Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 914–915

УДК 533.6

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СВЕРХЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

***В.И. Лапыгин*[1], *Т.В. Сазонова*[1], *Г.Е. Якунина*[2]**

[1]Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, г. Королев
[2]Государственный университет управления, Москва

vil1940@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрен класс функционалов от функции двух переменных, допускающих аналитическое решение вариационной задачи. Приведены решения ряда вариационных задач сверхзвуковой аэродинамики о форме оптимальных тел в предположении, что коэффициент давления зависит только от угла между вектором нормали к его поверхности и скорости набегающего потока.

Ключевые слова: сверхзвуковая аэродинамика, вариационные методы, оптимальная конфигурация.

Рассмотрим вариационные задачи об экстремуме функций вида:

$$\Phi_1 = \iint_S F_1(\alpha)\,dxdz, \tag{1}$$

$$\alpha^2 = f_x^2 + f_z^2, \quad f_x = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad f_z = \frac{\partial y}{\partial z}, \quad y = f(x,z),$$

$$\Phi_2 = \iint_S F_2(f_x, f_z)\,dxdz, \tag{2}$$

$$\Phi_3 = \int_0^l F_3(x, y')\,dx, \quad y = \varphi(x), \quad y' = \frac{d\varphi}{dx}. \tag{3}$$

Уравнения экстремальных поверхностей или кривых записываются в виде:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial v} = 0, \quad u = f_x, \quad v = f_z, \tag{5}$$

$$\frac{dF_3}{dy'} = c = \text{const}. \tag{6}$$

Из уравнений (4)–(6) следует, что экстремальными поверхностями функционала (1) являются поверхности $\alpha = \text{const}$, т.е. поверхности, угол наклона нормали которой к оси OX постоянен и не зависит от координат (x, z), – это круговой конус и плоскости, касательные к этому конусу.

Экстремалями функционала (2) являются плоскости вида $y + ax + bz + c = 0$, а экстремалями функционала (3) являются решения обыкновенного дифференциального уравнения (6).

К определению экстремалей функционалов вида (1)–(3) сводится ряд задач сверхзвуковой аэродинамики об определении оптимальных форм тел в рамках моделей локального взаимодействия поверхности тела с набегающим потоком. К таким моделям относятся методы касательного клина/конуса, формула Ньютона, формула Аккерета, в соответствии с которыми коэффициент давления на поверхности тела определяется зависимостью:

$$C_p = \psi(f_x, f_z).$$

Тогда при постоянном коэффициенте трения задача о форме тела минимального лобового сопротивления при заданной площади донного сечения сводится к поиску экстремума функционала (1). При отсутствии ограничения на длину тела задача не имеет единственного решения и оптимальной формой может быть как конус (рис. 1*а*), так и равное ему по лобовому сопротивлению пространственное тело, поверхность которого образовано элементами поверхности кругового ко-

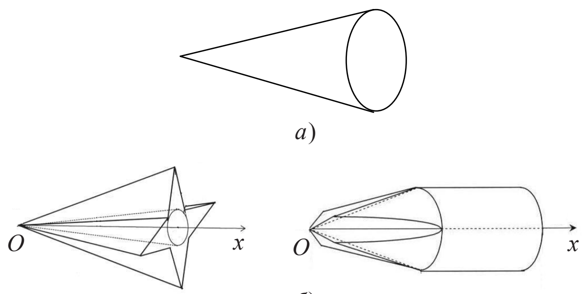

Рис. 1

нуса и плоскостей с $\alpha = \text{const}$ [1–3], (рис. 1*б*).

Задачи о форме тела максимального аэродинамического качества при задании площади в плане или площади донного сечения и в предположении о постоянстве коэффициента трения приводятся к поиску экстремума функционала вида (2). В предположении $C_p \geq 0$ наветренная поверхность оптимального тела является плоской, а верхняя – цилиндрической. Форма донного сечения оказывается треугольной при задании толщины тела и криволинейной трапецией при задании его размаха [4] (рис. 2).

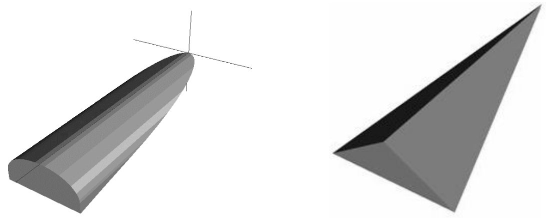

Рис. 2

Предположим, что на подветренной (верхней) поверхности $C_p < 0$, тогда оптимальной формой будет треугольное крыло с клиновидным профилем и плоской наветренной поверхностью.

Задача об осесимметричном теле максимального аэродинамического качества, близком по форме к возвращаемому космическому кораблю «Союз», при заданных объеме и угле атаки сводится к поиску экстремума функционала вида (3). Рассматривается осесимметричное тело, образованное передней (лобовой) поверхностью и задней (кормовой). Эти поверхности сопрягаются друг с другом в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, по кругу радиуса R. В зависимости от заданного условия на длину тела оптимальным является круговой конус или усеченный конус, большим основанием обращенный в поток.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 09-01-00171а.

Список литературы

1. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 2. С. 299–310
2. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 605–614.
3. Крайко А.Н., Якунина Г.Е. К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 1. С. 44–49.
4. Лапыгин В.И., Якунина Г.Е. О формах тел с максимальным аэродинамическим качеством в сверхзвуковом потоке // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 717–730.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF VARIATIONAL PROBLEMS OF SUPERSONIC AERODYNAMICS

V.I. Lapygin, T.V. Sazonova, G.E. Yakunina

A class of functionals of two-variable function is considered that admit analytical solution of the variational problem. Solutions are presented of several variational problems of supersonic aerodynamics on the configuration of optimal bodies in the assumption that the pressure coefficient depends on the angle between the normal vector to surface and oncoming flow velocity only.

Keywords: supersonic aerodynamics, variational methods, optimal configuration.