимостей. Соотношение (2) имеет универсальный характер и, видимо, с точностью до небольших поправок применительно ко многим методам по следующей причине: на разрывных решениях схемы должны вести себя близко к схеме Годунова первого порядка точности. Соответственно и поправки устойчивости вида (5), возможно, будут пригодны для коррекции ряда методик, близких к методике Годунова. Автор использовал добавки вида (5) для коррекции схем как первого, так и второго порядка точности. Для схемы первого порядка осцилляции не возрастают и остаются на уровне машинной точности. Для схемы второго порядка с разрешением на контактном разрыве, близким к PPM Colella, в наиболее напряженном тесте (распространение плоского фронта взрывной волны) в области контактного разрыва флуктуации развиваются, но остаются ограниченными и не превышают 3%.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (грант № 09-07-00228а).

Список литературы

1. Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

2. Quirk J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluid. 1994. V. 18. P. 555–574.

3. Gressier J., Moschetta J.M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations // Int. J. Numer. Meth. Fluid. 2000. V. 33. P. 313–332.

4. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. Machinery of numerical instability in conservative difference approximations for compressible Euler equations // Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics / Ed. S. Nishibata. Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, July 2003. P. 178–191.

ON THE INSTABILITY OF GODUNOV'S METHOD IN THE FIELD OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS

M.H. Abouzyarov

The present paper analyzes the stability of Godunov's scheme for Euler equations, accounting for the nonlinear behavior of solutions in the zones of large gradients (shock waves, contact breakages). The development of perturbations is assessed, including the contribution of nonlinear terms of the exact solution of the breakage decomposition problem, demonstrating instability of the original Godunov's scheme and explaining the development mechanism of the so-called «carbuncle phenomenon». A possibility of introducing corrections for providing the stability without changing the approximation of the original scheme or of its second-order accuracy modification is shown. The results of numerical modeling demonstrating the efficiency of the obtained corrections are presented.

Keywords: Godunov's scheme, shock wave, contact breakage, nonlinear instability, carbuncle phenomenon.