УДК 532.516.013.4;536.25

ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ В ПРОНИКАЮЩЕЙ КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

 Д.В. Кузнецова, И.Н. Сибгатуллин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

morven9@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется развитие конвективной неустойчивости в плоском слое воды, для которой зависимость плотности от температуры принимается квадратичной с максимумом при 4 °С. Изучается двумерная постановка для случая, когда точка максимума плотности в статическом состоянии находится посередине слоя. Особое внимание уделяется выбору горизонтального масштаба движения для изучения перехода к стохастическому режиму. Исследуются области гистерезиса, в которых сосуществуют течения с разной структурой и существенно отличающимися тепловыми потоками, что проиллюстрировано зависимостью числа Нуссельта от надкритичности. Показаны особенности формирования стационарных и периодических режимов. Описан переход к стохастическому режиму.

Ключевые слова: максимум плотности, проникающая конвекция, гидродинамическая неустойчивость, переходные режимы, гистерезис, нелинейная динамика.

Постановка задачи и метод решения

Рассматривается плоский горизонтальный бесконечный слой воды высотой h. В качестве уравнения состояния принимается зависимость [1]:

$$\rho = \rho_4(1 - \alpha_4 (T - T_4)^2),$$

где ρ_4 – плотность при 4 °С, $\alpha_4 = 7.68\cdot 10^{-6}$ (°С)$^{-2}$.

Граничные условия – свободные плоские изотермические границы с температурами T_b и T_u при $z = 0$ и $z = h$ соответственно. При этом считаем, что точка максимума плотности находится внутри слоя, т.е.

$$\min(T_b, T_u) < T_4 < \max(T_b, T_u).$$

Функции, характеризующие движение (плотность, давление, скорость и температура), представляются в виде суммы соответствующих величин в статическом распределении и наложенных возмущений (обозначенных штрихами):

$$T = T_b + T_0(z) + T', \quad p = p_0(z) + p',$$

$$\rho = \rho_4 + \rho_0(z) + \rho'.$$

Для системы уравнений Навье – Стокса, неразрывности и энергии принимается приближение Буссинеска (справедливость приближения Буссинеска для данного случая исследовалась в [2]). С учетом этого после обезразмеривания получаем следующую систему уравнений для возмущений относительно скорости $v = \{u, w\}$ и температуры T:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (v'\cdot\nabla)v' = -\sigma\nabla p' + \sigma\Delta v' + \sigma R T'(T + 2\lambda - 2z)e_z,$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (v'\cdot\nabla)T' - w' = \Delta T',$$

$$\operatorname{div} v' = 0,$$

где $\sigma = \nu/\kappa$ – число Прандтля (для воды при 4 °С σ = 11.5968); $R = g\alpha_4 h^3(T_b - T_u)^2/\nu\kappa$ – число Рэлея; $\lambda = (T_b - T_4)/(T_b - T_u)$ – параметр, характеризующий положение точки максимума плотности в слое для статического распределения. Влияние аналогичного параметра на критическое значение числа Рэлея рассматривалось в [3–5].

В двухмерной постановке граничные условия для возмущений примут вид:

$$z = 0, \quad z = 1: w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad T = 0.$$

Каждая из функций u, w, T предполагается периодической по оси x (вводится дополнительный параметр – волновое число α), на боковых границах ставятся условия отсутствия касательных напряжений. С учетом этих предположений решение представляется в виде отрезка ряда Фурье, точно удовлетворяющего данным граничным условиям. Устойчивость таких решений для бесконечного слоя исследовалась с помощью расчетов на ячейках с большим периодом.

Для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений ставится задача

Коши, система решается с помощью псевдоспектрального метода [6].

Полученные результаты

Проникающая конвекция характеризуется наличием устойчивого (верхнего) и неустойчивого (нижнего) слоев в статическом состоянии, развивающиеся начальные возмущения проникают из неустойчивой области в устойчивую [1, 3, 4, 7]. При развитии движения устойчивый слой проявляется в существовании дополнительных вихрей вблизи верхней границы. Средняя температура в ячейке близка к температуре на нижней границе. Возникающий периодический режим существенно отличается от классической конвекции и характеризуется синхронизованными колебаниями нижней части вертикально вытянутых профилей температуры (своеобразных «хвостов»), которые двигаются в ячейке зеркально-симметрично.

Проводилось исследование зависимости горизонтального масштаба ячейки периодичности. Был определен характерный размер по структуре решения при расчетах на больших длинах.

Найдены области гистерезиса, в которых одновременно могут существовать два различных режима течения. При малой надкритичности наблюдается конечноамплитудная неустойчивость. Области гистерезиса видны на рис. 1, где показана зависимость среднего числа Нуссельта от разности температур на границах.

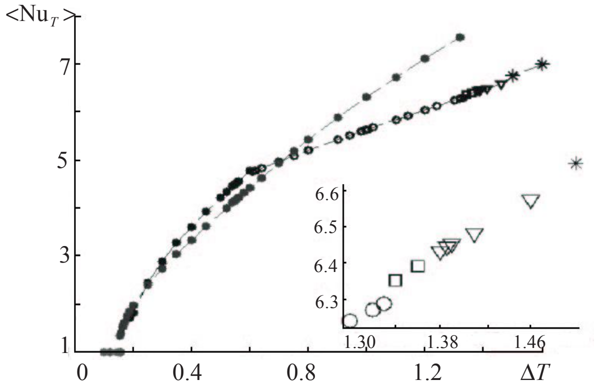

Рис. 1

На рисунке обозначено: • – стационарный режим; ∘ – периодический режим с одним максимумом; □ – периодический режим с двумя максимумами; ∇ – квазипериодический режим; ∗ – стохастический режим.

На одной из кривых сохраняется стационарный режим. На второй происходит смена режимов: после стационарного режима возникает периодический, затем происходит удвоение периода и появляется двоякопериодический режим, затем – квазипериодический режим. Данный переход можно описать с помощью построения аттракторов в пространстве коэффициентов Фурье. Характерный аттрактор для квазипериодического режима показан на рис. 2, точками выделено сечение Пуанкаре, представляющее собой замкнутую кривую.

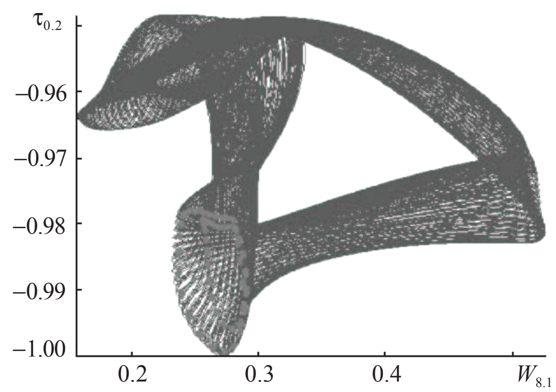

Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-08-00390-а.

Список литературы

1. Veronis G. Penetrative convection // Astrophys. J. 1963. V. 137. P. 641–663.
2. Надолин К.А. О проникающей конвекции в приближении изотермически несжимаемой жидкости // МЖГ. 1966. №2. С. 40–52.
3. Musman S. Penetrative convection // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 343–360.
4. Blake K.R., Poulikakos D., Bejan A. Natural convection near 4° in a horizontal water layer heated from below // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 2608–2616.
5. Надолин К.А. Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // МЖГ. 1989. №1. С. 43–49.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
7. Moore D.R., Weiss N.O. Nonlinear penetrative convection // J. Fluid Mech. 1973. V. 61. P. 553–581.

TRANSITIONAL REGIMES OF PENETRATIVE CONVECTION IN A PLAIN LAYER

D.V. Kuznetsova, I.N. Sibgatullin

The development of the convective instability in a plain layer of water is considered. The density-temperature relation is taken as a quadratic function with a maximum at 4°C. A two-dimensional formulation of the problem is investigated for the case where the point of the density maximum is in the middle plane of the layer in the static state. To study the transition to the stochastic mode, the horizontal scale of the motion was chosen with particular attention. The areas of the hysteresis are explored when motions with different flow structure and different heat fluxes exist, which was illustrated by the dependence of the Nusselt number on super-criticality. The specifics of the formation of steady and periodic regimes are shown. The transition to the stochastic mode is described.

Keywords: density maximum, penetrative convection, hydrodynamic instability, transitional regimes, hysteresis, nonlinear dynamics.