

УДК 532.546

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ  
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ**© 2011 г. *Э.Н. Береславский, Л.А. Александрова, Н.В. Захаренкова, Е.В. Пестерев*

Санкт-Петербургский госуниверситет гражданской авиации

eduber@mail.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

Исследуются фильтрационные течения с неизвестными свободными границами: под гидротехническим сооружением с участками постоянной скорости обтекания при наличии водоупора сложной конфигурации; под шпунтом Жуковского через орошаемый грунтовой массив, подстилаемый сильнопроницаемым напорным горизонтом, левая полубесконечная часть кровли которого моделируется непроницаемым включением; из каналов через почвенный слой с нижележащим хорошо проницаемым водоносным горизонтом с учетом капиллярности грунта и испарения со свободной поверхности. Для их изучения формулируются и решаются смешанные многопараметрические краевые задачи теории аналитических функций.

*Ключевые слова:* фильтрация, грунтовые и подземные воды, плотина, шпунт, комплексная скорость, конформные отображения.

В рамках теории плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси в однородном и изотропном грунте рассматриваются задачи подземной гидромеханики, связанные с фильтрационными течениями с неизвестными свободными границами.

**1. Течение под плотиной**

Строится подземный контур заглубленной прямоугольной плотины постоянной скорости фильтрации в том случае, когда водопроницаемое основание подстилается водоупором, состоящим из горизонтального и двух криволинейных участков, характеризуемым постоянством скорости обтекания.

Рассматриваемая задача в подобной постановке относится к так называемым смешанным обратным краевым задачам теории фильтрации, т.е. к задачам, в которых одни участки границы области известны, а другие подлежат определению. Отметим, что впервые обратный подход к фильтрационному расчету подземного контура плотин был применен в известных работах П.Я. Полубариновой-Кочиной и И.Н. Кочиной [1, 2], которые дали толчок к развитию целого направления – отысканию контуров гидротехнических сооружений по каким-либо заданным на них свойствам – и породили многочисленные работы, принадлежащие, главным образом, казанской школе математиков и механиков (М.Т. Нужин, Г.Г. Тумашев, Н.Б. Ильин-

ский, Р.Б. Салимов, Н.Д. Якимов, А.М. Елизаров и др.).

В отличие от известных работ по данной тематике, где до сих пор приходилось встречаться с течениями лишь в полубесконечных или бесконечных областях, предлагается модель подземного контура плотины, но уже в ограниченной области. Кроме того, по сравнению с предыдущими исследованиями дается не только построение плавного подземного контура плотины, но и определяется очертание подстилающего водопроницаемое основание криволинейного водоупора, характеризуемого постоянством скорости обтекания [3–5]. Подчеркнем, что именно введение подобных криволинейных участков позволяет перейти от рассмотрения малореальных бесконечных областей к моделированию в конечных областях, что особенно важно при разработке и тестировании различных приближенных и численных методов (МКЭ, МГИУ и т.п.).

**2. Течение при обтекании  
шпунта Жуковского**

В задачах об обтекании шпунта применение функции Жуковского лишь тогда приводит к эффективным результатам, когда, помимо свободной поверхности, граница области течения содержит только горизонтальные линии равно-го потенциала и вертикальные линии тока (исследования В.В. Ведерникова, В.И. Аравина,

Ф.Б. Нельсон-Скорнякова и др.). Однако в реальных условиях гидротехнического строительства, орошаемого земледелия и т.п. непосредственно под покровными отложениями наряду с горизонтальными напорными водоносными пластами более высокой проницаемости зачастую встречаются и горизонтальные водонепроницаемые включения, что отражается на характере фильтрационных процессов.

Изучается течение жидкости под шпунтом Жуковского через орошаемый грунтовой массив с нижележащим сильнопроницаемым водоносным горизонтом, который содержит напорные подземные воды; левая полубесконечная часть его кровли моделируется непроницаемым включением [6, 7].

### 3. Течение из каналов

В задачах о течении из каналов (исследования проводили В.В. Ведерников, Б.К. Ризенкамф, Н.Н. Веригин, С.Н. Нумеров, В.А. Васильев, В.А. Барон, В.Н. Эмих, А.Р. Касимов и др.) учет одновременного влияния таких важных факторов, как капиллярность грунта, испарение со свободной поверхности и подпор со стороны вод нижележащего хорошо проницаемого водоносного пласта, существенно влияющих на фильтрационный процесс, пока не получил широкого распространения среди точных аналитических решений. Приводится решение достаточно общей задачи о фильтрации из каналов с учетом совместного влияния капиллярности грунта, испарения со свободной поверхности, а также напора в нижележащем водоносном горизонте [8, 9].

### 4. Методика решения

Для изучения указанных течений формулируются смешанные многопараметрические краевые задачи теории аналитических функций, решение которых осуществляется с помощью применения полуобратного способа годографа скорости П.Я. Полубариновой-Кочиной и И.Н. Кочиной и принципа симметрии Римана – Шварца. Для исследования задач со свободными поверхностями при наличии инфильтрации или испарения используется метод П.Я. Полубариновой-Кочиной, основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса, а также разработанные способы конформного отображения областей специального вида, которые характерны для задач подземной гидромеханики [10–13].

Учет характерных особенностей рассматриваемых классов областей годографа скорости позволил представить решения задач в замкнутой форме через специальные, а в ряде случаев элементарные функции, что делает их использование наиболее простым и удобным на практике.

На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета:

- плавного подземного контура плотины и положение криволинейных участков водоупора;
- высоты поднятия грунтовой воды за шпунтом Жуковского при его обтекании в орошаемом почвенном слое с нижележащим хорошо проницаемым напорным горизонтом, содержащим непроницаемое включение;
- ширины капиллярного растекания, а также величины фильтрационного расхода при течении из каналов в ситуациях, когда при движении требуется оценить совместное влияние на картину явления капиллярности грунта, испарения (инфильтрации) со свободной поверхности, а также величины подпора со стороны вод нижележащего сильнопроницаемого напорного пласта.

#### Список литературы

1. Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я. О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 157–166.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Береславский Э.Н. Построение подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №5. С. 103–112.
4. Береславский Э.Н., Александрова Л.А. Моделирование основания гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости при наличии криволинейного водоупора // Изв. вузов. Математика. 2009. №3. С. 73–79.
5. Береславский Э.Н. Построение контура постоянной скорости обтекания основания плотины при наличии водоупора // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 594–603.
6. Береславский Э.Н., Александрова Л.А., Пестерев Е.В. Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, №6. С. 27–37.
7. Береславский Э.Н., Александрова Л.А., Захаренкова Н.В., Пестерев Е.В. Моделирование фильтрационных течений со свободными границами в подземной гидромеханике // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тез. докл. XVI школы-семинара под рук. Г.Г. Черного. М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 17–18.

8. Береславский Э.Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов // Докл. РАН. 2010. Т. 434, №4. С. 472–475.
9. Береславский Э.Н., Захаренкова А.В. Течения в каналах при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод и капиллярности грунта // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, №7. С. 22–32.
10. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С.296–301.
11. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. 2009. Т. 428, №4. С. 439–443.
12. Береславский Э.Н. Об учете инфильтрации или испарения со свободной поверхности методом круговых многоугольников // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 237–251.
13. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, №4. С. 459–466.

#### MATHEMATICALLY MODELING FILTRATION FLOWS WITH UNKNOWN FREE BOUNDARIES IN THE UNDERGROUND HYDROMECHANICS

*E.N. Bereslavskii, L.A. Aleksandrova, N.V. Zakharenko, E.V. Pesterev*

The following filtration currents with unknown free boundaries are investigated: under a hydro- engineering structure with the regions of constant velocity of the flow in the presence of a water thrust of a complicated configuration; under a rabbit of Zhukovsky through an irrigated ground area with a substratum of a strongly permeable pressure head horizon, the left semi-infinite part of the roof of which is modeled by an impenetrable inclusion; and from channels through a soil stratum with an underlying well permeable water-bearing horizon, taking into account the capillarity of the ground and evaporation from the free surface. To study them, mixed multi-parameter boundary value problems of the theory of analytical functions are formulated and solved.

*Keywords:* filtering, groundwater and undergroundwater, dam, groove, velocity hodograph, conformal mappings.