УДК 532.526

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ И МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Ю.А. Крашаница

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского (ХАИ), Харьков (Украина)

u.krashanitsa@khai.edu

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлено решение стационарной задачи обтекания пространственных телесных несущих систем потоком вязкой несжимаемой жидкости на базе полной системы уравнений Навье – Стокса. На базе аппарата векторно-тензорного анализа доказано, что наиболее эффективным методом решения широкого спектра краевых задач механики сплошных сред является метод граничных интегральных уравнений. Показаны результаты численной реализации с целью определения основных кинематических и динамических характеристик взаимодействия вязкого потока с несущей поверхностью, а также исследования сходимости вычислительного процесса.

Ключевые слова: система уравнений Навье – Стокса, интегральные представления решений, численная реализация метода граничных интегральных уравнений, кинематические и динамические характеристики несущих систем.

Поставлена стационарная задача [1] обтекания пространственных телесных несущих систем потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). На рисунке изображено неподвижное тело (S) в стационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости

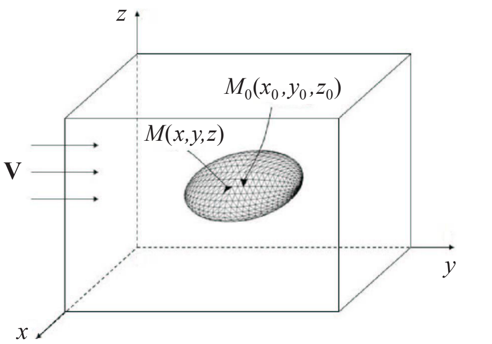

Рис. 1

внутри контрольного объема (Σ).

Наиболее эффективный метод решения широкого спектра краевых задач механики сплошных сред – метод граничных интегральных уравнений [2].

При отсутствии внутренних моментов и температурных воздействий математической моделью аэрогидродинамики для несжимаемой жидкости является известная система законов сохранения массы

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ – скорость потока жидкости, и импульса

$$(\nabla, (\mathbf{V} * \mathbf{V})) = \left(\nabla, \left(-\mathbf{I}\frac{p}{\rho} + \nu(\nabla\mathbf{V} + \nabla^*\mathbf{V})\right)\right). \tag{2}$$

Тензор $\nabla^*\mathbf{V}$ – сопряженный тензору $\nabla\mathbf{V}$, ρ – плотность среды, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Кроме этого, целесообразно исследовать закон сохранения завихренности $\mathbf{\Omega} = [\nabla, \mathbf{V}]$:

$$[\nabla, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}] + \nu[\nabla, [\nabla, \mathbf{\Omega}]] = 0, \tag{3}$$

как важнейшей кинематической характеристики взаимодействия вязкого потока с обтекаемым телом.

Решения системы дифференциальных законов сохранения (1)–(3) подчиняются естественным граничным условиям:

$$\mathbf{V}\big|_{S+\Sigma} = \mathbf{U}^{S+\Sigma}(s,\tau), \quad p\big|_{\Sigma} = p_\infty,$$
$$\mathbf{\Omega}\big|_S = 0, \quad \mathbf{\Omega}\big|_\Sigma = 0, \tag{4}$$

$\mathbf{V}|_S$ – скорость точек жидкости на поверхности исследуемого тела и $\mathbf{U}^{S+\Sigma}(s, \tau)$ является граничным условием в конкретном случае, зависящем от поверхностных координат (s, τ).

Основная задача векторного анализа – определение векторного поля $\mathbf{V}$ по заданным расходимости

$$(\nabla, \mathbf{V}) = q, \tag{5}$$

и завихренности:

$$[\nabla, \mathbf{V}] = \mathbf{\Omega}, \tag{6}$$

где функция интенсивности плотности притока массы q известна, а вектор завихренности $\mathbf{\Omega}$ подлежит определению.

При этом в соответствии с теоремами векторного анализа и положениями теории краевых задач математической физики должны быть согласованы естественные граничные условия математической модели (1)–(4). Таким образом, необходимо решить краевую задачу (1)–(4), например, в R^3.

Пусть $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{\Omega}$, φ, $q \in C^2$. Тогда для уравнений (5), (6) можно построить дифференциальные операторы второго порядка:

$$\nabla(\nabla, \mathbf{V}) = \nabla q, \quad \nabla(\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0. \tag{7}$$

Нетрудно доказать [3], что тензор $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}\varphi$ — $[\mathbf{I}, \mathbf{G}]$, где $\varphi|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^3, а вектор $\mathbf{G} \in C^2(E)$ определяется условием консервативности:

$$(\nabla, \mathbf{\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \nabla\varphi = [\nabla, \mathbf{G}], \tag{8}$$

является фундаментальным решением дифференциальных операторов в уравнениях (7), то есть

$$\nabla(\nabla, \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{I}\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \tag{9}$$

где $\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ – функция Дирака, зависящая от двух точек пространства.

Консервативность закона сохранения импульса (2) позволяет выписать обобщенный интеграл Бернулли:

$$\mathbf{V} * \mathbf{V} + \mathbf{I}\frac{p}{\rho} + \nu(\nabla^* \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}) = \nabla^* \mathbf{\Psi}, \tag{10}$$

где выбор векторного потенциала $\mathbf{\Psi}$, в силу консервативности левой части выражения (2), должен быть подчинен условию

$$\nabla(\nabla, \mathbf{\Psi}) = 0, \tag{11}$$

то есть вектор $\mathbf{\Psi}$ принадлежит к классу решений уравнений типа (7).

Аналогично закон сохранения завихренности $\mathbf{\Omega}$ (см. (3)) имеет интеграл

$$\mathbf{I}[\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}] + \nu(\nabla^* \mathbf{\Omega} - \nabla^* \mathbf{\Omega}) = \nabla^* \mathbf{\Phi}, \tag{12}$$

векторный потенциал которого является решением уравнения (11)

$$\nabla(\nabla \mathbf{\Phi}) = 0. \tag{13}$$

Интегрируя по пространству (τ) комбинацию дифференциальных операторов (9), (7), (11), (13) (для произвольного вектора $\mathbf{a}$), после стандартного предельного перехода и с учетом свойств потенциала двойного слоя [4] фундаментального решения уравнения Лапласа в R^3 имеем интегральное представление решения:

$$\mathbf{a} = -\iiint_{\tau} (\nabla q, \mathbf{\Gamma})\, d\tau + \oiint_{(S+\Sigma)} \left\{ \left(\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} + [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}]] \right), \mathbf{\Gamma} - (\mathbf{n}, \mathbf{\Gamma})(\nabla, \mathbf{a}) \right) - \left(\mathbf{a}, \left(\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} + [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Gamma}]] \right) \right) \right\} dS. \tag{14}$$

Это выражение – источник получения интегральных представлений решений задачи определения основных кинематических и динамических характеристик при взаимодействии движущейся вязкой среды с твердым телом. Здесь все дифференциальные операции являются линейными комбинациями характеристик задачи и потенциалов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Phi}$.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

2. Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics / Ed. T. Cruse, F. Rizzo. N.Y.: The American Society of Mechanical Engineers, 1975. 178 p.

3. Крашаница Ю.А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) // Вісник Дніпропетровського університету. 2000. В. 3, Т. 1. С. 52–56.

4. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415 с.

THE THEORY OF GENERALIZED HYDRODYNAMIC POTENTIALS AND THE METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS

Yu.A. Krashanitsa

A solution of the stationary flow problem of spatial bodily lifting system of a viscous incompressible fluid based on the full Navier – Stokes equations is presented. Based on the developed apparatus of vector-tensor analysis,it is proved that the most effective method for solving a wide spectrum of boundary value problems of continuum mechanics is the method of boundary integral equations. The results of numerical implementation for determining the main cinematic and dynamic characteristics of the interaction of a viscous flow of the carrier surface are given, as well as of the study of the convergence of the computational process.

Keywords: Navier – Stokes equations, integral representations of solutions, numerical implementation of boundary integral equation method, the kinematics and dynamic characteristics of the carrier systems.